VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



ГЕРМАН ВЕЙЛЬ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

МАТЕМАТИКА
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Издание подготовили
В. И. АРНОЛЬД, А. Н. ПАРШИН

Ответственный редактор
В. И. АРНОЛЬД



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1984

УДК 510+530.1

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А. А. Баев (председатель),
И. Е. Дзялошинский (заместитель председателя),
А. Ю. Ишлинский, *С. П. Капица*, *Б. М. Кедров*, *И. Л. Кнунянц*,
А. Н. Колмогоров, *С. Р. Микулинский*, *Л. С. Полак*, *Я. А. Смородинский*,
А. С. Спирин, *А. Л. Яншин*

Вейль Г. **Математика. Теоретическая физика.** М.: Наука, 1984.— 510 с.

Издание научных трудов немецкого математика Г. Вейля, работы которого имеют основополагающее значение для многих областей современной математики и теоретической физики, включает исследования по теории представлений групп Ли, дифференциальным уравнениям, теории чисел, дифференциальной геометрии и основаниям математики, а также ряд очерков по истории науки.
Книга рассчитана на математиков, физиков и историков науки.

В $\frac{1704020000\text{-}036}{042(02)\text{-}84}$ 142-84-III

© Издательство «Наука», 1984 г.


МАТЕМАТИКА · ФИЗИКА
* Г. ВЕЙЛЬ *

ОТ РЕДАКЦИИ

Герман Вейль (1885—1955) вошел в науку в самом начале нашего века. Он относится к числу немногих великих ученых, сумевших оставить отпечаток своей индивидуальности почти во всех разделах математики. Достойный преемник своего учителя Давида Гильберта и яркий продолжатель традиций немецкой математической школы, Вейль был также замечательным физиком, внесшим крупный вклад в развитие теории относительности и квантовой механики.

Если добавить к этому глубокую философскую интерпретацию оснований науки, разносторонние интересы, весьма самобытный художественный стиль его книг и статей, то, несомненно, личность Вейля можно рассматривать как явление всей немецкой культуры XX века.

Настоящее издание представляет собой собрание избранных работ Г. Вейля, отражающее по мере возможности упомянутые стороны его творчества. В издание включены как прославившие Вейля работы по представлениям групп Ли, дифференциальным уравнениям, теории чисел, основаниям математики, так и его менее известные статьи, представляющие интерес и по сей день. К последним относится, в частности, опередившая свое время работа «Электрон и гравитация», полное значение которой выявилось лишь недавно в связи с появлением калибровочных теорий в физике элементарных частиц. Наконец, популярные обзоры и биографии, лишь небольшая часть которых смогла войти в эту книгу, дают представление о мастерстве Вейля как популяризатора и историка науки.

Публикация этих работ вместе с оригинальными научными трудами позволяет полнее показать то влияние на развитие науки, которое оказали как сам Вейль, так и его предшественники и современники.

Огромный объем наследия Вейля делал наш выбор далеко не бесспорным. Тем не менее было сочтено возможным отказаться от публикации статей, уже имеющихся в русском переводе. Исключение сделано для работы «Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных

преобразований», которая является, быть может, самым известным сочинением Г. Вейля и имеющийся перевод которой содержит к тому же большие пробелы.

В конце книги помещена статья о жизни и творчестве Вейля известных французских математиков К. Шевалле и А. Вейля, комментарии к работам, а также полная библиография, включающая все известные нам переводы трудов Г. Вейля на русский язык.

Мы глубоко признательны И. С. Алексееву, Ю. А. Данилову, С. С. Демидову, Х. Коху, Р. Ленглендсу и О. Нейману за помощь при подготовке настоящего издания.

В. И. Арнольд, А. Н. Паршин



Hermann Weyl

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ*

Глава I

ТЕНЗОР ГРИНА В СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Введение. Основные формулы теории упругости

Для решения *статических задач теории упругости* в случае однородных изотропных тел произвольной формы с закрепленной границей имеются два принципиально различных метода, один из которых был развит Фредгольмом, Лауричелла и Марколонго [1], а другой — Корном и Боджио [2]. При использовании обоих методов исходная задача сводится к системе линейных интегральных уравнений. Однако, поскольку метод Корна—Боджио приводит к интегральным уравнениям, ядра которых имеют трудноисследуемые сингулярности (вопреки утверждению Боджио, который ошибочно объявлял их «регулярными»), мы будем принимать в расчет лишь первый метод, аналогичный методу решения соответствующих задач теории потенциала, предложенному Нейманом и Фредгольмом. Только этот путь, не приводящий к подобным затруднениям, представляется мне естественным. Чтобы быть уверенным в существовании решения получающихся неоднородных интегральных уравнений, следует, как известно, установить, что соответствующие однородные уравнения имеют лишь тривиальное решение — 0. Для задачи с закрепленной границей этот факт был безукоризненно обоснован Лауричелла [3]. Для того чтобы этот метод можно было перенести на задачи с другими граничными условиями, нам важно конструктивную часть метода сделать независимой от доказательства этого факта. Другими словами, мы покажем, что решение исходной задачи можно получить также и в том случае, когда однородные интегральные уравнения имеют не-

---

* Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers.— Rend. Circ. mat. Palermo, 1915, vol. 39, p. 1—50. Перевод М. И. Зеликина.

[1] *Fredholm I.* Solution d'un problem fondamental de la theorié de l'elasticité.— Ark. mat. astron. och. fys., 1906, vol. 2, N 28, p. 1—8; *Lauricella G.* Sull' integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.— Atti Reale Accad. Lincei, Sem. 1, 1906, vol. 15, p. 426—432; *Marcolongo R.* La teoria delle eguazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-matematica.— Ibid., Sem. 1, 1907, vol. 16, p. 742—749.

[2] *Korn A.* Über die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie.— Rend. Circ. mat. Palermo, Sem. 2, 1910, vol. 30, p. 138—152. Там же процитированы более ранние сочинения Корна на ту же тему; *Boggio T.* Nuova rizoluzione di un problema fondamentale della teoria dell'elasticita.— Atti Reale Accad. Lincei, Sem. 2, 1907, vol. 16, p. 248—255.

[3] L. c. [1]

тривиальные решения. Тем самым мы устраняем с пути камень преткновения, препятствующий перенесению метода Неймана—Фредгольма на случай общих граничных условий [4].

Основываясь на этих рассуждениях и на известном подходе Буссинеска, удалось решить статическую задачу теории упругости также и для того случая, когда давление на поверхности тела равно нулю. До сих пор, насколько мне известно, этот случай, который следует считать естественным, исследовал лишь Боджио с помощью своего метода [5]. Однако я должен признаться, что по упомянутым выше основаниям его аргументация представляется мне не вполне обоснованной и во всяком случае явно недостаточной для преследуемых нами изложенных ниже целей.

Здесь будет также рассмотрен третий вид граничных условий: $\operatorname{div} \mathfrak{u} = 0$, $\mathfrak{u}$ ортогонально к поверхности тела (под $\mathfrak{u}$ понимается сдвиг). Эта задача окажется для нас существенной, поскольку она служит связующим звеном при переходе от теории упругости к теории потенциала по схеме «*упругое тело → упругий эфир Френеля → электромагнитный эфир*».

В настоящей работе речь идет не о статической задаче, а о *задаче теории колебаний*. Для упругих тел, не подверженных воздействию внешних сил, при каждом из трех упомянутых выше граничных условий можно выписать бесконечный ряд по собственным колебаниям; соответствующие значения собственных чисел образуют (дискретный) спектр тела. *Нам нужно доказать, что на шкале частот спектра в области высоких собственных частот плотность собственных чисел асимптотически не зависит от конкретной формы упругого тела, а зависит только от его объема и от обеих констант упругости.* Более точная формулировка этого результата такова: уравнение упругих колебаний гласит:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} = a \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} - b \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u}. \tag{1}$$

Здесь t — время, a и b — две (строго положительные) константы упругости [6]. Выражение, стоящее в правой части, обозначим через $\Delta^* \mathfrak{u}$. Это выражение играет в теории упругости ту же роль, что и $\Delta \mathfrak{u}$ в теории потенциала, и, более того, оно переходит в $\Delta \mathfrak{u}$ при $a = b = 1$. Собственные колебания характеризуются тем, что зависимость $\mathfrak{u}$ от времени выражается периодической функцией $e^{i\nu t}$, в которой постоянная ν является собственной частотой. Число собственных колебаний, частота которых меньше некоторого произвольного значения ν_0, асимптотически при $\nu_0 \to \infty$ ведет себя как

$$\frac{J \nu_0^3}{6\pi^2} \left\{ \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} + 2 \left(\frac{1}{b}\right)^{3/2} \right\}.$$

---

[4] Ср. с замечанием Е. Е. Леви: I Problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali.— Mem. mat. Soc. Ital. sci. (detta dei XL) (III), 1910, vol. 16, p. 3—112, верх с. 8 и примечание.

[5] *Boggio T.* Determinazione della deformazione di un corpo elastico per date tensioni superficiali.— Atti Reale Accad. Lincei, Sem. 2, 1907, vol. 16, p. 441—449.

[6] Если M — модуль упругости, σ — отношение поперечного сжатия к продольному расширению, а плотность равна 1, то

$$a = \frac{M(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \qquad b = \frac{M}{2(1+\sigma)} \qquad [^1].$$

Здесь J обозначает объем тела. Я получил этот результат только благодаря тому, что смог перенести результаты своих исследований в теории колебания мембраны, опубликованные в «Mathematischen Annalen» и в «Crelles Journal», на задачи теории упругости. Тем самым мне предоставляется долгожданная возможность изложить еще раз, надеюсь в более ясной форме, теорию, которая в упомянутых выше работах [7] только начинала развиваться и изложение которой вследствие этого грешило неполнотой и непоследовательностью.

Для $a = b = 1$ сформулированный выше результат включает в себя доказанный мною ранее *асимптотический спектральный закон для задачи излучения в вакууме*. Этот закон был использован для обоснования современной теории излучения. Однако в теории излучения ограничились выводом этого закона лишь для частного случая пространства кубической формы (куб Джинса). Точно так же асимптотический спектральный закон для задачи упругих колебаний был взят за исходный пункт при построении теории удельной теплоемкости твердых тел [8] (при выводе закона Дюлонга—Пти и его модификаций). Однако и в этом случае Дебай (с помощью прямых вычислений) доказал спектральный закон только для тел шаровой формы. Эти основанные на применении квантовой гипотезы и термодинамических принципов теории содержали бы в себе непримиримые противоречия, если бы вдруг оказалось, что спектральные законы, лежащие в их основании и полученные лишь на примерах, зависят от формы пустого пространства или соответственно упругого тела. Именно поэтому я возражаю против того, что доказательство этих «постулатов Лоренца» [9], абсолютно необходимое для математика, для физика необязательно, и утверждаю: если стремиться дать глубокое обоснование таким физическим теориям, в которых термодинамика должна быть заменена *статистическими* рассмотрениями, то необходимо строгое математическое обоснование асимптотического спектрального закона для тел произвольной формы. Разумеется, одного этого закона может оказаться недостаточно. Например, чтобы заложить электромагнитно-статистические основы законов Кирхгофа об эмиссии и абсорбции, необходимо вывести подобный асимптотический спектральный закон не только для однородной, но и для произвольной неоднородной среды и необходимо, далее, сформулировать его не только для собственных *значений*, но и для собственных *функций*, т. е. необходимо учитывать по мере надобности не только частоту колебаний, но и состояние, в котором находится колеблющееся тело. Я надеюсь подробнее рассмотреть этот вопрос в другом месте. Гильберт всегда отчетливо выделял следующую точку зрения, возникающую при изучении *интегральных уравнений*: нахождение собственных колебаний непрерывной среды эквивалент-

---

[7] a) Das asymptotische Verteilungsgesetz linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung).— Math. Ann., 1912, Bd. 71, S. 441—479; b) Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung.— J. reine und angew. Math., 1912, Bd. 141, S. 1—11; c) Über das Spectrum der Hohlraumstrahlung.— Ibid., S. 163—181; d) Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spectralgesetze.— Ibid., 1913, Bd. 143, S. 177—202.

[8] П. Дебаем в его знаменитой работе: Zur Theorie der specifischen Wärmen.— Ann. Phys. (IV), 1912, Bd. 39, S. 789—839.

[9] Г. А. Лоренц в своем 4-м докладе, прочитанном по приглашению в честь основания Wolfskehl-Stuftung в апреле 1910 г. в Геттингене, призывал математиков заняться этой проблемой.

но *приведению бесконечномерного эллипсоида к главным осям*; в этом и состоит математическая сущность теории колебаний. Эта точка зрения должна быть господствующей в любом изложении теории колебаний, которое рассчитывает на здравое понимание истинного положения вещей. Неудивительно, что наиболее прозрачное доказательство теоремы существования собственных колебаний получается с помощью метода интегральных уравнений; более того, этот метод оказывается достаточно эффективным и для изучения асимптотики собственных частот.

Введем следующие *обозначения*:

Пусть исследуемое тело заполняет ограниченную [2] область J объема J, границей которой служит поверхность $\mathfrak{O}$; пусть p (а также p', p'', . . .) — точка области J, o — точка, лежащая на поверхности $\mathfrak{O}$, dp — элемент пространства в точке p, do — элемент поверхности в точке o [3], $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(o)$ — единичный вектор внутренней нормали в точке o поверхности $\mathfrak{O}$. Если $\mathfrak{v}$ — вектор, то через v_x, v_y, v_z, v_n будут обозначаться его проекции на оси x, y, z и на нормаль $\mathfrak{n}$ соответственно, а через $\mathfrak{v}_t = \mathfrak{v} - \mathfrak{n}(\mathfrak{v}, \mathfrak{n})$ — его проекция на касательную плоскость; при этом x, y, z — декартова система координат.

Как известно, основополагающая в общей *теории потенциала формула Грина* имеет вид:

$$\int_J (\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + u\Delta v)\, dp = -\int_{\mathfrak{O}} u \frac{\partial v}{\partial n}\, do. \qquad \text{(G)}$$

Из нее непосредственно следует, что

$$\int_J (u\Delta v - v\Delta u)\, dp = -\int_{\mathfrak{O}} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) do, \qquad \text{(G')}$$

где u и v — две произвольные, непрерывно дифференцируемые в J функции, для которых существует Δu и Δv. Пусть u — гармоническая функция ($\neq \mathrm{const}$), тогда, полагая в (G) $v = u$, получаем важное неравенство:

$$-\int_{\mathfrak{O}} u \frac{\partial u}{\partial n}\, do = \int_J (\operatorname{grad} u)^2\, dp > 0.$$

В *теории упругости* можно указать несколько формул, являющихся аналогами формулы Грина. Пусть $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ — два произвольных, непрерывно дифференцируемых в J векторных поля, тогда из первых производных $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ по координатам x, y, z в точке p можно составить симметричную билинейную форму $E(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$, которая при $\mathfrak{v}=\mathfrak{u}$ задает удвоенное напряжение в точке p, индуцированное смещением $\mathfrak{u}$ (плотность потенциальной энергии). Именно поэтому $E(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) > 0$ для всех полей $\mathfrak{u}$, кроме полей, соответствующих инфинитезимальному смещению тела с отсутствием деформации. Формула для $E(\mathfrak{u}, \mathfrak{u})$ имеет вид:

$$E(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = \left(a - \frac{4}{3} b\right)(\operatorname{div} \mathfrak{u})^2 + \frac{2b}{3}\left\{\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + +\right\} + \\ + b\left\{\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2 + +\right\} \qquad [4]$$

Отсюда следует, что для любого упругого тела константы a и b удовлетворяют неравенству

$$3a > 4b > 0. \tag{2}$$

Однако для того чтобы включить в рассмотрение случай излучения в пустоте ($a = b = 1$), сделаем более общее предположение $a > 0$, $b > 0$. Давление, индуцированное смещением $\mathfrak{u}$ внутри тела, зависит от положения элемента поверхности, на которое оно действует, поэтому это давление является *тензором* $\Pi = \Pi(\mathfrak{u})$. Вектор давления, действующего на элемент поверхности, для которого ось x является нормалью, имеет координаты:

$$(a-2b)\operatorname{div} u + 2b\frac{\partial u_x}{\partial x},$$

$$b\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right),$$

$$b\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right).$$

Давление на элемент do, индуцированное смещением $\mathfrak{u}$, обозначим через $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$, а давление на тот же элемент, индуцированное смещением $\mathfrak{v}$, — через $\mathfrak{Q}(\mathfrak{v})$. *Формула Бетти*, первый аналог формулы Грина, гласит[10]:

$$\int_J \{E(\mathfrak{u},\mathfrak{v}) + \mathfrak{u}\Delta^*\mathfrak{v}\}\,dp = -\int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{u}\mathfrak{Q}\,do. \tag{B}$$

Она непосредственно приводит к соотношению взаимности

$$\int_J (\mathfrak{u}\Delta^*\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\Delta^*\mathfrak{u})\,dp = -\int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{u}\mathfrak{Q} - \mathfrak{v}\mathfrak{P})\,do. \tag{B'}$$

Для векторного поля $\mathfrak{u}$, удовлетворяющего в J уравнению $\Delta^*\mathfrak{u} = 0$, при выполнении предположения (2) получаем неравенство

$$-\int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{u}\mathfrak{P}\,do = \int_J E(\mathfrak{u},\mathfrak{u})\,dp \geqslant 0, \tag{B_0}$$

причем равенство имеет место лишь в том случае, когда $\mathfrak{u}$ является инфинитезимальным смещением твердого тела.

Второй аналог формулы Грина, на который, по-видимому, обращали мало внимания до сих пор, имеет вид:

$$\int_J (a\operatorname{div}\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v} + b\operatorname{rot}\mathfrak{u}\operatorname{rot}\mathfrak{v} + \mathfrak{u}\Delta^*\mathfrak{v})\,dp =$$

$$= -\int_{\mathfrak{O}} (au_n\operatorname{div}\mathfrak{v} + b\operatorname{rot}\mathfrak{v}\,[\mathfrak{n},\mathfrak{u}])\,do. \tag{C}$$

Поменяв в этой формуле $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ местами и вычтя полученное равенство из (C), получим равенство (C′), которое по-иному, нежели (B′), преобразует интеграл

[10] Для векторного исчисления я использую обозначения, использованные в «Энциклопедии математических наук»; в частности, прямые скобки обозначают векторное произведение.

по объему

$$\int\limits_J (\mathfrak{u}\Delta^*\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\Delta^*\mathfrak{u})dp$$

к интегралу по поверхности. Для поля $\mathfrak{u}$, которое удовлетворяет уравнению $\Delta^*\mathfrak{u} = 0$, справедливо неравенство:

$$-\int\limits_{\mathfrak{O}} (au_n \operatorname{div} \mathfrak{u} + b \operatorname{rot} \mathfrak{u} [\mathfrak{n}, \mathfrak{u}])\, do = \int\limits_J \{a(\operatorname{div}\mathfrak{u})^2 + b(\operatorname{rot}\mathfrak{u})^2\}\, dp \geqslant 0, \qquad (C_0)$$

причем равенство имеет место лишь тогда, когда $\mathfrak{u}$ — безвихревое, соленоидальное поле. Для доказательства формулы (C) нужно подставить в формулу Гаусса

$$\int\limits_J \operatorname{div} \mathfrak{w}\, dp = -\int\limits_{\mathfrak{O}} w_n do$$

сначала $\mathfrak{w} = \mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{v}$, потом $\mathfrak{w} = [\mathfrak{u}, \operatorname{rot} \mathfrak{v}]$, а затем первое из полученных равенств умножить на a, второе на b и результаты сложить.

Кроме (B) и (C), можно рассматривать любые из равенств, составленные по схеме β (B) + γ (C), которая означает, что (B) умножается на положительную константу β, (C) на положительную константу γ и результаты складываются. Особенно важным для нас окажется равенство

$$(D) = \frac{a}{a+b}(B) + \frac{b}{a+b}(C),$$

а также соответствующее ему соотношение взаимности (D′) и неравенство (D_0). Для справедливости последнего требуется не предположение (2), а условие $a > b/3 > 0$, ибо подынтегральное выражение возникающего при этом пространственного интеграла имеет вид:

$$\frac{a}{a+b}\left(a - \frac{b}{3}\right)(\operatorname{div}\mathfrak{u})^2 + \frac{2ab}{3(a+b)}\left\{\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2\right\} + \frac{b^2}{a+b}(\operatorname{rot}\mathfrak{u})^2 + \frac{ab}{a+b}\left\{\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2\right\}.$$

Важнейшую роль в теории потенциала играет *фундаментальное решение* уравнения Лапласа [5] с «источником», расположенным в начале координат

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Пусть f — заданная функция от p — отлична от нуля лишь в некоторой конечной области пространства, тогда решение уравнения

$$\Delta u = -4\pi f,$$

исчезающее на бесконечности, задается формулой

$$u(p) = \int \frac{1}{r(p, p')} f(p')\, dp', \qquad (3)$$

где $r(p, p')$ — расстояние от «источника» p' (Quellpunkt) до «приемника» p (Aufpunkt) [11].

Статическая задача теории упругости состоит в том, чтобы проинтегрировать уравнение

$$\Delta^* \mathfrak{u} = -4\pi \mathfrak{f},$$

где $4\pi\mathfrak{f}$ — заданное векторное поле, а именно (бесконечно слабое) поле сил, которое вызывает деформацию упругой среды. Если считать, что упругая среда заполняет все бесконечное пространство, то эта задача решается с помощью некоторого аналога формулы (3):

$$\mathfrak{u}(p) = \int P(p, p')\, \mathfrak{f}(p')\, dp'. \tag{4}$$

Тензор P, впервые введенный Сомилиана, является *«тензором Грина» теории упругости* [6]. Он состоит из двух слагаемых:

$$P = \frac{1}{2a} P_a + \frac{1}{2b} P_b. \tag{5}$$

Введем декартовы координаты, в которых «источник» p' лежит в начале координат; тогда, если x, y, z — координаты точки p, то

$$P_a = \begin{Vmatrix} \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} & -\frac{xy}{r^3} & -\frac{xz}{r^3} \\ -\frac{yx}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} & -\frac{yz}{r^3} \\ -\frac{zx}{r^3} & -\frac{zy}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \end{Vmatrix}$$

и

$$P_b = \begin{Vmatrix} \frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} & \frac{xy}{r^3} & \frac{xz}{r^3} \\ \frac{yx}{r^3} & \frac{1}{r} + \frac{y^2}{r^3} & \frac{yz}{r^3} \\ \frac{zx}{r^3} & \frac{zy}{r^3} & \frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3} \end{Vmatrix}.$$

Произведение $P(p, p')\,\mathfrak{f}(p')$ понимается как произведение матриц, в котором вектор $\mathfrak{f} = (f_x, f_y, f_z)$ рассматривается как вертикальный столбец. В записи же $\mathfrak{f}(p)\,P(p, p')$ предполагается, что вектор $\mathfrak{f}$ — горизонтальная строка. Наконец, если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два произвольных вектора, то под $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ будет пониматься тензор, который получается при матричном произведении $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ при условии, что $\mathfrak{a}$ — вектор-столбец, а $\mathfrak{b}$ — вектор-строка:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{Vmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{Vmatrix}.$$

[11] Более того, при естественной интерпретации оператора Δ функция (3) удовлетворяет уравнению $\Delta u = -4\pi f$ даже и в том случае, когда f только непрерывна, ср. мое замечание в примечании на с. 182 работы d, процитированной в примеч. 7.

Каждый из трех столбцов, из которых состоит тензор P, рассматриваемый как вектор, является решением уравнения $\Delta^* u = 0$. При этом двум слагаемым $\Delta^* u$ соответствуют два слагаемых тензора P: P_a и P_b,— в том смысле, что каждый столбец P_a — безвихревое поле, а каждый столбец P_b — соленоидальное.

§ 2. Решение первой краевой задачи теории упругости

Наша цель не в том, чтобы проинтегрировать «неоднородную задачу»

$$\Delta^* \mathfrak{u} = -4\pi \mathfrak{f} \tag{6}$$

во всем пространстве, а в том, чтобы найти ее решение в ограниченной области J (с границей $\mathfrak{O}$) с одним из трех перечисленных выше граничных условий. Начнем с первого условия:

$$\mathfrak{u} = 0 \text{ на поверхности } \mathfrak{O},$$

и назовем соответствующую задачу (неоднородной) задачей I. Будем искать ее решение в виде

$$\mathfrak{u}(p) = \int_J \Gamma(p, p') \mathfrak{f}(p') \, dp', \tag{7}$$

где $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{I}}$ — тензор Грина для первой краевой задачи, являющийся решением статической задачи в случае, когда возмущающая сила $\mathfrak{f}$ сконцентрирована в одной точке p'. Соответствующая однородная задача ($\mathfrak{f} = 0$) имеет единственное решение $\mathfrak{u} = 0$. Действительно, каждое решение однородной задачи, согласно неравенству (D_0), является чистым переносом

$$\mathfrak{u} = \text{const} = \mathfrak{c},$$

а поскольку $\mathfrak{u} = 0$ на поверхности $\mathfrak{O}$, то $\mathfrak{c} = 0$. В этом рассуждении, как и на протяжении всего параграфа, предполагается, что $a > b/3 > 0$ [7].

Положим

$$\Gamma = P - A,$$

где P — тензор Сомилиана. Первый, второй и третий столбцы матрицы P обозначим соответственно через $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$. Аналогичные обозначения будут использоваться для Γ, A и вообще для любого тензора. Для того чтобы определить A, следует решить задачу I:

При заданных граничных значениях на поверхности $\mathfrak{O}$ найти *поле* $\mathfrak{u}$, *удовлетворяющее однородному уравнению*

$$\Delta^* \mathfrak{u} = 0.$$

(Такие поля будут кратко называться *статическими*.) Действительно, зафиксируем источник. Тогда вектор $\mathfrak{A}_x$, например, рассматриваемый как функция от p, будет решением задачи I, принимающим на поверхности $\mathfrak{O}$ те же значения, что и $\mathfrak{P}_x$, которые нам уже известны.

Для решения задачи I нам понадобится аналог подстановки, которая была использована Нейманом для решения первой краевой задачи теории потенциала. При этом роль формулы Грина будет играть формула (D_0), а не какой-либо дру-

гой из ее аналогов. Для того чтобы ввести нужную нам подстановку, построим по еще неизвестной векторной функции $\mathfrak{e}$ (0), заданной на поверхности $\mathfrak{D}$, выражение

$$\frac{a}{a+b}\mathfrak{P}(\mathfrak{u})\mathfrak{e}+\frac{b}{a+b}(a\operatorname{div}\mathfrak{u}\cdot e_n+b\operatorname{rot}\mathfrak{u}[\mathfrak{n},\mathfrak{e}]).$$

Подставляя в него вместо $\mathfrak{u}$ поочередно три вектор-столбца матрицы $P(p, p')$ (источник предполагается фиксированным), получаем три величины, являющиеся компонентами вектора

$$\Lambda(p', o)\mathfrak{e}(o) \tag{8}$$

(где Λ— тензор). Подстановка, которая нам необходима, имеет вид

$$\mathfrak{u}(p)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{D}}\Lambda(p, 0)\mathfrak{e}(o)\,do. \tag{9}$$

Для удобства вычислений выберем систему координат x, y, z с началом в точке o поверхности $\mathfrak{D}$ и осью x, направленной по нормали к поверхности в этой точке. В такой системе координат три компоненты вектора (8) имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{1}{a+b}\left\{\left(2b\frac{x}{r^3}+(a-b)\frac{3x^3}{r^5}\right)e_x+(a-b)\frac{3x^2y}{r^5}e_y+(a-b)\frac{3x^2z}{r^5}e_z\right\},\\ \frac{1}{a+b}\left\{(a-b)\frac{3x^2y}{r^5}e_x+\left(2b\frac{x}{r^3}+(a-b)\frac{3xy^2}{r^5}\right)e_y+(a-b)\frac{3xyz}{r^5}e_z\right\},\\ \frac{1}{a+b}\left\{(a-b)\frac{3x^2z}{r^5}e_x+(a-b)\frac{3xyz}{r^5}e_y+\left(2b\frac{x}{r^3}+(a-b)\frac{3xz^2}{r^5}\right)e_x\right\},\end{gathered} \tag{10}$$

где x, y, z — координаты источника p'.

Обозначим через θ_{po} угол между вектором нормали в точке o и вектором $\mathbf{op}=\mathfrak{r}_{po}$ длины $r_{po}=|\mathfrak{r}_{po}|$. Тогда мы получим выражение

$$\Lambda(p,o)\mathfrak{e}(o)=\frac{2b}{a+b}\frac{\cos\theta_{po}}{r_{po}^2}\mathfrak{e}+\frac{3(a-b)}{a+b}\frac{\cos\theta_{po}}{r_{po}^4}\mathfrak{r}_{po}(\mathfrak{r}_{po}\mathfrak{e}),$$

которое, будучи записанным в векторной форме, вновь не зависит от выбора специальной системы координат. Если E — 3×3-единичная матрица, то

$$\Lambda(p,o)=\frac{\cos\theta}{r^2}\left\{\frac{2b}{a+b}E+\frac{3(a-b)}{a+b}\frac{\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}}{r^2}\right\}. \tag{11}$$

По замечанию Фредгольма [12] векторное поле $\Lambda(p, 0)\mathfrak{e}(o)$ имеет следующий простой наглядный смысл: проведем в точке o касательную плоскость к поверхности $\mathfrak{D}$ и представим себе, что бесконечное полупространство, для которого $\mathfrak{n}(o)$ является внутренней нормалью, заполнено упругой средой. Если, далее, к точке o приложена сила $\mathfrak{e}(o)$, а сдвиг на самой граничной плоскости считается равным нулю, то векторное поле $\Lambda(p, o)\mathfrak{e}(o)$ описывает соответствующую деформацию упругого полупространства. Это решение статической задачи для ограниченного плоскостью полупространства было впервые получено Черутти и Буссинеском [13].

---

[12] L. c., S. 59.

[13] *Cerruti*. Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi.— Atti Reale Accad. Lincei (Roma), 1882, vol. 13, p. 81—123. (III: Mem. Cl. sci. fis., mat. et natur.)

Предположим, что поверхность $\mathfrak{O}$ такова, что нормаль к ней в каждой точке не только непрерывна, но и удовлетворяет условию Гёльдера, т. е. существует такая положительная константа α ($\alpha \leqslant 1$), что угол $\eta_{oo'}$ между нормалями в двух соседних точках o и o' удовлетворяет неравенству

$$|\eta_{oo'}| \leqslant \text{const} \cdot (r_{oo'})^{\alpha}.$$

В частности, здесь содержится случай, когда поверхность имеет непрерывную кривизну ($\alpha = 1$).

Для определения неизвестной величины $\mathfrak{e}(o)$ получаем в силу формулы (9) интегральное уравнение

$$\mathfrak{u}(o) = \mathfrak{e}(o) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{O}} \Lambda(o, o') \, \mathfrak{e}(o') \, do', \tag{12}$$

ядро которого при $o = o'$ в силу неравенства

$$\left| \frac{\cos \theta_{oo'}}{r_{oo'}^2} \right| \leqslant \frac{\text{const}}{(r_{oo'})^{2-\alpha}}$$

стремится к бесконечности не быстрее чем $1/r^2$, и, следовательно, к этому уравнению применима обычная теория Фредгольма. Именно поэтому в качестве аналога формулы Грина и надо было выбирать формулу (D) (а не какую-либо другую): благодаря такому выбору в (10) x присутствует всюду в качестве множителя.

Если допустить, что однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (12), не имеет никаких других решений, кроме тривиального, то уравнение (12) будет разрешимо для любого векторного поля $\mathfrak{u}(o)$, заданного на поверхности $\mathfrak{O}$, и, следовательно, можно будет построить тензор Грина $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{I}}$. Пусть p' и p'' — произвольные различные точки области J. Рассмотрим в качестве области интегрирования область J, из которой вырезаны два бесконечно малых шара, содержащих эти точки. Тогда из соотношения взаимности (D′), примененного к

$$\mathfrak{u}(p) = \Gamma(p, p') \text{ и } \mathfrak{v}(p) = \Gamma(p, p''),$$

вытекает *симметрия тензора Грина* Γ, которая означает, что тензоры $\Gamma(p', p'')$ и $\Gamma(p'', p')$ переходят друг в друга при замене строк на столбцы.

Таким же способом, как и в теории потенциала, можно показать, что у однородного уравнения, соответствующего уравнению (12), отсутствуют нетривиальные решения (по крайней мере в предположении, что $\mathfrak{O}$ состоит только из одной поверхности [8]). Однако, как уже указывалось во введении, мы не можем довольствоваться этим способом, поскольку он не применим к задачам, которыми мы будем заниматься в дальнейшем. На самом же деле вопрос о разрешимости неоднородной задачи I следует связывать не с вопросом об отсутствии нетривиальных решений однородного интегрального уравнения, соответствующего уравнению (12), а с вопросом об отсутствии нетривиальных решений у однородной задачи I.

Итак, будем теперь считать, что однородное интегральное уравнение

$$\mathfrak{e}(o)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}}\Lambda(o,o')\,\mathfrak{e}(o')\,do'=0 \tag{13}$$

имеет в точности n линейно независимых решений $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ [9]. Тогда и транспонированное однородное уравнение

$$\mathfrak{d}(o')+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}}\mathfrak{d}(o)\,\Lambda(o,o')\,do=0$$

имеет n линейно независимых решений $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$. Определим на поверхности $\mathfrak{O}$ n непрерывных вектор-функций $\mathfrak{a}_1(o), \ldots, \mathfrak{a}_n(o)$ таких, что

$$\int\limits_{\mathfrak{O}}\mathfrak{d}_i(o)\,\mathfrak{a}_k(0)\,do=\delta_{ik}$$

(можно, например, выбрать их в виде линейных комбинаций функций $\mathfrak{d}_i(o)$), а также n непрерывных вектор-функций $\mathfrak{b}_1(o), \ldots, \mathfrak{b}_n(o)$, таких, что

$$\int\limits_{\mathfrak{O}}\mathfrak{b}_i(o)\,\mathfrak{e}_k(o)\,do=\delta_{ik}.$$

Неоднородное уравнение (12) разрешимо только тогда, когда заданная функция $\mathfrak{u}$, стоящая в левой части, удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{\mathfrak{O}}\mathfrak{d}_i(o)\,\mathfrak{u}(o)\,do=0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Для того чтобы построить тензор

$$\mathfrak{A}_x(p,p')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}}\Lambda(p,o)\,\mathfrak{K}_x(o)\,do,$$

на самом деле следовало бы решить уравнение

$$\mathfrak{R}_x(o,p')=\mathfrak{K}_x(o)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}}\Lambda(o,o')\,\mathfrak{K}_x(o')\,do',$$

которое, однако, в общем случае неразрешимо. Для того чтобы решение существовало, нужно заменить левую часть на

$$\mathfrak{R}_x(o,p')-\sum_i\mathfrak{a}_i(o)\int\limits_{\mathfrak{O}}\mathfrak{d}_i(o')\,\mathfrak{R}_x(o',p')\,do'.$$

Тогда решение $\mathfrak{K}_x=\mathfrak{K}_x(o,p')$ однозначно определяется n условиями

$$\int\limits_{\mathfrak{O}}\mathfrak{b}_i(o)\,\mathfrak{K}_x(o)\,do=0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Далее $\mathfrak{K}_x(o,p')$, рассматриваемый как функция от p', является статическим полем, поскольку этот вектор выражается через $\mathfrak{R}_x(o,p')$ с помощью линейного оператора, не зависящего от p'. Если этот оператор применить к компонентам

$\mathfrak{R}_y$ и $\mathfrak{R}_z$, то получится тензор $K(o, p')$ с вертикальными столбцами $\mathfrak{K}_x$, $\mathfrak{K}_y$, $\mathfrak{K}_z$, и на роль нужного нам «компенсатрикса» Грина A в первую очередь претендует тензор

$$A^*(p, p') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{O}} \Lambda(p, o) K(o, p')\, do.$$

Три горизонтальных вектора A^*, рассматриваемые как функции от p', так же как и три вертикальных вектора A^*, рассматриваемые как функции от p, являются статическими полями. Однако на границе тела J матрица $\Gamma^* = P - A^*$ равна не нулю, а

$$\Gamma^*(o, p') = \sum_i (\mathfrak{a}_i(o) \times \mathfrak{g}_i(p')), \qquad (*)$$

где

$$\mathfrak{g}_i(p) = \int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{g}_i(o) P(o, p)\, do.$$

Пусть среди функций $\mathfrak{g}_i(p)$, определенных внутри J, ровно m $(\leqslant n)$ линейно независимых. Подставляя в формулу $(*)$ функции $\mathfrak{g}_i(p)$, выраженные через обозначаемый теми же буквами ортогональный базис образованной ими линейной оболочки, получим выражение, правая часть которого содержит только m членов, где множители $\mathfrak{g}_i(p)$ удовлетворяют соотношениям

$$\int_J \mathfrak{g}_i(p) \mathfrak{g}_k(p)\, dp = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots, m). \qquad (G)$$

Для того чтобы вернуться к первоначальным граничным условиям, рассмотрим

$$\Gamma^{**}(p, p') = \Gamma^*(p, p') - \sum_{i=1}^{m} (\mathfrak{f}_i(p) \times \mathfrak{g}_i(p')),$$

где

$$\mathfrak{f}_i(p) = \int_J \Gamma^*(p, p') \mathfrak{g}_i(p')\, dp'.$$

Тогда действительно

$$\Gamma^{**}(o, p') = 0.$$

Горизонтальные векторы Γ^{**}, рассматриваемые как функции от p', удовлетворяют однородному уравнению $\Delta^* = 0$. Однако вертикальные векторы, из которых состоит Γ^{**}, рассматриваемые как функции от p, удовлетворяют не уравнению $\Delta^* = 0$, а уравнению (обозначения можно понять без более точных пояснений)

$$\Delta_p^* \Gamma^{**} = 4\pi \sum_i (\mathfrak{g}_i(p) \times \mathfrak{g}_i(p')).$$

(С этого момента вновь полностью устранен произвол в выборе $\mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{b}_i$.) Пусть p' и p'' — две произвольные точки в J, тогда из формулы (D′) с помощью тех же рассуждений, которые ранее в случае неразрешимости неоднородных

уравнений приводили к симметрии Γ_{I}, заключаем, что тензор

$$\Gamma_*(p', p'') = \Gamma^{**}(p', p'') + \sum_i \left(\int_J \mathfrak{g}_i(p)\, \Gamma^{**}(p, p')\, dp \times \mathfrak{g}_i(p'') \right) \quad ..$$

симметричен. Горизонтальные векторы $\Gamma_*(p, p')$, рассматриваемые как функции от p', а также вертикальные векторы, рассматриваемые как функции от p, являются статическими полями. Введя

$$\int_J \mathfrak{g}_i(p)\, \Gamma^{**}(p, p')\, dp = \mathfrak{a}_i^*(p'),$$

получим следующие граничные условия для $\Gamma_*(p, p')$:

$$\Gamma_*(o, p') = \sum_i (\mathfrak{a}_i^*(o) \times \mathfrak{g}_i(p')).$$

Может показаться, что при этом мы всего лишь вернулись к формуле (*). Новое, однако, состоит в том, что тензор Γ_* в отличие от Γ^* симметричен. Если устремить точку p' к точке границы $o' \neq o$, то из симметрии Γ_* вытекает формула

$$\sum_i (\mathfrak{a}_i^*(o) \times \mathfrak{g}_i(o')) = \sum_i (\mathfrak{g}_i(o) \times \mathfrak{a}_i^*(o')). \tag{14}$$

Именно в этом месте мы воспользуемся тем, что однородная задача I имеет только нулевое решение. Из отсутствия нетривиальных решений следует, что m функций $\mathfrak{g}_i(o)$ линейно независимы. Действительно, допустим, что некоторая их линейная комбинация тождественно равна нулю на поверхности $\mathfrak{O}$. Тогда соответствующая линейная комбинация функций $\mathfrak{g}_i(p)$ тождественно обращалась бы в нуль в области J, что противоречит построению $\mathfrak{g}_i(p)$. Из формулы (14) и из линейной независимости $\mathfrak{g}_i(o)$ следует, что $\mathfrak{a}_i^*(o)$ являются линейными комбинациями функций $\mathfrak{g}_i(o)$

$$\mathfrak{a}_i^*(o) = \sum_k c_{ki}\mathfrak{g}_k(o) \qquad (k, i = 1, 2, \ldots, m)$$

с симметричными постоянными коэффициентами $c_{ik} = c_{ki}$. Итак, искомая функция Грина Γ_{I} с граничными условиями 0[14] задается формулой

$$\Gamma(p, p') = \Gamma_*(p, p') - \sum_{i,k=1}^{m} c_{ik}(\mathfrak{g}_i(p) \times \mathfrak{g}_k(p')).$$

Теперь снова предположим, что интегральное уравнение (13) не имеет никаких других решений, кроме тривиального. Тогда против доказательства симметрии тензора $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{I}}$, намеченного на с. 18, можно выдвинуть следующее возражение: доказательство предполагало, что величина $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S}_n = \frac{a}{a+b}(\mathfrak{P}_n(\mathfrak{u}) + b \operatorname{div} \mathfrak{u}),$$

$$\mathfrak{S}_t = \frac{1}{a+b}(a\mathfrak{P}_t(\mathfrak{u}) + b^2 [\operatorname{rot} \mathfrak{u}, \mathfrak{n}]),$$

[14] Ср. приведенную здесь аргументацию с аргументацией в работе Е. Е. Леви (с. 11—14), процитированной в примеч. 7, а также с работой Гильберта: Grundzüge einer allgemeinen Theorie die linearen Integralgleichungen. Leipzig: Teubner, 1912, S. 227—232.

в которую вместо $\mathfrak{u}$ подставлен каждый из трех вертикальных векторов тензора Γ_{I} и которая требует для своего определения однократной *дифференцируемости*, существует на поверхности. Предположим на мгновение без доказательства, что так оно и есть, и будем считать, что векторы $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$, $\mathfrak{S}_z$, соответствующие трем вертикальным столбцам $\mathfrak{u}$ тензора Γ_{I}, являются вертикальными столбцами тензора $\Sigma\ (o, p')$. Применяя равенство (D′), в котором в качестве области интегрирования рассматривается область J, из которой вырезан бесконечно малый шар, содержащий точку p', и в котором вместо $\mathfrak{v}$ подставляется поочередно каждый из трех вертикальных векторов Γ_{I}, получаем, что решение задачи I задается формулой

$$4\pi\mathfrak{u}(p) = \int_{\mathfrak{O}} \Sigma(o, p)\,\mathfrak{u}(o)\,do.$$

С другой стороны, решение этой задачи уже получено в виде

$$2\pi\mathfrak{u}(p) = \int_{\mathfrak{O}} \Theta(p, o)\,\mathfrak{u}(o)\,do, \tag{15}$$

где

$$\Theta(p, o) = \Lambda(p, o) - \int_{\mathfrak{O}} \Lambda(p, o')\,\overline{\Lambda}(o', o)\,do' \qquad [10]. \tag{16}$$

Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\Sigma\ (o,\ p) = 2\Theta\ (p,\ o). \tag{17}$$

Итак, предположив, что Σ существует, мы смогли вычислить его значение ($= 2\Theta$). Поэтому кажется правдоподобным, что, изменив порядок этих рассуждений, можно получить равенство (17) без предположения о существовании Σ. Это можно сделать примерно так:

По построению

$$A(p, p') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{O}} \Theta(p, o)\,P(o, p')\,do. \tag{18}$$

Следовательно, каждая горизонтальная строка $A\ (p,\ p')$, рассматриваемая как функция от p', является статическим полем. Поэтому должно выполняться

$$A(p, p') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{O}} A(p, o')\,\Theta(p', o')\,do'.$$

В результате получим формулу

$$4\pi^2 A(p, p') = \int_{\mathfrak{O}}\int_{\mathfrak{O}} \Theta(p, o)\,P(o, o')\,\Theta(p', o')\,do\,do',$$

из которой непосредственно видно, что тензор A симметричен. Поэтому можно написать равенство

$$\Gamma(p, p') = P(p, p') - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{o}} P(p, o)\,\Theta(p', o)\,do,$$

из которого уже вытекает существование $\Sigma(o, p')$. Нетрудно увидеть, как нужно модифицировать эти рассуждения в том случае, когда однородное интегральное уравнение (13) имеет нетривиальные решения. Для рассматриваемых ниже краевых задач естественно должны возникнуть подобного рода возражения против существования на поверхности определенных величин. Эти возражения без труда можно обойти с помощью аналогичных перестановок в доказательстве. Я не буду останавливаться на том, какие модификации могут понадобиться (вследствие разрешимости однородного интегрального уравнения) в каждой из рассматриваемых ниже задач, поскольку считаю, что с помощью приведенных выше рассуждений с этим вопросом также покончено, а мне не хотелось бы (в этой, по существу, подготовительной главе) погрязнуть в деталях.

Я только позволю себе указать еще на один момент. Можно сказать, что неразрешимость однородной задачи I:

$$\Delta^*\mathfrak{u} = 0 \text{ в } J; \quad \mathfrak{u} = 0 \text{ на поверхности}$$

была бы обоснована, если бы было выполнено предположение о том, что построенное выше выражение $\mathfrak{S}$ ограничено на поверхности. У нас нет необходимости обсуждать, в какой мере можно было бы освободиться от этого предположения; достаточно заметить, что в том единственном месте, где мы пользовались неразрешимостью однородной задачи — а именно там, где мы доказывали линейную независимость $\mathfrak{g}_i(o)$ — на самом деле речь шла о функциях $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_i(p)$, для которых выражение $\mathfrak{S}$ на поверхности $\mathfrak{O}$ существует и непрерывно.

§ 3. Решение второй краевой задачи

Перейдем к задаче II:

$$\Delta^*\mathfrak{u} = -4\pi\mathfrak{f} \text{ в } J,$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0; \quad \mathfrak{u}_t = 0 \text{ на поверхности } \mathfrak{O}.$$

В случае, когда объем J ограничен связной поверхностью, что фактически (исключительно ради простоты) будет предполагаться, соответствующая однородная задача не имеет никаких других решений, кроме $\mathfrak{u} = 0$. Действительно, из (C_0) вытекает, что решение однородной задачи удовлетворяет в области J тождествам

$$\operatorname{rot}\mathfrak{u} = 0, \quad \operatorname{div}\mathfrak{u} = 0.$$

Если положить $\mathfrak{u}$ тождественно равным нулю вне J, то $\mathfrak{u}$ станет безвихревым во всем пространстве, и, кроме того, в силу условия $\mathfrak{u}_t = 0$ на $\mathfrak{O}$ не будет поверхностного вихря. Следовательно,

$$\mathfrak{u} = \operatorname{grad}\varphi, \quad \Delta\varphi = 0.$$

Из граничных условий $\mathfrak{u}_t = 0$ следует, что функция φ постоянна на $\mathfrak{O}$ (производная от φ по касательным направлениям всюду равна 0); значит, φ постоянна во всей области J, и, следовательно, $\mathfrak{u} = 0$. Этот результат есть не что иное,

как известное утверждение об отсутствии электростатического поля внутри проводника [15].

Подстановка для решения неоднородной задачи:

$$\mathfrak{u}(p) = \int_J \Gamma_{II}(p, p')\, \mathfrak{f}(p')\, dp', \qquad \Gamma_{II} = P - A_{II}.$$

Для того чтобы найти вертикальные столбцы $A = A_{II}$, нужно переформулировать задачу следующим образом: *найти статическое поле* $\mathfrak{u}$ *в* J; *если на поверхности известны* $\operatorname{div}\mathfrak{u}$ *и* $\mathfrak{u}_t$. Правильный способ рассуждения состоит в применении формулы (C). Используя скалярную величину $s(o)$ и вектор $\mathfrak{e}(o)$, построим выражение

$$-au_n\, s(o) + b \operatorname{rot}\mathfrak{u}\,[\mathfrak{n}, \mathfrak{e}],$$

в которое вместо $\mathfrak{u}$ поочередно подставим три вертикальных вектора $P\ (p, p')$. Введя таким же образом, как и раньше (с. 17), прямоугольную систему координат x, y, z с началом в точке o, получим

$$-\left(\frac{a+b}{2br} + \frac{a-b}{2b}\frac{x^2}{r^3}\right)s - \frac{y}{r^3}e_y - \frac{z}{r^3}e_z,$$

$$-\frac{a-b}{2b}\frac{xy}{r^3}s + \frac{x}{r^3}e_y,$$

$$-\frac{a-b}{2b}\frac{xz}{r^3}s + \frac{x}{r^3}e_z.$$

Точка (x, y, z) будет теперь обозначаться через p, а не через p'. Вычисленная относительно точки p дивергенция вектора, компоненты которого имеют приведенный выше вид, равна

$$\frac{x}{r^3}s(o).$$

Сам же этот вектор может быть записан следующим образом:

$$-\frac{(a+b)}{2br}\mathfrak{n}s - \frac{(a-b)}{2b}\frac{\cos\vartheta}{r^2}\mathfrak{r}s + \frac{\cos\vartheta}{r^2}\mathfrak{e} - \frac{\mathfrak{n}}{r^3}(\mathfrak{r}\mathfrak{e}),$$

и, следовательно, наша подстановка дает

$$2\pi\mathfrak{u}(p) = -\int_{\mathfrak{O}}\left(\frac{a+b}{2br_{po}}s(o) + \frac{(\mathfrak{r}_{po}\mathfrak{e}(o))}{r_{po}^3}\right)\mathfrak{n}(o)\,do + \\ + \int_{\mathfrak{O}}\frac{\cos\vartheta_{po}}{r_{po}^2}\left(\mathfrak{e}(o) - \frac{a-b}{2b}\mathfrak{r}_{po}s(o)\right)do. \qquad (19)$$

Отсюда получается

$$(\operatorname{div}\mathfrak{u})_0 = s(o) + \frac{1}{2\pi}\frac{\cos\vartheta_{oo'}}{r_{oo'}^2}s(o')\,do'. \qquad (20)$$

[15] Если $\mathfrak{O}$ состоит из $h+1$ связной компоненты, то однородная задача имеет ровно h линейно независимых решений. Ср. цитированную в примеч. 7 работу d (с. 184, 188—191) [11].

Из этого равенства, как известно, однозначно находится $s\,(o)$ и с его помощью определяется

$$4\pi b\mathfrak{v}(o)=(a+b)\int\limits_{\mathfrak{O}}\frac{1}{r_{oo'}}\,\mathfrak{n}(o')\,s(o')\,do'+(a-b)\int\limits_{\mathfrak{O}}\frac{\cos\vartheta_{oo'}}{r^2_{oo'}}\,\mathfrak{r}_{oo'}\,s(o')\,do'. \qquad (21)$$

Для того чтобы выписать интегральное уравнение, которому удовлетворяет $\mathfrak{e}\,(o)$, представим проекцию $\mathfrak{a}_t$ каждого вектора $\mathfrak{a}\,(o)$ в виде

$$\mathfrak{a}\,(o)-\mathfrak{n}\,(o)\;(\mathfrak{a}\,(o)\,\mathfrak{n}\,(o)).$$

Введем вектор

$$\mathfrak{n}\,(o')-\mathfrak{n}\,(o)\,(\mathfrak{n}\,(o)\,\mathfrak{n}\,(o'))=\mathfrak{n}_{oo'}$$

(который при $o=o'$ обращается в нуль) и тензор

$$\Lambda_{\text{II}}=\Lambda\,(o,o')=\frac{\cos\vartheta_{oo'}}{r^2_{oo'}}\{E-\mathfrak{n}\,(o)\times\mathfrak{n}\,(o)\}-\frac{\mathfrak{n}_{oo'}\times\mathfrak{r}_{oo'}}{r^3_{oo'}}. \qquad (22)$$

Тогда искомое уравнение имеет вид

$$\mathfrak{e}_t\,(o)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}}\Lambda\,(o,o')\,\mathfrak{e}\,(o')\,do'=\mathfrak{u}_t\,(o)+\mathfrak{v}_t\,(o). \qquad (23)$$

Произведение $\Lambda\,(o,\,o')\,\mathfrak{e}\,(o')$ зависит только от $\mathfrak{e}_t\,(o')$ (что вполне естественно для нашего подхода). По построению должно выполняться не только

$$\Lambda\,(o,\;o')\;\mathfrak{n}\,(o')=0,$$

но и

$$\mathfrak{n}\,(o)\;\Lambda\;(o,\;o')=0.$$

Поэтому $\mathfrak{e}$ можно определить из уравнения

$$\mathfrak{e}\,(o)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}}\Lambda\,(o,o')\,\mathfrak{e}\,(o')\,do'=\mathfrak{a}\,(o)+\mathfrak{v}\,(o), \qquad (24)$$

в котором вместо $\mathfrak{a}\,(o)$ подставлено любое векторное поле на поверхности, удовлетворяющее условию $\mathfrak{a}_t=\mathfrak{u}_t$.

Мы не можем исключить возможность того, что однородное уравнение

$$\mathfrak{e}\,(o)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}}\Lambda\,(o,o')\,\mathfrak{e}\,(o')\,do'=0 \qquad (25)$$

имеет нетривиальные решения. Эта возможность осуществляется, например, в случае, когда тело J — тор. Однако, как мы знаем, наличие нетривиальных решений не препятствует построению тензора $\Gamma=\Gamma_{\text{II}}$ с помощью неоднородного уравнения. Так же как и раньше, из формулы (С′) следует, что этот тензор симметричен при взаимной замене источника и приемника.

Поскольку вертикальные векторы $\Gamma_{\text{II}}\,(p,\,p')$, рассматриваемые как функции от p, в точках поверхности направлены по нормали, тензор $\Gamma_{\text{II}}\,(o,\,p')$ должен иметь вид

$$\Gamma_{\text{II}}\,(o,\;p')=\mathfrak{n}\,(o)\times\mathfrak{g}\,(o,\;p').$$

Поставим задачу: найти статическое поле, которое на границе направлено по нормали и для которого на поверхности задана дивергенция $\operatorname{div} \mathfrak{u} = l(o)$. Применяя формулу (C′) (в которой в качестве области интегрирования рассматривается область J, из которой вырезан бесконечно малый шар, содержащий точку p') к вектору $\mathfrak{u}$ и к каждому из трех вертикальных векторов Γ_{II}, получим, что решение этой задачи должно иметь следующий вид:

$$-4\pi \mathfrak{u}(p) = \int\limits_{\mathfrak{O}} \mathfrak{g}(o, p)\, l(o)\, do. \tag{26}$$

С другой стороны, из приведенного выше доказательства возможности построения $\mathfrak{g}$ без использования тензора Γ_{II} непосредственно вытекает, по крайней мере в предположении неразрешимости однородного уравнения (25), что всегда найдется такой вектор $\mathfrak{g}$, что решение поставленной задачи может быть представлено в виде (26). Столбцы тензора

$$B_{\text{II}}(p, p') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathfrak{O}} \Theta(p, o)(\mathfrak{n}(o) \times \mathfrak{g}(o, p'))\, do =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathfrak{O}} (\Theta(p, o)\, \mathfrak{n}(o)) \times \mathfrak{g}(o, p')\, do, \tag{27}$$

рассматриваемые как функции p, являются регулярными статическими полями (в том числе и в точке p'), при этом

$$B_{\text{II}}(o, p') = \mathfrak{n}(o) \times \mathfrak{g}(o, p').$$

Последним двум свойствам удовлетворяет также и тензор $\Gamma_{\text{II}} - \Gamma_{\text{I}}$, отсюда следует, что

$$B_{\text{II}} = \Gamma_{\text{II}} - \Gamma_{\text{I}}, \qquad \Gamma_{\text{II}} = \Gamma_{\text{I}} + B_{\text{II}}.$$

Разумеется, можно непосредственно проверить, что последняя формула действительно определяет тензор Γ_{II} с требуемыми свойствами.

Проследив, каким именно образом постоянные a и b входят в тензор $\Gamma = \Gamma_{\text{II}}$, можно показать, что

$$\Gamma = \frac{1}{a}\Gamma_a + \frac{1}{b}\Gamma_b, \tag{28}$$

где Γ_a и Γ_b не зависят от постоянных a и b. Мы хотим показать, *что каждый из вертикальных векторов* Γ_a *образует безвихревое поле, а каждый из вертикальных векторов* Γ_b *— соленоидальное и что*

$$\Gamma_a\Gamma_b = 0, \quad \Gamma_b\Gamma_a = 0,$$

где композиция ядер осуществляется обычным образом:

$$\Gamma_a\Gamma_b(p, p') = \int\limits_J \Gamma_a(p, p'')\, \Gamma_b(p'', p')\, dp''.$$

Действительно, решение задачи II имеет вид

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{a}\mathfrak{u}_a + \frac{1}{b}\mathfrak{u}_b = \frac{1}{a}\int\limits_J \Gamma_a(p, p')\, \mathfrak{f}(p')\, dp' + \frac{1}{b}\int\limits_J \Gamma_b(p, p')\, \mathfrak{f}(p')\, dp', \tag{29}$$

где $\mathfrak{u}_a$ и $\mathfrak{u}_b$ не зависят от констант упругости. Беря дивергенцию от обеих частей равенства $\Delta^*\mathfrak{u} = -4\pi\mathfrak{f}$, получим

$$a\Delta(\operatorname{div}\mathfrak{u}) = -4\pi \operatorname{div}\mathfrak{f}. \tag{30}$$

Отсюда, принимая во внимание граничное условие $\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0$, выводим независимость дивергенции $\mathfrak{u}$ от постоянной b. Стало быть, должно выполняться соотношение

$$\operatorname{div}\mathfrak{u}_b = 0,$$

что и доказывает соленоидальность вертикальных векторов Γ_b. Далее из (30) следует, что если $\operatorname{div}\mathfrak{f}$ тождественно равна 0, то $\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0$, и исходное уравнение может быть записано в виде

$$\Delta\mathfrak{u} = -4\pi b\mathfrak{f}.$$

Поскольку это дифференциальное уравнение с рассматриваемым краевым условием однозначно разрешимо, то $\mathfrak{u}$ зависит только от b; тем самым, в случае когда $\operatorname{div}\mathfrak{f} = 0$, имеет место

$$\int_J \Gamma_a(p, p')\,\mathfrak{f}(p')\,dp' = 0. \tag{31}$$

Применив последний результат к $\mathfrak{f} = \mathfrak{u}_b$, получим

$$\Gamma_a\Gamma_b = 0.$$

В силу симметрии Γ_a и Γ_b имеем также, что $\Gamma_b\Gamma_a = 0$. Тем самым обе составляющие вектора $\mathfrak{u}$, Γ_a и Γ_b, взаимно ортогональны. Применив теорему Гаусса

$$\int_J \operatorname{div}\mathfrak{w}\,dp = -\int_{\mathfrak{O}} w_n\,do$$

к $\mathfrak{w} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, где $\mathfrak{a}$ в точках поверхности направлено по нормали, получим

$$\int_J [\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\operatorname{rot}\mathfrak{a}]\,dp = 0.$$

Если в равенстве (31) в качестве $\mathfrak{b}$ взять $\mathfrak{f} = \operatorname{rot}\mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b}$ — произвольный вектор, а в качестве $\mathfrak{a}$ одну из трех горизонтальных строк тензора Γ_a, то с учетом последнего равенства (в котором интегрирование производится по p', а не по p) получаем, что $\operatorname{rot}\mathfrak{a}$, взятый по p', обращается в нуль. Отсюда в силу симметрии следует, что каждый из трех вертикальных векторов Γ_a, рассматриваемый как функция от p, образует безвихревое поле; или, другими словами,

$$\operatorname{rot}\mathfrak{u}_a = 0.$$

Если, кроме того, $\mathfrak{u}_a$ на границе направлено по нормали, то $\mathfrak{u}_a$ есть градиент некоторого скалярного поля φ_a, принимающего на поверхности постоянное значение. Поэтому можно считать, что φ_a на поверхности равна нулю. Равенство (30) переходит в следующее:

$$\Delta\Delta\varphi_a = -4\pi \operatorname{div}\mathfrak{f},$$

где φ_a и $\Delta\varphi_a$ обращаются в нуль на поверхности.

Обозначим через G обычную функцию Грина, а через GG ее итерацию:

$$GG(p, p') = \int_J G(p, p'') G(p'', p') \, dp''.$$

Тогда имеем

$$-4\pi\varphi_a(p) = \int_J GG(p, p') \operatorname{div} \mathfrak{f}(p') \, dp'.$$

Пусть x, y, z — координаты точки p, x', y', z' — координаты точки p'. Введем тензор

$$H = \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} GG & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} GG & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z'} GG \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x'} GG & \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} GG & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z'} GG \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x'} GG & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y'} GG & \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} GG \end{Vmatrix},$$

который естественно было бы обозначить через

$$\operatorname{grad}_p \operatorname{grad}_{p'} GG(p, p').$$

Тогда оказывается, что

$$4\pi\mathfrak{u}_a(p) = \int_J H(p, p') f(p') \, dp',$$

и тем самым $4\pi\Gamma_a$ совпадает с тензором H:

$$\Gamma_a = \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_p \operatorname{grad}_{p'} GG(p, p'). \tag{32}$$

Собственно говоря, с помощью приведенного выше метода мы нашли также и тензор Γ_b. Поскольку этот тензор не зависит от a, b, для его отыскания можно, например, положить $a = b = 1$. *Таким образом восстанавливается связь теории упругости с теорией потенциала.* Естественно, что возможность разложения (28) основывается на особом виде краевых условий II и никоим образом не может быть перенесена на задачи I и III.

§ 4. Решение третьей краевой задачи

Для того чтобы задача III

$$\Delta^*\mathfrak{u} = -4\pi\mathfrak{f} \text{ в } J, \quad \mathfrak{P} = 0 \text{ на } \mathfrak{O}$$

была разрешима, необходимо, чтобы тело J, рассматриваемое как твердое тело, находилось в равновесии под действием поля сил $\mathfrak{f}$; это требование записывается в виде шести линейных интегральных уравнений на функцию $\mathfrak{f}$. Для удобства мы будем пользоваться прямоугольной системой координат с началом в центре тяжести тела (плотность равна 1) и осями координат, совпадающими с главными осями инерции в центре тяжести. Тогда соответствующая одно-

родная задача имеет 6 следующих решений:

$$\mathfrak{a}_1=\left(\frac{1}{M},0,0\right),\qquad \mathfrak{a}_2=\left(0,\frac{1}{M},0\right),\qquad \mathfrak{a}_3=\left(0,0,\frac{1}{M}\right),$$

$$\mathfrak{a}_4=\left(0,\frac{z}{R},-\frac{y}{R}\right),\qquad \mathfrak{a}_5=\left(-\frac{z}{S},0,\frac{x}{S}\right),\qquad \mathfrak{a}_6=\left(\frac{y}{T},-\frac{x}{T},0\right),$$

где M — масса тела, а R^2, S^2, T^2 — три главных момента инерции. В силу специального выбора системы координат эти 6 векторов взаимно ортогональны и нормированы:

$$\int\limits_J \mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j\,dp=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}\qquad (i,j=1,2,3,4,5,6).$$

Если в равенстве (B) в качестве $\mathfrak{u}$ взять один из векторов $\mathfrak{a}_i$, а в качестве $\mathfrak{v}$ искомое решение $\mathfrak{u}$ задачи III, то получится

$$\int\limits_J \mathfrak{f}\mathfrak{a}_i\,dp=0, \tag{33}$$

как это и утверждалось. С другой стороны, решение задачи III однозначно определить нельзя, поскольку к $\mathfrak{u}$ можно прибавить (без нарушения уравнений III) произвольную линейную комбинацию $\mathfrak{a}_i$; и только добавление нормирующих равенств

$$\int\limits_J \mathfrak{u}\mathfrak{a}_i\,dp=0\qquad (i=1,2,\ldots,6) \tag{34}$$

позволяет определить решение однозначно.

Итак, наша цель состоит в том, чтобы *при выполнении условий* (33) *найти решение задачи III, удовлетворяющее нермирующим равенствам* (34). Формула (B_0) гарантирует нам, что у однородной задачи, кроме линейных комбинаций $\mathfrak{a}_i$, никаких других решений нет. Разумеется, мы теперь предполагаем, что выполнено обязательное для любого упругого тела неравенство $3a>4b>>0$. Как и прежде, будем искать решение только что сформулированной задачи в виде интеграла

$$\mathfrak{u}(p)=\int\limits_J \Gamma(p,p')\,\mathfrak{f}(p')\,dp'$$

с новым тензором Грина $\Gamma=\Gamma_{\mathrm{III}}$, который надо определить. Для того чтобы P, сохраняя свою симметрию, стало ортогональным к $\mathfrak{a}_i$, заменим P на $\dot{P}$:

$$\begin{aligned}\dot{P}(p,p')=P(p,p')-\sum_{i=1}^{6}\mathfrak{a}_i(p)\times\int\limits_J \mathfrak{a}_i(p'')\,P(p'',p')\,dp''-\\ -\sum_{i=1}^{6}\int\limits_J P(p,p'')\,\mathfrak{a}_i(p'')\,dp''\times\mathfrak{a}_i(p')+\\ +\sum_{i,j=1}^{6}\mathfrak{a}_i(p)\times\mathfrak{a}_j(p')\int\limits_J\int\limits_J \mathfrak{a}_i(p)\,P(p,p')\,\mathfrak{a}_j(p')\,dp\,dp'.\end{aligned} \tag{35}$$

Вертикальные векторы $\dot{P}$, рассматриваемые как функции от p, удовлетворяют уже не уравнению $\Delta^*\dot{P} = 0$, а уравнению

$$\Delta^*\dot{P} = 4\pi \sum_{i=1}^{6} \mathfrak{a}_i(p)\,\mathfrak{a}_i(p'),$$

где оператор Δ^* действует на переменную p. Используем подстановку

$$\Gamma_{\text{III}} = \dot{P} - A_{\text{III}}$$

и ищем вертикальные векторы

$$\mathfrak{u}(p) = \mathfrak{A}_x(p, p'),\ \mathfrak{A}_y(p, p'),\ \mathfrak{A}_z(p, p')$$

тензора $A = A_{\text{III}}$ как такие статические поля $\mathfrak{u}$, для которых $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$ принимает на поверхности соответственно те же значения, что и для векторов

$$\mathfrak{u} = \dot{\mathfrak{R}}_x(p, p'),\quad \dot{\mathfrak{R}}_y(p, p'),\quad \dot{\mathfrak{R}}_z(p, p').$$

Эта задача

$$\Delta^*\mathfrak{u} = 0 \text{ в } J,\ \mathfrak{P}(\mathfrak{u}) = \text{заданному вектору } \mathfrak{p}(o), \tag{36}$$

на $\mathfrak{O}$ разрешима только при условии

$$\int\limits_{\mathfrak{O}} \mathfrak{p}(o)\mathfrak{a}_i(o)\,do = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Доказательство этого факта проводится на основе формулы (B), в которой вместо $\mathfrak{u}$ берется $\mathfrak{v}_i$, а вместо $\mathfrak{v}$ — решение $\mathfrak{u}$ задачи (36). Но те три вектора $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_x(o, p'),\ \mathfrak{p}_y(o, p'),\ \mathfrak{p}_z(o, p')$, которые являются краевыми условиями в задаче нахождения вертикальных векторов A_{III}, действительно удовлетворяют только что выписанным линейным интегральным уравнениям. Это можно показать с помощью формулы (B), в которую вместо $\mathfrak{u}$ подставляется $\mathfrak{a}_i$, а вместо $\mathfrak{v}$ — каждый из трех вертикальных векторов $\dot{P}$ и в которой в качестве области интегрирования рассматривается область J, из которой вырезан бесконечно малый шар, содержащий точку p'. Именно для того чтобы выполнялись эти условия, мы и заменили P на $\dot{P}$.

Напрашивающаяся подстановка

$$\mathfrak{u}(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}} P(p, o)\,\mathfrak{e}(o)\,do, \tag{37}$$

как следует из § 2, непригодна, поскольку она не приводит ни к какому регулярному интегральному уравнению для определения неизвестной величины $\mathfrak{e}(o)$.

Выражение (37) будем называть потенциалом простого слоя, порожденным полем $\mathfrak{e}(o)$. Наряду с потенциалом простого слоя определим «антенный потенциал». Для этого рассмотрим произвольную точку o на поверхности и внешнюю нормаль в этой точке. Предположим, что эта нормаль, продолженная до бесконечности, не пересекается с телом. Введем прямоугольную систему координат xyz с началом в точке o и с осью ox, направленной по внутренней норма-

ли к поверхности. Рассмотрим далее функцию

$$V = x \lg (r + x) - r$$

и ее производные

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lg (r + x), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{y}{r + x}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{z}{r + x},$$

$\partial V/\partial x$ — это потенциал электростатического поля равномерно заряженной антенны, которая совпадает с внешней нормалью; $\partial V/\partial y$ — потенциал поля «двойной антенны», которая получается следующим образом: устремим к отрицательной оси ox две равномерно заряженные зарядом противоположного знака антенны, исходящие из точки o и лежащие в плоскости xy, симметрично относительно оси ox; при этом предельном переходе предполагается, что плотность заряда на обеих антеннах синхронно растет, но так, что поле остается конечным [12]. Таким образом, сама V является гармонической функцией (что легко можно проверить непосредственным вычислением). Построим с ее помощью тензор

$$Y(p, o) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{matrix} \right\|,$$

где $p = (x, y, z)$. Дивергенция каждого столбца η матрицы Y, очевидно, равна нулю, и, кроме того, поскольку речь идет о гармонических функциях, для каждого столбца выполняется равенство $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \eta = 0$, и, следовательно, $\Delta^* \eta = 0$. Строя соответствующие полям смещения η векторы давления $\mathfrak{P}(\eta)$, действующего на элемент поверхности, параллельный плоскости y, z, и используя при вычислениях равенство

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{r},$$

получим

$$\frac{1}{b} \mathfrak{P}(\eta_x) = \left(2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{1}{b} \mathfrak{P}(\eta_y) = \left(-2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}, \quad -\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial z^2}, 0\right),$$

$$\left\{= 2 \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}\right\}.$$

Аналогично выписывается выражение для $\mathfrak{P}(\eta_z)$. Тензор, составленный из этих трех векторов давления, имеет вид:

$$-2b \left\| \begin{matrix} \frac{x}{r^3} & -\frac{y}{r^3} & -\frac{z}{r^3} \\ \frac{y}{r^3} & \frac{x}{r^3} & 0 \\ \frac{z}{r^3} & 0 & \frac{x}{r^3} \end{matrix} \right\|.$$

Вектор

$$\mathfrak{u}(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{O}} Y(p,o)\,\mathfrak{e}(o)\,do$$

будем называть «антенным потенциалом», порожденным полем $\mathfrak{e}(o)$. Его можно построить в случае, когда все внешние нормали пересекаются с телом J только в точках своих оснований (что, например, имеет место для выпуклых тел).

Для решения задачи (36) рассмотрим линейную комбинацию потенциала простого слоя и антенного потенциала, считая

$$\mathfrak{u}(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{O}} \Xi(p,o)\,\mathfrak{e}(o)\,do, \tag{38}$$

где

$$\Xi=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{2}Y-aP\right).$$

Ξ — есть не что иное, как впервые полученное Буссинеском[16] решение статической задачи теории упругости для полупространства, ограниченного касательной плоскостью в точке o, в случае, когда давление на границе этого полупространства равно нулю. Действительно, векторы давления, отвечающие столбцам матрицы Ξ, образуют тензор

$$\left\|\begin{matrix}\dfrac{3x^3}{r^5} & \dfrac{3x^2y}{r^5} & \dfrac{3x^2z}{r^5}\\[2mm] \dfrac{3x^2y}{r^5} & \dfrac{3xy^2}{r^5} & \dfrac{3xyz}{r^5}\\[2mm] \dfrac{3x^2z}{r^5} & \dfrac{3xyz}{r^5} & \dfrac{3xz^2}{r^5}\end{matrix}\right\|,$$

который обращается в нуль при $x=0$. Краевое условие для векторного поля (38)

$$\mathfrak{P}(u)=\mathfrak{p}(o)$$

приводит к интегральному уравнению

$$\mathfrak{e}(o)+\frac{1}{2\pi}\int \Lambda(o,o')\,\mathfrak{e}(o')\,do'=\mathfrak{p}(o), \tag{39}$$

ядро которого удовлетворяет неравенству[17]

$$|\Lambda(o,o')|\leqslant \mathrm{const}/r_{oo'}^{2-\alpha}.$$

Если предположение о том, что внешние нормали нигде не пересекаются с телом, нарушено, то наш подход можно модифицировать следующим образом: все антенны обрываются на некоторой постоянной высоте h, которая должна быть выбрана настолько малой, чтобы оборванные антенны не пересекались

[16] c., p. 13, not. 2.

[17] Абсолютная величина тензора Λ — $[\Lambda]$ есть корень из суммы квадратов его компонент.

более с телом J. Аналитическое оформление этой идеи может быть выполнено без труда.

В любом случае равенство (39) выполнено лишь тогда, когда

$$\int\limits_{\mathfrak{O}} \mathfrak{p}(o)\,\mathfrak{a}_i(o)\,do = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{40}$$

Таким образом, соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере 6 линейно независимых решений. Если оно не имеет никаких других решений, то условия (40) достаточны для разрешимости, и тем самым построение тензора Грина $\Gamma = \Gamma_{III}$ завершено. Но даже если бы однородное уравнение имело бы еще и другие решения (что невозможно, так как этот случай исключен с самого начала), то, как было показано в § 2, построение тензора Грина все равно было бы осуществимо. Применение оператора Δ^* по переменным $\mathfrak{p}$ к столбцам Γ_{III} дает равенство

$$\Delta^*\Gamma_{III} = 4\pi \sum_{i=1}^{6} \mathfrak{a}_i(p) \times \mathfrak{a}_i(p'). \tag{41}$$

Мы можем добиться того, чтобы выполнялись соотношения

$$\int\limits_{\mathfrak{O}} \mathfrak{a}_i(p)\,\Gamma_{III}(p, p')\,dp = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{42}$$

Из формул (41) и (42) с помощью формулы Бетти (B′) выводится симметрия тензора $\Gamma = \Gamma_{III}$.

Пусть тензор Γ_{III} существует. Тогда можно утверждать, что решение задачи (36), ортогональное всем функциям $\mathfrak{a}_i$, должно иметь вид

$$4\pi\mathfrak{u}(p) = -\int\limits_{\mathfrak{O}} \Gamma_{III}(o, p)\,\mathfrak{p}(o)\,do.$$

Доказательство этого факта легко получить, применяя формулу Бетти (B′) к $\mathfrak{u}$ и к каждому из трех вертикальных векторов Γ_{III}. Но раньше другим способом уже было показано (при предположении (40)) существование этого решения, которое было представлено в виде

$$2\pi\mathfrak{u}(p) = \int\limits_{\mathfrak{O}} Z(p, o)\,\mathfrak{p}(o)\,do.$$

Отсюда можно заключить, что появившийся здесь тензор Z должен (в существенном) совпасть с $-\Gamma_{III}/2$. Введем ядро $\dot{\Gamma}_I\,(p, p')$, которое получается из Γ_I таким же способом (35), каким $\dot{P}$ получалось из P. Тогда

$$\Gamma_{III} - \dot{\Gamma}_I = B_{III} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}} \Theta(p, o)\,Z(p', o)\,do \tag{43}$$

в существенном совпадают, точнее, они отличаются лишь выражением

$$\sum_{i,\,j=1}^{6} a_{ij}\mathfrak{a}_i(p) \times \mathfrak{a}_j(p')$$

с постоянными коэффициентами a_{ij}.

§ 5. Поведение компенсирующего тензора Грина на границе

В этом параграфе собраны оценки, которые понадобятся нам во второй главе для вывода асимптотического закона.

I.

$$\int\limits_{\mathfrak{O}} \frac{|\cos \vartheta_{po}|}{r_{po}^2}\, do \leqslant \text{const},$$

для всех точек p, лежащих внутри J. Выражение, стоящее под знаком интеграла, представляет собой телесный угол, под которым элемент поверхности do виден из точки p. Поэтому, например, для выпуклых поверхностей справедливость неравенства очевидна без дальнейших пояснений. Для того чтобы доказать его в общем случае, возьмем на поверхности точку o_1, расстояние которой до точки p минимально (тогда линия po_1 будет перпендикулярна к поверхности), и проведем в точке o_1 плоскость, касательную к поверхности. Далее рассматриваемый интеграл следует сравнить с тем, который из него получается, если переменная интегрирования o пробегает не данную поверхность, а построенную касательную плоскость.

II. *Если ядро $K(o, o')$ удовлетворяет неравенству*

$$|K(o, o')| \leqslant \text{const}/r_{oo'}^{2-\alpha} \qquad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

то такому же неравенству удовлетворяет и его резольвента.

Для ядер, получающихся итерированием, последовательно находим:

$$|K^m(o, o')| \leqslant \text{const}/r_{oo'}^{2-m\alpha} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Эта оценка верна до тех пор, пока степень $2 - m\alpha$ положительна. Поэтому существует индекс n, для которого

$$|K^m(o, o')| \leqslant \text{const}.$$

Тогда, как следует из теории Фредгольма, резольвента $\overline{K^n}$ ядра K^n тоже ограничена. Резольвента $\overline{K}$ исходного ядра K равна

$$(K + K^2 + \ldots + K^{n-1}) + (\overline{K^n} + \overline{K^n}K + \overline{K^n}K^2 + \ldots + \overline{K^n}K^{n-1}).$$

Отсюда вытекает справедливость нашего утверждения.

Ясно, как нужно дополнить эти рассуждения в случае, когда, вследствие разрешимости однородного интегрального уравнения, приходится иметь дело с модифицированным определением резольвенты.

III. *Если функция $f(p, o)$ обладает свойствами*

$$|f(p, o)| \leqslant \text{const}/r_{po}^2, \quad \int\limits_{\mathfrak{O}} |f(p, o)|\, do \leqslant \text{const}$$

и для функции $g(o, o')$ справедлива оценка

$$|g(o, o')| \leqslant \text{const}/(r_{oo'})^{2-\alpha},$$

то функция

$$F(p, o) = \int_{\mathfrak{O}} f(p, o')\, g(o', o)\, do' \tag{44}$$

удовлетворяет неравенству

$$|F(p, o)| \leqslant \text{const}/(r_{po})^{2-\alpha}.$$

Для доказательства разобьем поверхность $\mathfrak{O}$ (при заданных p и o) на две части: к части [1] отнесем те точки o', для которых $r_{o'o} \leqslant r_{po}/2$, к части [2] — все остальные. Поскольку для любого ε (> 0) интеграл $\int |g(o'o)|\, do'$, взятый по области, состоящей из тех точек o' поверхности, для которых $r_{o'o} \leqslant \varepsilon$, не превосходит

$$\text{const} \cdot \varepsilon^{\alpha},$$

интеграл F, взятый по части [1] поверхности (для точек которой $r_{po'} \geqslant r_{po}/2$), по абсолютной величине

$$\leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{2-\alpha}} \int_{\mathfrak{O}} |f(p, o')|\, do' \leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{2-\alpha}}.$$

Интеграл F, взятый по части [2] поверхности (для точек которой $r_{o'o} > r_{o'o}/2$), по абсолютной величине

$$\leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{2-\alpha}} \int_{\mathfrak{O}} |f(p, o')|\, do' \leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{2-\alpha}}.$$

IV. *Пусть в предложении III*

$$|f(p, o)| \leqslant \text{const}/r_{po},$$

тогда (*если* $\alpha < 1$)

$$|F(p, o)| \leqslant \text{const}/r_{po}^{1-\alpha}.$$

При доказательстве поверхность $\mathfrak{O}$ может быть заменена плоскостью; и в этом случае речь пойдет об оценке интеграла

$$F^*(p, o) = \int \frac{do'}{r_{po'}\,(r_{oo'})^{2-\alpha}},$$

в котором интегрирование распространено на всю плоскость. Пусть o_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки p на плоскость.

Если $r_{po_1} \leqslant 2r_{oo'}$, и следовательно, $r_{po} \leqslant \sqrt{5}\, r_{oo_1}$, то

$$|F^*| \leqslant \int \frac{do'}{r_{o_1o'}\,(r_{oo'})^{2-\alpha}} = \frac{\text{const}}{(r_{oo_1})^{1-\alpha}} \leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{1-\alpha}}.$$

Если же $r_{oo_1} < \frac{1}{2} r_{po_1}$ и, следовательно, $r_{po} < \frac{\sqrt{5}}{4} r_{po_1}$, то для доказательства рассмотрим круг $\mathfrak{K}$ с центром в точке o_1:

$$r_{o_1o'} \leqslant r_{po_1},$$

который содержится в круге

$$r_{oo_1} \leqslant \frac{3}{2} r_{po_1}.$$

Интегрируем сначала только в $\mathfrak{K}$, получаем величину

$$\leqslant \frac{1}{r_{po_1}} \int_{\mathfrak{K}} \frac{do'}{r_{oo'}^{2-\alpha}} \leqslant \frac{1}{r_{po_1}} \frac{2\pi}{\alpha} \left(\frac{3}{2} r_{po_1} \right)^{\alpha} \leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{1-\alpha}}.$$

Для всех точек вне $\mathfrak{K}$ имеем $r_{o_1o'} \geqslant 2r_{oo'}/3$, и, следовательно, интеграл по дополнению к $\mathfrak{K}$

$$\leqslant \frac{3}{2} \int \frac{do'}{(r_{oo'})^{2-\alpha}} \leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{1-\alpha}} \qquad (r_{oo'} \geqslant r_{po_1}/2),$$

что и завершает доказательство.

V. *Если* $f(p, o)$ *удовлетверяет условиям*

$$|f(p,o)| \leqslant \text{const}/r_{po}^2, \qquad \int_{\mathfrak{O}} |f(p,o)|\, do \leqslant \text{const}$$

и

$$|g(o, p)| \leqslant \text{const}/r_{po},$$

то для

$$F(p, p') = \int_{\mathfrak{O}} f(p,o)\, g(o, p')\, do$$

справедлива оценка

$$F(pp') \leqslant \text{const}/R(p, p'),$$

где $R(pp')$ — *минимум функции* $r_{po} + r_{p'o}$ *по всем точкам* o, *лежащим на поверхности* $\mathfrak{O}$ (*иными словами* $R(pp')$ — *путь луча света из* p *в* p' *при однократном отражении от* $\mathfrak{O}$).

Положим $R(pp') = \varepsilon$ и разобъем $\mathfrak{O}$ на две части: к части [1] отнесем те точки o, для которых $r_{p'o} \leqslant \varepsilon/2$, для этих точек одновременно справедливо неравенство $r_{po} \geqslant \varepsilon/2$. Поскольку для каждого положительного значения ε интеграл

$$\int_{(r_{po} \leqslant \varepsilon)} \frac{do}{r_{po}} \leqslant \text{const} \cdot \varepsilon,$$

«const» означает здесь величину, независимую от p и ε, интеграл F, взятый по части [1], по абсолютной величине

$$\leqslant \frac{\text{const}}{\varepsilon^2} \int_{[1]} \frac{do}{r_{p'o}} \leqslant \frac{\text{const}}{\varepsilon}.$$

Интегрирование по оставшейся части поверхности, в которой $r_{p'o} > \varepsilon/2$, дает

$$\left| \int_{[2]} \right| \leqslant \frac{\text{const}}{\varepsilon} \int_{\mathfrak{O}} |f(p,o)|\, do \leqslant \frac{\text{const}}{\varepsilon}.$$

Перейдем к применению этих оценок к рассматриваемым задачам теории упругости. В § 2 было показано, что уравнение $\Delta^* \mathfrak{u} = 0$ с заданными граничными условиями $\mathfrak{u}(o)$ интегрируется в форме

$$\mathfrak{u}(p) = \int_{\mathfrak{O}} \Theta(p, o)\, \mathfrak{u}(o)\, do.$$

Задача была сведена к интегральному уравнению с ядром $\Lambda(o, o')$. Введенный там тензор $\Lambda(p, o)$ во избежание путаницы обозначим теперь через $\Lambda_{\mathrm{I}}(p, o)$. Тогда равенство (16) примет вид

$$\Theta(p, o) = \Lambda_{\mathrm{I}}(p, o) - \int_{\mathfrak{O}} \Lambda_{\mathrm{I}}(p, o')\, \overline{\Lambda}_{\mathrm{I}}(o', o)\, do'.$$

При этом

$$|\Lambda_{\mathrm{I}}(p, o)| \leqslant \mathrm{const}/r_{po}^2 \text{ и в силу I } \int_{\mathfrak{O}} |\Lambda_{\mathrm{I}}(p, o)|\, do \leqslant \mathrm{const}.$$

Отсюда, используя II и III, получаем

VI.

$$\Theta(p, o) \leqslant \mathrm{const}/r_{po}^2, \qquad \int_{\mathfrak{O}} |\Theta(p, o)|\, do \leqslant \mathrm{const}.$$

Компенсирующий тензор Грина A_{I} находится из равенства (18), и поэтому, применяя V, имеем

$$|A_{\mathrm{I}}(p, p')| \leqslant \mathrm{const}/R(p, p').$$

Перенесем теперь эту оценку на два других тензора A_{II} и A_{III}.

VII. *Компенсирующие тензоры Грина*

$$A = A_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{II}}, A_{\mathrm{III}}$$

удовлетворяют неравенству[18]

$$|A(p, p')| \leqslant \mathrm{const}/R(p, p').$$

Будем сначала говорить об A_{III}. Введенный в § 4 тензор $Z(p, o)$, совпадающий, как было выяснено, с $-\Gamma_{\mathrm{III}}(o, p)/2$, задавался формулой

$$Z(p, o) = \Xi(p, o) - \int_{\mathfrak{O}} \Xi(p, o')\, \overline{\Lambda}_{\mathrm{III}}(o', o)\, do',$$

в которой использованное ранее обозначение Λ ради четкости заменено на Λ_{III}[19]. Из II и VI следует, что

$$|Z(p, o)| \leqslant \mathrm{const}/r_{po}.$$

---

[18] Это неравенство означает, что A может уйти в бесконечность лишь тогда, когда обе точки p и p' стремятся к одной и той же точке границы J. Эта оценка для компенсирующего тензора Грина является, как мне кажется, естественной и в то же время сильнейшей из всех возможных.

[19] Что приводит к соответствующим переобозначениям и для резольвенты.

Тензор

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{O}}\Theta(p,o)\,Z(p',o)\,do,$$

в существенном совпадающий с $\Gamma_{III}-\dot{\Gamma}_{I}=B_{III}$, в соответствии с V по абсолютной величине $\leqslant \mathrm{const}/R\ (p,\ p')$, и тем самым нужная нам оценка для A_{III} установлена.

При перенесении этой оценки на обсуждавшуюся в § 3 задачу $\Delta^*\mathfrak{u}=0$ в J; $\mathfrak{u}_t=0$, $\operatorname{div}\mathfrak{u}=l\,(o)$ на $\mathfrak{O}$, решение которой было получено в виде

$$-4\pi\mathfrak{u}(p)=\int_{\mathfrak{O}}\mathfrak{g}(o,p)\,l(o)\,do,$$

возникает определенная трудность. Выразим $\mathfrak{u}\,(p)$ через функцию $s\,(o)$, получаемую из формулы (20), а не через $l\,(o)=\operatorname{div}\mathfrak{u}\,|_0$. Определяя $\mathfrak{v}\,(o)$ из формулы (21) и затем $\mathfrak{e}\,(o)$ из уравнения (24), в котором отброшен член $\mathfrak{a}\,(o)$, получаем

$$\mathfrak{e}(o)=\int_{\mathfrak{O}}\mathfrak{h}(o,o')\,s(o')\,do',$$

где вектор $\mathfrak{h}$ удовлетворяет неравенству

$$|\,\mathfrak{h}\,(o,\ o')\,|\leqslant \mathrm{const}/r_{oo'}.$$

Подставляя эти величины в (19), получим выражение

$$2\pi\mathfrak{u}(p)=\int_{\mathfrak{O}}\mathfrak{j}\,(p,o)\,s(o)\,do.$$

При этом в $\mathfrak{j}\,(p,\ o)$ входят следующие члены:

$$-\frac{a+b}{2b}\,\frac{1}{r_{po}}\,\mathfrak{n}(o),\qquad -\frac{a-a}{2b}\,\frac{\cos\vartheta_{po}}{r_{po}^2}\,\mathfrak{r}_{po},\qquad \int_{\mathfrak{O}}\frac{\cos\vartheta_{po'}}{r_{po'}^2}\,\mathfrak{h}(o',o)\,do'.$$

Все они (последний в силу III) по абсолютной величине $\leqslant \mathrm{const}/r_{po}$. Но, кроме них, $2\pi\mathfrak{u}\,(p)$ содержит еще один член

$$\int_{\mathfrak{O}}\frac{(\mathfrak{r}_{po}\mathfrak{e}(o))}{r_{po}^3}\,\mathfrak{n}(o)\,do,$$

из-за которого и возникает упомянутая выше трудность. Выпишем для $\mathfrak{e}\,(o)$ уравнение

$$\mathfrak{e}(o)=\mathfrak{v}(o)-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{O}}\Lambda_{II}(o,o')\,\mathfrak{e}(o')\,do'.$$

Таким образом (см. равенство (21)), нам придется иметь дело с выражениями:

$$\text{a)}\ \int_{\mathfrak{O}}\frac{(\mathfrak{r}_{po'}\mathfrak{n}(0))}{r_{po'}^3}\,\frac{1}{r_{oo'}}\,\mathfrak{n}(o')\,'do';$$

$$\text{b)}\quad \int \frac{(\mathfrak{r}_{po'}, \mathfrak{r}_{oo'})}{r^3_{po'}} \frac{\cos\vartheta_{o'o}}{r^2_{o'o}} \mathfrak{n}(o')\,do';$$

$$\text{c)}\quad \int \frac{\mathfrak{r}_{po'}\Lambda_{II}(o', o)}{r^3_{po'}} \times \mathfrak{n}(o')\,do' = K(p, o).$$

Из a) выделим член

$$\int\limits_{\mathfrak{O}} \frac{(\mathfrak{r}_{po'}\mathfrak{n}(o'))}{r^3_{po'}} \frac{1}{r_{o'o}} \mathfrak{n}(o')(\mathfrak{n}(o)\,\mathfrak{n}(o'))\,do',$$

который в силу III по абсолютной величине $\leqslant \mathrm{const}/r_{po}$. Остается

$$\int\limits_{\mathfrak{O}} \frac{(r_{po'}\mathfrak{n}_{o'o})}{r^3_{po'}} \frac{1}{r_{o'o}} \mathfrak{n}(o')\,do'.$$

Пусть нормаль в точке o имеет компоненты 1, 0, 0; тогда последний интеграл примет вид

$$\int\limits_{\mathfrak{O}} \frac{(y_{po'}n_y(o') + z_{po'}n_z(o'))}{r^3_{po'}} \frac{1}{r_{o'o}} \mathfrak{n}(o')\,do'.$$

Из двух слагаемых подынтегрального выражения исследуем только первое, а у него лишь x-компоненту

$$\int\limits_{\mathfrak{O}} \frac{y_{po'}}{r^3_{po'}} \frac{1}{r_{oo'}} n_x n_y(o')\,do'.$$

Пусть $\overrightarrow{po_1}$ — кратчайший отрезок от точки p до поверхности $\mathfrak{O}$. Тогда последний интеграл записывается в виде

$$\frac{n_x n_y(o_1)}{r_{po}} \int\limits_{\mathfrak{O}} \frac{y_{po'}}{r^3_{po'}}\,do' + \int\limits_{\mathfrak{O}} \frac{y_{po}}{r^3_{po'}} \left\{\frac{n_x n_y(o')}{r_{o'o}} - \frac{n_x n_y(o_1)}{r_{po}}\right\} do'.$$

Интеграл, входящий в первое слагаемое, остается ограниченным при всех p; это легко показать, заменив поверхность на касательную плоскость в точке o_1. Поскольку

$$|n_x n_y(o_1)| \leqslant |n_y(o_1)| \leqslant \mathrm{const}\cdot(r_{oo_1})^\alpha \leqslant \mathrm{const}\cdot r^\alpha_{po},$$

то первый член будет по абсолютной величине

$$\leqslant \mathrm{const}/r^{1-\alpha}_{po}.$$

Разобьем выражение, стоящее в фигурных скобках второго члена, на два слагаемых:

$$\frac{n_x n_y(o') - n_x n_y(o_1)}{r_{,}} \quad \text{и} \quad n_x n_y(o_1)\left(\frac{1}{r_{o'o}} - \frac{1}{r_{po}}\right).$$

Первое из них по абсолютной величине

$$\leqslant \frac{\text{const}\cdot(r_{o_1o'})^{\alpha}}{r_{o'o}} \leqslant \text{const}\cdot \frac{r_{po'}^{\alpha}}{r_{o'o}},$$

и поэтому соответствующий ему интеграл

$$\leqslant \text{const}\cdot \int_{\mathfrak{O}} \frac{do'}{r_{po'}^{2-\alpha} r_{o'o}} \leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{1-\alpha}} \quad (\alpha < 1).$$

Абсолютная величина второго слагаемого оказывается

$$\leqslant \frac{r_{po'}}{r_{po} r_{o'o}} \, |n_y(o_1)|,$$

и, следовательно, соответствующий интеграл

$$\leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{1-\alpha}} \int_{\mathfrak{O}} \frac{do'}{r_{po'} r_{o'o}} \leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{1-\alpha}} \cdot \lg \frac{1}{r_{po}}.$$

Тем самым исследование a) закончено. Аналогичным образом можно исследовать и выражение b), при этом следует обратить внимание на то, что для любых трех точек поверхности — o', o_1, o выполняется неравенство [20]

$$|\cos\vartheta_{o'o} - \cos\vartheta_{o_1o}| \leqslant \text{const}\cdot(r_{o'o_1})^{\alpha}.$$

[20] Доказательство этого неравенства сводится к рассмотрению того случая, когда все три точки o, o', o_1 расположены поблизости друг от друга. Выберем систему координат с началом в точке o и с осью ox, направленной по нормали в o. Тогда уравнение поверхности $\mathfrak{O}$ в окрестности точки o может быть записано в виде

$$x = f(y, z) \quad (y^2 + z^2 \leqslant c^2),$$

и точки o', o_1 можно считать принадлежащими этой окрестности. Проекции o' и o_1 на плоскость (y, z) обозначим соответственно через $(y'z')$ и (y_1z_1). Если $r_{oo_1} < 2r_{o'o_1}$ и, следовательно, $r_{oo'} < 3r_{o'o_1}$, то утверждение справедливо, поскольку

$$|\cos\vartheta_{o_1o}| \leqslant \text{const}\cdot(r_{o_1o})^{\alpha} \leqslant \text{const}\cdot(r_{o'o_1})^{\alpha};$$

аналогичное неравенство выполняется для $\cos\vartheta_{o'o}$. В противном случае $(r_{oo'} \geqslant 2r_{o'o_1})$ верны неравенства

$$r_{oo'} \geqslant r_{oo_1} - r_{o'o_1} \geqslant {}^1/_2 r_{oo_1}.$$

Надо оценить величину $x'/r_{oo'} - x_1/r_{oo_1}$. Имеем

$$x' = y'\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(ty', tz')\,dt + z'\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(ty', tz')\,dt,$$

$$x_1 = y_1\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(ty_1, tz_1)\,dt + z_1\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(ty_1, tz_1)\,dt.$$

Рассмотрим, кроме того,

$$x_1' = y'\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(ty_1, tz_1)\,dt + z'\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(ty_1, tz_1)\,dt.$$

Можно показать, что выражение b) тоже по абсолютной величине

$$\leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{1-\alpha}} \lg \frac{1}{r_{po}}.$$

Подставляя в c) выражение для Λ_{II} из формулы (22), получим с помощью соответствующих рассуждений, что c) по абсолютной величине

$$\leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{2-\alpha}} \lg \frac{1}{r_{po}}.$$

Итак, входящий в $\mathfrak{j}(p, o)$ член

$$\int_{\mathfrak{O}} K(p, o') \mathfrak{h}(o', o)\, do'$$

будет по абсолютной величине

$$\leqslant \frac{\text{const}}{r_{po}^{1-\alpha}} \lg \frac{1}{r_{po}}.$$

Тем самым все слагаемые учтены, и мы имеем

$$|\mathfrak{j}(p, o)| \leqslant \text{const}/r_{po}.$$

Обозначая через $M(o, o')$ резольвенту ядра $(1/2\pi) \cos \vartheta_{oo'}/r_{oo'}^2$, окончательно получим

$$\frac{1}{2} \mathfrak{g}(o, p) = -\mathfrak{j}(p, o) + \int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{j}(p, o') M(o', o)\, do',$$

Поскольку разность значений $\partial f/\partial y$ в двух точках, удаленных друг от друга на расстояние ε, будет $\leqslant \text{const} \cdot \varepsilon^{\alpha}$, имеем

$$|x' - x_1'| \leqslant \text{const} \cdot r_{oo'} (r_{o'o_1})^{\alpha}$$

и

$$|x_1 - x_1'| \leqslant \text{const} \cdot r_{o'o_1} (r_{oo_1})^{\alpha}.$$

Но

$$r_{o'o_1} (r_{oo_1})^{\alpha} = (r_{o'o_1})^{\alpha} (r_{o'o_1})^{1-\alpha} (r_{oo_1})^{\alpha} \leqslant (r_{o'o_1})^{\alpha} \left(\frac{r_{oo_1}}{2}\right)^{1-\alpha} r_{oo_1} =$$

$$= \frac{1}{2^{1-\alpha}} r_{oo_1} (r_{o'o_1})^{\alpha} \leqslant 2^{\alpha} r_{oo'} (r_{o'o_1})^{\alpha}.$$

В результате

$$|x_1 - x'| \leqslant \text{const}\, r_{oo'} (r_{o'o_1})^{\alpha},$$

$$\left| \frac{x'}{r_{oo'}} - \frac{x_1}{r_{oo_1}} \right| \leqslant \frac{|x_1 - x'|}{r_{oo'}} + \left| x_1 \left(\frac{1}{r_{oo'}} - \frac{1}{r_{oo_1}} \right) \right|.$$

Первое слагаемое правой части $\leqslant \text{const}. (r_{o'o_1})^{\alpha}$, второе

$$\leqslant \frac{|x_1| (r_{o'o_1})}{r_{oo'} r_{oo_1}} \leqslant \text{const} \frac{(r_{oo'})^{1+\alpha} r_{o'o_1}}{r_{oo'} r_{oo_1}} = C \frac{(r_{oo_1})^{\alpha} r_{o'o_1}}{r_{oo'}} \leqslant 2C \frac{r_{o'o_1}}{(r_{oo_1})^{1-\alpha}} \leqslant \frac{2C}{2^{1-\alpha}} (r_{o'o_1})^{\alpha}.$$

Тем самым неравенство, приведенное в тексте, доказано. Ср. с цитированной в примеч. 7 работой а), с. 476 и далее.

и поэтому

$$|\mathfrak{g}(o, p)| \leqslant \mathrm{const}/r_{po}.$$

Таким образом, в силу V тензор B_{II}, вычисленный по формуле (27), удовлетворяет неравенству

$$|B_{\mathrm{II}}(p, p')| \leqslant \mathrm{const}/R(p, p').$$

В результате нами доказано, что для всех трех тензоров Грина

$$|\Gamma(p, p')| \leqslant \mathrm{const}/r_{pp'}. \tag{45}$$

Итак, к матричным ядрам Γ применима теория интегральных уравнений Фредгольма—Гильберта; в частности, они обладают дискретным спектром, состоящим из бесконечного счетного числа собственных значений. Сумму трех элементов, стоящих на главной диагонали $B = B_{\mathrm{II}}$ или B_{III}, обозначим при $p = p'$ через $B(p)$. Во второй главе мы докажем, что $B(p) \geqslant 0$. Если бы интеграл $\int_J B(p)\,dp$ сходился, его следовало бы назвать «интегральным следом» тензора B. Из полученных неравенств имеем

$$|B(p)| \leqslant \mathrm{const}/r(p),$$

где под $r(p) = R(p, p)/2$ понимается кратчайшее расстояние от точки p до поверхности $\mathfrak{O}$. Отсюда, конечно, нельзя сделать вывод, что интегральный след B конечен, но все-таки можно показать, что он стремится к бесконечности не быстрее логарифма. Более точная формулировка этого утверждения такова:

Разобьем тело J на две части, выделив в нем вблизи поверхности слой J_ε толщиной ε, иными словами, к области J_ε отнесем те точки p, для которых $r(p) \leqslant \varepsilon$. Тогда для всех ε (< 1) справедливы неравенства [21]

$$\text{Объем } J_\varepsilon \leqslant \mathrm{const}\,\varepsilon; \qquad \int_{J-J_\varepsilon} \frac{dp}{r(p)} \leqslant \mathrm{const}\cdot \lg\frac{1}{\varepsilon}.$$

VIII. Итак, имеем

$$\int_{J-J_\varepsilon} B(p)\,dp \leqslant \mathrm{const}\cdot \lg\frac{1}{\varepsilon}. \tag{46}$$

---

[21] Второе из этих неравенств является следствием первого. Действительно, рассмотрим слой S_n, задаваемый неравенствами

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant r(p) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Его объем $\leqslant \mathrm{const}\cdot(1/2^n) = C/2^n$ (для любого n). Интеграл $\int_{S_n} dp/r(p) \leqslant 2^{n+1}S_n \leqslant 2C$ и, следовательно,

$$\int_{S_1+S_2+\ldots+S_n} \frac{dp}{r(p)} < 2Cn,$$

что и утверждалось. Если стремиться к тому, чтобы доказать первое неравенство, то надо учесть, что тело, ограниченное поверхностью с непрерывной нормалью, имеет объем. Далее, используя достаточно мелкую кубическую решетку (параллельную осям x—, y—, z —), следует «послойно» (stollenweise) пересчитать те кубики, которые имеют общие точки с J_ε.

Глава II

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ЗАКОН, НЕ ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ФОРМЫ УПРУГОГО ТЕЛА

§ 6. Три общих утверждения теории интегральных уравнений

Пусть ядро [13]

$$K(x, \xi) \qquad \left[0 \leqslant \begin{matrix} x \\ \\ \xi \end{matrix} \leqslant 1\right],$$

так же как и все ядра, рассматриваемые в этом параграфе, симметрично и таково, что для него справедлива обычная теория Фредгольма—Гильберта. Обозначим через l_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) положительные собственные значения [14] (reziproken positiven Eigenwerte) ядра K, расположенные в убывающем порядке, а через $u_n(x)$ соответствующие им собственные функции, которые образуют ортогональную, нормированную систему. Если последовательность l_n имеет лишь конечное число членов, то, продолжив ее нулями, мы будем рассматривать ее как бесконечную последовательность. Для собственных значений и собственных функций ядер, снабженных верхними индексами K', K^* и т. д., по-прежнему будут использоваться обозначения l_n и $u_n(x)$, но с соответствующими индексами. Докажем простое и в то же время богатое следствиями предложение, на котором основано дальнейшее исследование упругих колебаний.

Теорема 1. *Если K есть сумма двух ядер: $K = K' + K''$, то имеет место соотношение*

$$l_{m+n+1} \leqslant l'_{m+1} + l''_{n+1} \left(\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} = 0, 1, 2, \ldots\right). \tag{47}$$

Доказательство. Для любой функции $v(x)$, интеграл от квадрата которой не превосходит единицы: $\int_0^1 v^2(x)\,dx \leqslant 1$, справедливы неравенства

$$\int_0^1\int_0^1 \left\{K'(x, \xi) - \sum_{i=1}^{m} l_i' u_i'(x)\, u_i'(\xi)\right\} v(x)\, v(\xi)\, dx\, d\xi \leqslant l'_{m+1}, \tag{48}$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left\{K''(x, \xi) - \sum_{i=1}^{n} l_i'' u_i''(x)\, u_i''(\xi)\right\} v(x)\, v(\xi)\, dx\, d\xi \leqslant l''_{n+1}.$$

Если $l_{m+n+1} \neq 0$, то существуют собственные функции $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots m + n + 1$). Построим функцию $v(x)$, являющуюся их линейной комбинацией:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{m+n+1} b_i u_i(x).$$

Выберем константы b_i так, чтобы $v(x)$ была ортогональна функциям

$$u_1'(x), u_2'(x), \ldots, u_m'(x);\; u_1''(x),\; u_2''(x), \ldots, u_n''(x).$$

Условия ортогональности дают для нахождения констант b_i $(m+n)$ линейных однородных уравнений; следовательно, мы можем считать, что $v(x)$ удовлетворяет также и условию нормировки:

$$\int_0^1 v^2(x)\,dx \equiv b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{m+n+1}^2 = 1.$$

Для построенной таким образом функции $v(x)$ левые части неравенства (48) равны соответственно

$$\int_0^1\int_0^1 K'(x, \xi)\, v(x)\, v(\xi)\, dx\, d\xi \text{ и } \int_0^1\int_0^1 K''(x, \xi)\, v(x)\, v(\xi)\, dx\, d\xi.$$

Следовательно, их сумма равна

$$\int_0^1\int_0^1 K(x, \xi)\, v(x)\, v(\xi)\, dx\, d\xi = \sum_{i=1}^{m+n+1} l_i b_i^2 \geqslant l_{m+n+1} \sum_{i=1}^{m+n+1} b_i^2 = l_{m+n+1}.$$

Особо отметим следующее следствие основной теоремы:

Теорема 2. *Прибавление положительно-определенного ядра к произвольному может только уменьшить характеристические числа последнего.*

Под положительно-определенным ядром понимается такое ядро $K^*(x, \xi)$, что соответствующая интегральная квадратичная форма $\int_0^1\int_0^1 K^*(x, \xi)\, v(x)\, v(\xi)\, dx\, d\xi$ ни при каких функциях $v(x)$ не принимает отрицательных значений. Такие ядра, как известно, характеризуются тем, что все их характеристические числа положительны. Мы должны показать, что если $K = K' + K^*$ и при этом K^* положительно определено, то

$$l_{m+1} \geqslant l'_{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Действительно,

$$K' = K + (-K^*).$$

Заметим, что уже первый член последовательности положительных собственных значений ядра $(-K^*)$ равен нулю, поэтому из теоремы 1, в котором n берется равным нулю, следует теорема 2.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция, такая, что $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 1$. Тогда любое симметрическое ядро K можно преобразовать в такое симметрическое ядро $\dot{K}$, что $\dot{K}$ ортогонально $f(x)$:

$$\int_0^1 \dot{K}(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi = 0,$$

и в то же время для всех функций $v(x)$, ортогональных к $f(x)$, выполняется равенство

$$\int_0^1\int_0^1 \dot K(x,\xi)\,v(x)\,v(\xi)\,dx\,d\xi=\int_0^1\int_0^1 K(x,\xi)\,v(x)\,v(\xi)\,dx\,d\xi.$$

Для этого достаточно положить (ср. с. 29)

$$\dot K(x,\xi)=K(x,\xi)-f(x)\int_0^1 f(y)\,K(y,\xi)\,dy-\int_0^1 K(x,\eta)\,f(\eta)\,d\eta f(\xi)+$$
$$+f(x)\,f(\xi)\int_0^1\int_0^1 K(y,\eta)\,f(y)\,f(\eta)\,dy\,d\eta.$$

Если неравенство

$$\int_0^1\int_0^1 \Big\{K(x,\xi)-\sum_{i=1}^n l_i u_i(x)\,u_i(\xi)\Big\}\,v(x)\,v(\xi)\,dx\,d\xi\leqslant l_{n+1}$$

применять только к функциям $v(x)=\dot v(x)$, которые ортогональны к $f(x)$, то каждую функцию $u_i(x)$ можно заменить в нем на функцию

$$\bar u_i(x)=u_i(x)-f(x)\int_0^1 f(y)\,u_i(y)\,dy,$$

ортогональную к $f(x)$.

Следовательно, для $v=\dot v(x)$ имеет место неравенство

$$\int_0^1\int_0^1 \Big\{K(x,\xi)-\sum_{i=1}^n l_i\bar u_i(x)\,\bar u_i(\xi)\Big\}\,v(x)\,v(\xi)\,dx\,d\xi\leqslant l_{n+1}. \qquad (49)$$

Пусть теперь $v(x)$ — опять произвольная функция, интеграл от квадрата которой равен единице; тогда выражение, стоящее в левой части (49), принимает для нее то же значение, что и для функции

$$\dot v(x)=v(x)-f(x)\int_0^1 v(y)\,f(y)\,dy$$

(интеграл от квадрата которой $\leqslant 1$). Поскольку $(n+1)$-е положительное собственное значение ядра $\sum_{i=1}^n l_i\bar u_i(x)\,\bar u_i(\xi)$ равно нулю, то из предыдущего, используя основную теорему, можно заключить, что $\dot l_{n+1}\leqslant l_{n+1}$. С другой стороны, ядро $K-\dot K$ имеет лишь *одно* положительное и *одно* отрицательное характеристическое число [15], поэтому в силу того же предложения $l_{n+1}\leqslant \mathring{l}_n$. Полученный результат является точным аналогом теоремы Штурма о квадратичных формах от конечного числа переменных. В самом деле, если представить квадратичную интегральную форму, соответствующую ядру K, как *поверхность второго порядка в бесконечномерном функциональном пространстве*, то $\dot K$ —

это не что иное, как сечение K плоскостью, проходящей через начало координат, с нормалью $f(x)$.

Теорема 3. *Если $\dot{K}$ получается из K сечением поверхности второго порядка K произвольной плоскостью, проходящей через начало координат, то главные оси K отделяются друг от друга главными осями $\dot{K}$:*

$$l_1 \geqslant \dot{l}_1 \geqslant l_2 \geqslant \dot{l}_2 \geqslant l_3 \geqslant \dot{l}_3 \geqslant \dots$$

§ 7. Спектральные законы

Как было показано в предыдущей главе, уравнение упругих колебаний при отсутствии внешних сил имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = \Delta^* \mathfrak{A}$$

(t — время, $\mathfrak{A}$ — смещение упругой среды).

Для того чтобы найти простые колебания, сделаем замену

$$\mathfrak{A}(p, t) = e^{i\nu t}\mathfrak{u}(p),$$

где $\mathfrak{u}(p)$ — амплитуда, которая зависит теперь только от пространственных координат; ν — константа — частота искомых колебаний; $i = \sqrt{-1}$. В результате для амплитуды получается уравнение

$$\Delta^* \mathfrak{u} + \lambda \mathfrak{u} = 0. \tag{50}$$

В зависимости от того, какое из граничных условий I, II или III рассматривается, решения (λ, $\mathfrak{u}$) этого уравнения совпадают с характеристическими числами и собственными функциями матричных ядер Γ_{I}, Γ_{II} или Γ_{III} [22]; и только в последнем случае к характеристическим числам и собственным функциям Γ_{III} добавляется $\lambda = 0$ кратности 6 и шесть собственных векторов $\mathfrak{a}_i$. *Все характеристические числа, образующие дискретный спектр, положительны,* иными словами, все матричные ядра положительно определены. Действительно, если подставить решение (λ, $\mathfrak{u}$) уравнения (50), удовлетворяющее упомянутым выше граничным условиям, в уравнения (D), (C), (B) соответственно, то получится

$$\int_J (\dots - \lambda \mathfrak{u}^2)\, dp = 0,$$

где многоточием обозначена соответствующая часть интегранта, которая в каждом из трех случаев неотрицательна. Из этого уравнения следует, что $\lambda > 0$. Относительно собственных значений задачи I можно сделать следующее утверждение:

Теорема 4. *Пусть внутри тела J выделено конечное число попарно не пересекающихся тел J', J'', ..., J^h. Тогда число характеристических чисел тела J (в задаче I), лежащих левее любого заданного значения на числовой оси, будет не меньше общего числа характеристических чисел всех тел J^i, лежащих левее того же значения.*

---

[22] Мы предполагаем (без изменения обозначений), что все встречающиеся в гл. I тензоры и функции Грина снабжены множителем $1/4\pi$.

Обозначим тензоры Грина $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{I}}$, соответствующие телам J', J'', ... через Γ', Γ'', ..., при этом будет подразумеваться, что, если хотя бы одна точка p или p' лежит, например, вне J', то $\Gamma'(p, p') = 0$. Если будет установлено, что матричное ядро

$$\Gamma - (\Gamma' + \Gamma'' + \ldots + \Gamma^h)$$

положительно определено, то доказательство этой теоремы будет следовать из предложения 2. Допустим, что поверхности $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, ..., ограничивающие тела J', J'', ..., удовлетворяют тем же предположениям, что и граница тела J, и что эти поверхности не касаются друг друга и внешней границы тела J. Обозначим через J^{h+1} ту часть тела J, которая остается после вырезания из него объединения тел J', J'', ..., J^h. Как было показано выше, тензор Грина Γ^{h+1} для задачи I, отвечающий телу J^{h+1}, положительно определен. Поэтому, если будет установлено, что матричное ядро

$$\Delta = \Gamma - (\Gamma' + \Gamma'' + \ldots + \Gamma^{h+1})$$

положительно определено, т. е. обладает лишь положительными характеристическими числами, то наше утверждение будет доказано.

Пусть μ — характеристическое число ядра Δ; $\mathfrak{v}$ — соответствующая ему собственная функция:

$$\mathfrak{v}(p) = \mu \int_J \Delta(p, p')\, \mathfrak{v}(p')\, dp'. \tag{51}$$

Покажем, что $\mu > 0$. Функция $\mathfrak{v}(p)$ удовлетворяет уравнению $\Delta^* \mathfrak{v} = 0$ во всей области J, за исключением поверхностей $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, ... Что же касается поведения векторного поля $\mathfrak{v}$ на самих поверхностях, то прежде всего следует заметить, что при переходе через них оно меняется непрерывно. Действительно, для любой точки $\omega \in \Omega = \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \ldots + \mathfrak{D}^h$ [16] имеем

$$\mathfrak{v}(\omega) = \mu \int_J \Gamma(\omega, p')\, \mathfrak{v}(p')\, dp'. \tag{52}$$

Далее, на обеих сторонах любой из этих поверхностей, скажем $\mathfrak{D}'$, определен вектор $\mathfrak{S}(\mathfrak{v})$:

$$\mathfrak{S}_n = \frac{a}{a+b} (\mathfrak{P}_n(\mathfrak{v}) + b \operatorname{div} \mathfrak{v}), \quad \mathfrak{S}_t = \frac{1}{a+b} (a \mathfrak{P}_t(\mathfrak{v}) + b^2 [\operatorname{rot} \mathfrak{v}, \mathfrak{n}]),$$

однако на разных сторонах поверхности $\mathfrak{D}'$ значения этого вектора не совпадают. Обозначим разность этих значений — «скачок» вектора $\mathfrak{S}$ — через $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(\omega)$. На поверхности $\mathfrak{D}$ поле $\mathfrak{v}$ обращается в нуль.

К каждому из тел J', J'', ..., J^{h+1} применим формулу (D′), в которую вместо $\mathfrak{u}$ подставлен тензор $\Gamma(p, p')$, принадлежащий J (при этом считается, что из тела, в котором находится точка p', вырезан бесконечно малый шар, содержащий эту точку). Складывая полученные равенства, имеем

$$\mathfrak{v}(p') = -\int_\Omega \Gamma(\omega, p')\, \mathfrak{s}(\omega)\, d\omega. \tag{53}$$

Подставив это значение в (52), получим

$$\mathfrak{v}(\omega) = -\mu \int_{\Omega} \Gamma\Gamma(\omega,\omega')\,\mathfrak{s}(\omega')\,d\omega',$$

где через ΓΓ обозначена итерация ядра Γ. Наконец, используем неравенство (D_0), заменив в нем $\mathfrak{u}$ на $\mathfrak{v}$ и взяв вместо J по очереди каждое из тел J', J'', ..., J^{h+1}. Затем полученные таким образом неравенства сложим:

$$-\int_{\Omega} \mathfrak{v}(\omega)\,\mathfrak{s}(\omega)\,d\omega \geqslant 0.$$

Итак,

$$\mu \int_{\Omega}\int_{\Omega} \mathfrak{s}(\omega)\,\Gamma\Gamma(\omega,\omega')\,\mathfrak{s}(\omega')\,d\omega\,d\omega' \geqslant 0. \tag{54}$$

С другой стороны, из (53), возводя левую и правую части в квадрат и интегрируя по J, заключаем, что

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \mathfrak{s}(\omega)\,\Gamma\Gamma(\omega,\omega')\,\mathfrak{s}(\omega')\,d\omega\,d\omega' = \int_{J} \mathfrak{v}^2(p)\,dp > 0.$$

Множитель μ в (54) тоже должен быть > 0, так как он не равен нулю.

Отметим еще одно следствие из этого рассуждения. Пусть J^0 — область, содержащая J. Тогда, если точки p и p' изменяются внутри J^0, то тензор Γ_{J^0} — — Γ_J положительно определен. Иными словами,

$$\int_{J^0}\int_{J^0} \mathfrak{u}(p)\,\{\Gamma_{J^0}(p,p') - \Gamma_J(p,p')\}\,\mathfrak{u}(p')\,dp\,dp' \geqslant 0.$$

В частности, подставляя в последнее неравенство только такие поля $\mathfrak{u}$, которые равны нулю вне J, получаем, что тензор $\Gamma_{J^0} - \Gamma_J$ положительно определен и в том случае, когда точки p и p' изменяются лишь в области J. Возьмем в качестве J^0 некоторый достаточно большой шар и, зафиксировав его центр, устремим его радиус к бесконечности. В пределе получим формулу

$$\int_{J}\int_{J} \mathfrak{u}(p)\,\{P(p,p') - \Gamma_J(p,p')\}\,\mathfrak{u}(p')\,dp\,dp' \geqslant 0.$$

Итак, доказана

Теорема 5. *Матричное ядро $P - \Gamma_{\text{I}} = A_{\text{I}}$ положительно определено.*

В то время как область применения предложения 4 ограничивается лишь задачей I, теорема 5 имеет более широкую область применения. А именно, для краевых задач II и III справедливы следующие, доказываемые тем же методом, аналоги теоремы 5:

Теорема 6. *Матричные ядра*

$$B_{\text{II}} = \Gamma_{\text{II}} - \Gamma_{\text{I}}, \quad B_{\text{III}} = \Gamma_{\text{III}} - \Gamma_{\text{I}}$$

положительно определены. Поэтому для произвольного тела J задача теории колебаний II, *так же как и задача* III, *имеет по крайней мере столько же собственных значений, лежащих левее произвольной границы, сколько и задача* I.

Пусть $\mathfrak{v}$ и μ — собственный вектор и принадлежащее ему характеристическое число ядра $B = B_{\text{II}}$:

$$\mathfrak{v}(p) = \mu \int_J B(p, p')\,\mathfrak{v}(p')\,dp'. \tag{55}$$

Тогда $\mathfrak{v}(p)$ — статическое поле, которое на поверхности $\mathfrak{O}$ направлено по нормали. Подставляя в (55) вместо p точки поверхности $\mathfrak{O}$, найдем граничные значения для $\mathfrak{v}$:

$$v_n(o) = \mu \int_J \mathfrak{g}(o, p')\,\mathfrak{v}(p')\,dp',$$

где под $\mathfrak{g}$ понимается величина, введенная на с. 25. Обозначая через $l(o)$ дивергенцию $\mathfrak{v}$ на поверхности $\mathfrak{O}$, имеем, с другой стороны (ср. с. 26):

$$\mathfrak{v}(p') = -\int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{g}(o, p')\,l(o)\,do. \tag{56}$$

Подставляя в предыдущее равенство, получаем

$$v_n(o) = -\mu \int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{g}\mathfrak{g}(o, o')\,l(o')\,do',$$

$$\left\{\mathfrak{g}\mathfrak{g}(o, o') = \int_J \mathfrak{g}(o, p)\,\mathfrak{g}(o', p)\,dp\right\}.$$

Из неравенства (C_0) получим

$$-\int_{\mathfrak{O}} v_n(o)\,l(o)\,do = \int_J \left\{\frac{b}{a}(\operatorname{rot}\mathfrak{v})^2 + (\operatorname{div}\mathfrak{v})^2\right\} dp \geqslant 0,$$

т. е.

$$\mu \int_{\mathfrak{O}}\int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{g}\mathfrak{g}(o, o')\,l(o)\,l(o')\,do\,do' \geqslant 0.$$

Возведем (56) в квадрат и проинтегрируем; в результате получим неравенство

$$\int_{\mathfrak{O}}\int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{g}\mathfrak{g}(o, o')\,l(o)\,l(o')\,do\,do' = \int_J \mathfrak{v}^2(p)\,dp > 0.$$

Следовательно, μ положительно.

Пусть теперь в (55) $B = B_{\text{III}}$. Тогда мы рассуждаем следующим образом. Имеем

$$\mathfrak{v}(o) = \mu \int_J \Gamma(o, p')\,\mathfrak{v}(p')\,dp' + \mathfrak{a}(o), \tag{57}$$

где через Γ обозначен тензор Γ_{III}, а через $\mathfrak{a}(p)$ — линейная комбинация указанных в начале § 4 шести решений статической однородной задачи III

$$\mathfrak{v}(p') = -\int_{\mathfrak{O}} \Gamma(o, p')\,\mathfrak{q}(o)\,do \qquad \{\mathfrak{q} = \mathfrak{P}(\mathfrak{v})\}. \tag{58}$$

Подставляя это значение в предыдущее уравнение, получим

$$\mathfrak{v}(o) = -\mu \int_{\mathfrak{O}} \Gamma\Gamma(o, o')\, \mathfrak{q}(o')\, do' + \mathfrak{a}(o).$$

Так как справедливо неравенство

$$-\int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{v}(o)\, \mathfrak{q}(o)\, do \geqslant 0$$

и необходимо выполнено условие (см. с. 29)

$$\int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{q}(o)\, \mathfrak{a}(o)\, do = 0,$$

то

$$\mu \int_{\mathfrak{O}} \int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{q}(o)\, \Gamma\Gamma(o, o')\, \mathfrak{q}(o')\, do\, do' \geqslant 0.$$

Сопоставив этот результат с тем результатом, который следует из (58),

$$\int_{\mathfrak{O}} \int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{q}(o)\, \Gamma\Gamma(o, o')\, \mathfrak{q}(o')\, do\, do' = \int_{J} \mathfrak{v}^2\, dp > 0,$$

можно заключить, что число характеристических чисел ядра Γ_{III}, лежащих левее произвольной границы L, не меньше соответствующего числа характеристических чисел ядра $\dot{\Gamma}_{\mathrm{I}}$. Но, с одной стороны, число собственных значений задачи III, лежащих левее L, на шесть больше соответствующего числа характеристических чисел ядра Γ_{III}, поскольку к характеристическим числам задачи III присоединяется шестикратное собственное значение $\lambda = 0$. С другой стороны, в силу предложения 3 число характеристических чисел $\dot{\Gamma}_{\mathrm{I}}$, лежащих левее L, не может превысить соответствующего числа характеристических чисел тензора Γ_{I} более чем на шесть. Тем самым справедливость утверждения доказана также и для краевого условия III.

§ 8. Асимптотический спектральный закон для «трехмерной мембраны»

В предыдущем параграфе были рассмотрены важнейшие *точные* спектральные законы (выражающиеся в форме неравенства). Перейдем теперь к рассмотрению *асимптотических* законов (которые должны формулироваться в виде предельных равенств). Начнем с задачи I. Предварительно рассмотрим специальный случай, когда константы a и b равны единице. В этом случае оператор $\Delta^*\mathfrak{u}$ переходит в оператор теории потенциала $\Delta\mathfrak{u}$, и, следовательно,

$$\Gamma_{\mathrm{I}} = \begin{Vmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{Vmatrix},$$

где G — стандартная функция Грина теории потенциала, относящаяся к первой краевой задаче. Ядра Γ_{I} и G имеют одни и те же характеристические числа,

при этом кратность характеристических чисел ядра Γ_1 втрое больше кратности соответствующих характеристических чисел ядра G. Известны следующие свойства функции Грина G:

1. $0 < G < 1/r$.

2. Если область J' содержится в J, то $G_{J'} < G_J$. Отсюда следует, что для того чтобы построить функцию Грина для области, *не* обязательно требовать, чтобы ее граница состояла из конечного числа поверхностей, удовлетворяющих условиям, приведенным на с. 18. Действительно, пусть J — произвольная ограниченная область. Тогда для любого положительного ε можно построить такую область J_ε, что

1) граница J_ε состоит из конечного числа поверхностей с непрерывно меняющейся касательной плоскостью и непрерывной кривизной;

2) если $\delta < \varepsilon$, то J_ε целиком содержится в J_δ;

3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = J$, т. е. для любой точки p, лежащей внутри J, найдется такое $\varepsilon > 0$, что p окажется внутри J_ε.

Пусть G_ε — функция Грина для области J_ε, тогда существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon = G$; при этом если p и p' принадлежит произвольному замкнутому множеству, целиком лежащему внутри J, то сходимость будет *равномерной*,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \{G(p, p') - G_\varepsilon(p, p')\} = 0.$$

Поскольку G меньше $1/r$, то спектр интегрального оператора с ядром G дискретен и все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ положительны.

Здесь нам не нужно исследовать вопрос о том, принимает ли и в каком смысле функция Грина G для совершенно произвольной области граничное значение 0. Существенным для нас окажется лишь тот факт, что в случае, когда область J — *куб*, функция Грина принимает нулевое значение на его границе. Действительно, представим себе, что куб J стоит на горизонтальной плоскости E. Тогда функция Грина для него меньше, чем функция Грина для верхнего полупространства, определяемого плоскостью E. Поскольку на E значение функции Грина для верхнего полупространства равно нулю, значение функции Грина для куба J на его нижней грани также равно нулю. Отсюда следует, что для куба $0 \leqslant x \leqslant c$, $0 \leqslant y \leqslant c$, $0 \leqslant z \leqslant c$ собственные функции интегрального оператора с ядром, равным функции Грина, имеют вид

$$\sin\frac{l\pi x}{c}\sin\frac{m\pi y}{c}\sin\frac{n\pi z}{c} \qquad (l, m, n = 1, 2, 3, \ldots),$$

и что, кроме этих функций (точнее, кроме линейных комбинаций с постоянными коэффициентами конечного числа этих функций [17]), никаких других собственных функций нет. Следовательно, множество всех характеристических чисел G совпадает с множеством чисел, имеющих вид

$$\frac{\pi^2}{c^2}(l^2 + m^2 + n^2), \tag{59}$$

где l, m, n пробегают все целые положительные числа независимо друг от друга.

Пусть J', J'', . . ., J^h — произвольные области, содержащиеся в произвольной ограниченной области J и не имеющие друг с другом ни одной общей внутренней точки. Поставим вопрос, останется ли справедливым доказанное в предыдущем параграфе утверждение о положительной определенности ядра

$$G-(G'+G''+\ldots+G^h),$$

если отказаться от всех предположений, касающихся границ областей J', J'', ... Для того чтобы ответить на этот вопрос, мы должны приблизить области J', J'', . . . изнутри областями J_ε', J_ε'', . . . таким же способом, как это делалось для области J. При этом необходимо позаботиться о том, чтобы области J_ε', J_ε'', . . . и их границы лежали целиком внутри J_ε. Таким образом, требуется доказать, что для каждой функции $u(p)$, непрерывной в замкнутой области, справедливо неравенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{J_\varepsilon}\int_{J_\varepsilon} G(p,p')\,u(p)\,u(p')\,dp\,dp'-\sum_{j=1}^{h}\int_{J_\varepsilon^j}\int_{J_\varepsilon^j} G^j(p,p')\,u(p)\,u(p')\,dp\,dp'\right\}\geqslant 0. \qquad (60)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, обозначим через G_ε. Предположим, что $\int_J u^2\,dp\leqslant {}^1/_2$. Пусть $0<\delta<\varepsilon$; в выражении G_ε заменим G, G', G'', . . . на функции Грина G_δ, G_δ', G_δ'', . . ., относящиеся к областям J_δ, J_δ', J_δ'', ... Полученную таким образом из G_ε величину обозначим через $\mathrm{G}_{\delta\varepsilon}$. Имеем

$$\lim_{\delta\to 0}\mathrm{G}_{\delta\varepsilon}=\mathrm{G}_\varepsilon,$$

из результатов предыдущего параграфа следует, что $\mathrm{G}_{\delta\delta}$ неотрицательно. Применим неравенство Шварца. В результате получим

$$(\mathrm{G}_{\delta\delta}-\mathrm{G}_{\delta\varepsilon})^2\leqslant\int_{J_\delta J_\delta-J_\varepsilon J_\varepsilon}\int \mathrm{G}_\delta^2\,dp\,dp'+\sum_{j=1}^{h}\int_{J_\delta^j J_\delta^j-J_\varepsilon^j J_\varepsilon^j}\int(\mathrm{G}_\delta^j)^2\,dp\,dp'\leqslant$$

$$\leqslant\iint(1/r)^2\,dp\,dp'=A_\delta-A_\varepsilon,$$

где последний интеграл распространяется на шестимерную область

$$(J_\delta J_\delta-J_\varepsilon J_\varepsilon)+\sum_{j=1}^{h}(J_\delta^j J_\delta^j-J_\varepsilon^j J_\varepsilon^j).$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{G}_{\delta\varepsilon}\geqslant-\sqrt{A_\delta-A_\varepsilon}.$$

Если через A обозначить конечную величину $\lim_{\delta\to 0}A_\delta$, то предельный переход при $\delta\to 0$ дает

$$\mathrm{G}_\varepsilon\geqslant-\sqrt{A-A_\varepsilon},$$

и предельный переход при $\varepsilon\to 0$ доказывает справедливость неравенства (60). Следовательно, суммарное число характеристических чисел G', G'', . . ., G^h,

лежащих левее произвольного значения, не превосходит числа характеристических чисел G, лежащих левее того же значения.

Пусть J — произвольная ограниченная область, а c — произвольное (малое) положительное число. Рассмотрим в пространстве кубическую решетку с шагом c. Число кубиков этой решетки, целиком лежащих в J, обозначим через H. Характеристические числа функции Грина, относящиеся к каждому отдельному кубику W, определяются формулой (59). Как известно, число характеристических чисел кубика W, лежащих левее произвольной границы L, которое в дальнейшем обозначается через N_W, можно найти следующим образом. Рассмотрим в пространстве с прямоугольной системой координат ξ, η, ζ часть единичного шара, расположенную в первом октанте:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant 1,\quad \xi\geqslant 0,\quad \eta\geqslant 0,\ \zeta\geqslant 0,$$

и кубическую решетку с шагом $\pi/(c\sqrt{L})$, ориентированную параллельно координатным осям (для которой начало координат является одним из узлов). N_W совпадает с числом тех кубиков решетки, которые принадлежат первому октанту единичного шара. Умножив это число на объем отдельного кубика $[\pi/(c\sqrt{L})]^3$, получим выражение $N_W[\pi/(c\sqrt{L})]^3$, которое при L, стремящемся к бесконечности, стремится к объему шарового октанта. Отсюда получается асимптотическая формула для числа N_W:

$$N_W\sim\frac{c^3}{6\pi^2}L^{3/2}.$$

Из предложения 4 и только что доказанного дополнения к нему получим неравенство для N_J — числа характеристических чисел функции Грина G области J, лежащих левее L:

$$N_J\geqslant HN_W.$$

Итак,

$$\liminf_{L\to\infty}\frac{N_J}{L^{3/2}}\geqslant\frac{Hc^3}{6\pi^2}.$$

Пусть объем тела J равен J, тогда J есть предел Hc^3 при бесконечно малом шаге c. Отсюда следует

$$\liminf_{L\to\infty}\frac{N_J}{L^{3/2}}\geqslant\frac{J}{6\pi^2}.$$

Для того чтобы найти верхнюю границу для lim sup, рассмотрим куб W, содержащий тело J. Через $W-J$ обозначим оставшееся незаполненным пространство внутри куба. Тогда

$$N_W\geqslant N_J+N_{W-J},$$

следовательно,

$$\limsup_{L\to\infty}\frac{N_J}{L^{3/2}}\leqslant\lim_{L\to\infty}\frac{N_W}{L^{3/2}}-\liminf_{L\to\infty}\frac{N_{W-J}}{L^{3/2}}\leqslant\frac{W}{6\pi^2}-\frac{W-J}{6\pi^2}=\frac{J}{6\pi^2}.$$

Тем самым доказано, что

$$\lim_{L\to\infty}\frac{N_J}{L^{3/2}}=\frac{1}{6\pi^2}J.$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — характеристические числа функции Грина G, относящиеся к области J, тогда полученный результат можно записать в следующем виде:

$$\lambda_n \sim (6\pi^2 n/J)^{2/3}. \qquad (61)$$

Теорема 7. *Для краевой задачи*

$$\Delta u+\lambda u=0 \text{ в } J, \qquad u=0 \text{ на } \mathfrak{D}$$

последовательность собственных значений $\lambda=\lambda_n$, *расположенных в возрастающем порядке, удовлетворяет асимптотическому закону* $\lambda_n \sim [(6\pi^2 n)/J]^{2/3}$.

Итак, в случае $a=b=1$ число характеристических чисел тензора $\Gamma=\Gamma_{\mathrm{I}}$, лежащих левее границы L, асимптотически равно

$$N\sim\frac{J}{2\pi^2}L^{3/2}. \qquad (62)$$

§ 9. Асимптотическое поведение спектра задачи упругих колебаний

Последний результат позволяет перейти от задачи I с условием $a=b=1$ к задачам II и III, в которых это условие сохранено. Однако специфика задачи II дает нам возможность получить асимптотическое распределение собственных значений в общем случае (для произвольных положительных констант a и b) из асимптотического распределения, отвечающего специальному случаю $a=b=1$. В силу результатов § 3 (формула (28))

$$\Gamma_{\mathrm{II}}=\frac{1}{a}\Gamma_a+\frac{1}{b}\Gamma_b,$$

где матрицы Γ_a, Γ_b взаимно ортогональны и не зависят от выбора констант a и b. Пусть λ^a — набор характеристических чисел Γ_a, λ^b — набор характеристических чисел Γ_b. Тогда множество характеристических чисел Γ_{II} имеет вид

$$a\cdot\lambda^a, \qquad b\cdot\lambda^b.$$

Характеристические числа λ^a тензора Γ_a совпадают с характеристическими числами функции Грина G. Действительно, из формулы (32), приведенной в § 3, следует, что если λ — характеристическое число функции Грина G, а u — принадлежащая ему собственная функция, то λ оказывается характеристическим числом тензора Γ_a, с собственной вектор-функцией $\operatorname{grad} u$. Из той же формулы следует, что таким способом получаются *все* характеристические числа и собственные функции тензора Γ_a. Далее, если известно, что асимптотический закон (62) справедлив при $a=b=1$ не только для задачи I, но и для задачи II, то отсюда можно заключить, что число характеристических чисел асимптотически равно $\sim J/(3\pi^2)\cdot L^{3/2}$, а число характеристических чисел тензора Γ^{II}

асимптотически равно

$$\sim \frac{1}{6\pi^2} L^{3/2} \left\{ \left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} + 2\left(\frac{1}{b}\right)^{3/2} \right\}. \tag{63}$$

Эту же формулу следует ожидать и для задачи I в случае произвольных положительных констант a и b.

Таким образом, задача II дает нам возможность осуществить переход от $a = b = 1$ к произвольным значениям этих констант.

Справедливость сказанного выше можно обосновать с помощью предложения 1 и следующего факта: характеристические числа $B_{\text{II}} = \Gamma_{\text{II}} - \Gamma_{\text{I}}$ распределены асимптотически менее плотно, чем те характеристические числа, которые описываются формулой (61); доказательство последнего факта в свою очередь основано на оценке

$$| B_{\text{II}} (p, p') | \leqslant \text{const}/R (p, p'),$$

полученной в § 5. Обозначим через β_n характеристические числа B_{II}, расположенные в возрастающем порядке (все они положительны), а через $\mathfrak{v}_n(p)$ — соответствующие им (нормированные и взаимно ортогональные) собственные функции. Матричное ядро

$$B_{\text{II}}(p, p') - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} \mathfrak{v}_i(p) \times \mathfrak{v}_i(p')$$

имеет характеристические числа $\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \ldots$. Поскольку все они положительны, соответствующая интегральная квадратичная форма положительно определена, и, *следовательно*, *при* $p = p'$ *элементы матрицы*, *стоящие на главной диагонали*, *неотрицательны*. Сложив соответствующие неравенства, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} \mathfrak{v}_i^2(p) \leqslant B_{\text{II}}(p).$$

Интегрирование по $J - J_\varepsilon$ дает согласно неравенству (46) из § 5 оценку

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} \int\limits_{J - J_\varepsilon} \mathfrak{v}_i^2 \, dp \leqslant \text{const} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \tag{64}$$

С другой стороны, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i^2} \mathfrak{v}_i^2(p) \leqslant \int\limits_J | B_{\text{II}}(p, p') |^2 \, dp' \leqslant \text{const} \cdot \int\limits_J \frac{dp'}{r^2(p, p')} \leqslant \text{const}$$

и, интегрируя по слою J_ε, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} \int\limits_{J_\varepsilon} \mathfrak{v}_i^2 \, dp \leqslant \text{const} \cdot \varepsilon. \tag{65}$$

Из (64) и (65) следует

$$\frac{1}{\beta_n}\sum_{i=1}^{n}\int_{J-J_\varepsilon} v_i^2\,dp \leqslant \frac{1}{2}C\ln\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \frac{1}{\beta_n}\sum_{i=1}^{n}\int_{J_\varepsilon} v_i^2\,dp \leqslant \frac{1}{2}C\beta_n\varepsilon$$

(обозначение const заменено на $C/2$). Складывая, получим

$$\frac{n}{\beta_n} \leqslant \frac{c}{2}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon} + \beta_n\varepsilon\right).$$

Наилучшее использование этого неравенства состоит в том, чтобы взять $\varepsilon = \ln\beta_n/\beta_n$. Тогда (коль скоро $\beta_n > e$)

$$n/\beta_n \leqslant C\ln\beta_n,$$

и отсюда (коль скоро $n > e^{1/C}$):

$$\beta_n \geqslant \frac{1}{C}\frac{n}{\ln n}. \tag{66}$$

Аналогичные рассуждения можно провести для характеристических чисел ядра B_{III}, а также для характеристических чисел ядра A_{I}, которое тоже положительно определено. Сформулируем полученный результат в следующем виде:

Теорема 8. *Для характеристических чисел α_n ядра A_{I} и β_n ядра $B = B_{\text{II}}$ или B_{III} верны следующие оценки*:

$$\frac{1}{\alpha_n} \leqslant \text{const}\,\frac{\ln(n+1)}{n}, \qquad \frac{1}{\beta_n} \leqslant \text{const}\,\frac{\ln(n+1)}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Обозначим характеристические числа Γ_{I} и Γ_{II}, расположенные в возрастающем порядке, через λ_n^{I} и λ_n^{II} соответственно. Имеем

$$1)\ \lambda_n^{\text{II}} \leqslant \lambda_n^{\text{I}} \ (\text{из теоремы } 6); \qquad 2)\ 1/\lambda_n^{\text{II}} \leqslant 1/\lambda_h^{\text{I}} + 1/\beta_s,$$

где h и s — любые два индекса, дающие в сумме $n - 1$ (из теоремы 1).

Рассмотрим сначала случай $a = b = 1$. Тогда, как нам известно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{I}}{n^{2/3}} = \left(\frac{2\pi^2}{J}\right)^{2/3} = D. \tag{67}$$

Подставим в приведенное выше неравенство 2) вместо s наибольшее целое число, не превосходящее $n^{5/6}\sqrt{\ln n}$; $h = n - 1 - s$. Тогда в силу теоремы 8

$$\frac{1}{\beta_n} \leqslant \text{const}\,\frac{\ln s}{s} \leqslant \text{const}\,\frac{\sqrt{\ln n}}{n^{5/6}}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{\beta_s} = 0,$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{\lambda_h^{\text{I}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{h^{2/3}}{\lambda_h^{\text{I}}} = \frac{1}{D}.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{\lambda_n^{\text{II}}} \leqslant \frac{1}{D}, \quad \liminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{\text{II}}}{n^{2/3}} \geqslant D.$$

Следовательно, принимая во внимание соотношение 1) и (67), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{\rm II}}{n^{2/3}}=D=\left(\frac{2\pi^2}{J}\right)^{2/3}. \tag{68}$$

Будем теперь опять считать, что a и b — произвольные константы. Тогда с помощью рассуждений, приведенных в начале этого параграфа, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{\rm II}}{n^{2/3}}=\left\{\frac{J}{6\pi^2}\,(a^{-3/2}+2b^{-3/2})\right\}^{-2/3}=D_{ab}. \tag{69}$$

Для того чтобы от $\lambda^{\rm II}$ снова вернуться к $\lambda^{\rm I}$, применим неравенство 2):

$$1/\lambda_{n+s-1}^{\rm II}\leqslant 1/\lambda_n^{\rm I}+1/\beta_s.$$

При фиксированном значении s имеем

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{\lambda_n^{\rm I}}\geqslant\frac{1}{D_{ab}},\qquad \limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{\rm I}}{n^{2/3}}\leqslant D_{ab}.$$

Соотношение 1) и (69) вновь дают нам

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{\rm I}}{n^{2/3}}=D_{ab}. \tag{70}$$

Тем самым изучение задач I и II завершено. Если теперь считать, что β_n — суть характеристические числа ядра $B_{\rm III}$, то

$$1/\lambda_n^{\rm I}\leqslant 1/\lambda_n^{\rm III}\leqslant 1/\lambda_h^{\rm I}+1/\beta_s,$$

$$1/\beta_s\leqslant \text{const}\,(\ln s/s).$$

Отсюда с помощью тех же рассуждений заключаем, что асимптотический закон (69), или соответственно (70), справедлив также и для третьей краевой задачи. Сформулируем полученный результат.

Теорема 9. *Пусть давление на поверхности упругого тела J произвольной формы (объема J) равно нулю. Тогда число собственных колебаний с частотой, не превосходящей ν, при $\nu\to\infty$ асимптотически равно*

$$\frac{J}{6\pi^2}\,(a^{-3/2}+2b^{-3/2})\,\nu^3.$$

Получение этого закона и было целью данной работы. Если в приведенном доказательстве оценки провести более точно, то можно показать, что разность между искомым числом собственных колебаний и полученным для него асимптотическим выражением заведомо

$$\leqslant \text{const}\,\nu^3\sqrt{\frac{\ln\nu}{\nu}}\ ^{23}.$$

[23] *Weyl H.* Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spectralgesetze.— J. reine und angew. Math., 1913, Bd. 143, S. 177—203 и особенно 196—199.

О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЕЛ ПО МОДУЛЮ ОДИН*

§ 1. Основы. Линейный случай

Пусть на вещественной прямой отмечено бесконечное число точек

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots;$$

мы накручиваем прямую на некоторую окружность длины 1 и ставим вопрос о том, будут ли при этом находящиеся на отмеченных местах точки α_n покрывать окружность с равномерной плотностью. Так будет в том случае, когда число $n_{\mathfrak{a}}$ тех из первых n отмеченных точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, которые при накручивании попадают на дугу $\mathfrak{a}$, асимптотически задается в виде $|\mathfrak{a}|\, n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_{\mathfrak{a}}}{n} = |\mathfrak{a}|; \tag{1}$$

при этом $|\mathfrak{a}|$ обозначает длину дуги $\mathfrak{a}$. О равномерной плотности распределения [1] отмеченных точек на окружности мы будем говорить в том и только в том случае, когда это предельное равенство будет выполняться для каждой дуги $\mathfrak{a}$. Накручивание прямой на окружность означает, что вещественные числа рассматриваются по модулю 1, т. е. что два числа считаются равными в том случае, когда они отличаются на некоторое целое число. Среди чисел x, которые сравнимы по модулю 1 с некоторым заданным числом α, имеется одно и только одно такое, для которого выполняются неравенства $0 \leqslant x < 1$; это число, сравнимое с α по модулю 1, будет обозначаться через (α).

Для получения критерия равномерного распределения предположим, что числа $\alpha_n \bmod 1$ этому закону удовлетворяют. Я утверждаю тогда, что для любой ограниченной, интегрируемой в смысле Римана периодической с периодом 1 функции $f(x)$ можно сделать вывод о существовании предельного равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} f(\alpha_h) = \int_0^1 f(x)\, dx; \tag{2}$$

т. е. образованное при помощи дискретной совокупности чисел α_n среднее значение функции совпадает с непрерывным средним значением $\int_0^1 f(x)\, dx$. В действительности наше предположение означает, что (2) выполняется для каждой кусочно-постоянной функции с периодом 1. В сущности дело в том, что для заданной на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, ограниченной, интегрируемой в смыс-

* Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.— Math. Ann., 1916, Bd. 77, S. 313—352. Перевод С. П. Демушкина. Подобной же темы, что и в данной работе, касается появившаяся в «Göttinger Nachrichten» (заседание от 13 июня 1914 г.) заметка автора.

ле Римана функции $f(x)$ существуют такие две кусочно-постоянные функции f_1, f_2, которые ограничивают ее снизу и сверху ($f_1 \leqslant f \leqslant f_2$) и интегралы которых $\int\limits_0^1 f_1\,dx$, $\int\limits_0^1 f_2\,dx$ отличаются друг от друга сколь угодно мало. Если разность между этими интегралами равна ε, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} f_1(\alpha_h)=\int\limits_0^1 f_1\,dx \geqslant \int\limits_0^1 f\,dx-\varepsilon.$$

Для достаточно больших n поэтому

$$\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} f_1(\alpha_h) > \int\limits_0^1 f\,dx-2\varepsilon,$$

так что тем более

$$\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} f(\alpha_h) > \int\limits_0^1 f\,dx-2\varepsilon.$$

Точно так же, используя f_2, получаем, что для достаточно больших n левая часть меньше

$$\int\limits_0^1 f\,dx+2\varepsilon,$$

а тем самым наше утверждение доказано.

Простейшей функцией с периодом 1 является

$$e^{2\pi i x}=e(x);$$

она — *собственный аналитический инвариант классов по модулю* 1 [2]. Поставить в соответствие вещественному числу x комплексное $e(x)$ означает не что иное, как аналитически выполнить процесс накатывания числовой прямой на окружность длины 1. Для каждого целого числа m функция $e(mx)$ тоже имеет период 1, а поэтому при нашем введенном выше предположении имеем, в частности, для любого целого числа $m \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} e(m\alpha_h)=\int\limits_0^1 e(mx)\,dx=0.$$

В теории рядов Фурье устанавливается, что из специальных функций $e(mx)$ линейным образом может быть получена любая периодическая функция. Отсюда может быть получено следующее обращение нашего результата:

Теорема 1. *Если для каждого целого числа $m \neq 0$ выполняется предельное соотношение*

$$\sum_{h=1}^{n} e(m\alpha_h)=o(n),$$

то числа α_n mod 1 *удовлетворяют закону всюду равномерно плотного распределения.*

В самом деле, так как соотношение (2) очевидным образом выполняется для функции $e(0x) = 1$, то при сделанном в теореме 1 предположении оно будет выполняться для любого обрывающегося тригонометрического ряда

$$f(x) = a_0/2 + (a_1 \cos 2\pi x + b_1 \sin 2\pi x) + \ldots + (a_m \cos 2\pi m + \\ + b_m \sin 2\pi m x).$$

Если $f(x)$ — произвольная непрерывная функция с периодом 1, то, как известно, для каждого положительного числа ε можно найти такой обрывающийся тригонометрический ряд f_ε, что $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$. Тогда $f_1 = f_\varepsilon - \varepsilon$ и $f_2 = f_\varepsilon + \varepsilon$ будут двумя обрывающимися тригонометрическими рядами, которые ограничивают f снизу и сверху и интегралы которых

$$\int_0^1 f_1\, dx, \quad \int_0^1 f_2\, dx$$

отличаются друг от друга на 2ε. Отсюда, как и выше, мы делаем вывод о том, что соотношение (2) выполняется для функции f. Наконец, если f обозначает некоторую кусочно-постоянную функцию с периодом 1, то нетрудно найти (заменяя скачки f на крутые прямые откосы) две непрерывные функции f_1, f_2, которые ограничивают f снизу и сверху и интегралы которых отличаются друг от друга произвольно мало. Поэтому соотношение (2) будет выполняться также для такой функции f. В доказанной тем самым теореме 1 нами получен аналитический, легко применимый критерий для равномерного распределения числовых исследователей по модулю 1.

Мы можем теперь сразу же привести одно приложение.

Теорема 2. *Если* ξ — *иррациональное число, то целочисленные кратные* ξ:

$$1\xi,\ 2\xi,\ 3\xi,\ \ldots$$

расположены по модулю 1 всюду равномерно плотно.

Если m — некоторое целое число $\neq 0$ и мы положили $m\xi = \eta$, то нам следует лишь доказать, что

$$\sum_{h=1}^{n} e(h\eta) = o(n).$$

Но левая часть может быть просуммирована как геометрическая прогрессия, причем абсолютная величина суммы равна

$$\left| \frac{e((n+1)\eta) - e(\eta)}{e(\eta) - 1} \right| \leqslant \frac{2}{|e(\eta) - 1|} = \frac{1}{|\sin \pi\eta|},$$

а поэтому, так как η не является целым числом, она не только $= o(n)$, но и остается не превосходящей некоторой конечной границы.

Теорема 2 была доказана в 1909—1910 гг. Болем, Серпинским и мной на основании того факта, что иррациональное число ξ может быть представлено с ошибкой, равной $o(1/n)$, некоторой дробью, знаменатель которой равен

$o(n)$ [1]. Еще одно элементарное, т. е. не использующее показательных функций, доказательство было дано Бором. Оно получается следующим образом. Выберем некоторое большое целое число H и обозначим через ε наименьшее по абсолютной величине число, которое сравнимо с одним из чисел $1\xi, 2\xi, \ldots$ $\ldots, H\xi \bmod 1$. Пусть, например, $J\xi \equiv \varepsilon$. Далее, пусть $[1] = a_1b_1$ и $[2] = a_2b_2$ — два отрезка одинаковой длины. Можно так определить целое положительное число L, что $a_1 + L\varepsilon \bmod 1$ лежит между $a_2 - \varepsilon$ (исключая) и a_2 (включая). Отрезок от $a_1 + L\varepsilon$ до $b_1 + L\varepsilon$ обозначается через $[2']$. Всякий раз, как $n\xi \bmod 1$ попадает в отрезок $[1]$, так $(n + LJ)\,\xi \bmod 1$ попадает в отрезок $[2']$, и наоборот. Таким образом, если n_1 обозначает число тех среди n первых чисел

$$1\xi, 2\xi, 3\xi, \ldots, n\xi, \tag{3}$$

которые по модулю 1 попадают в $[1]$, и n_2, $n_{2'}$ имеют аналогичное значение для отрезков $[2]$, $[2']$, то $|n_1 - n_{2'}|$ остается при всех n ниже некоторой конечной границы C. Та часть $\mathfrak{s}$ отрезка $[2']$, которая выходит из $[2]$, имеет длину $<|\varepsilon|$. Если два числа $h\xi$ и $k\xi$ $(h < k) \bmod 1$ попадают в $\mathfrak{s}$, то вследствие этого $(k - h)\,\xi \bmod 1$ меньше, чем ε, а поэтому $k - h > H$. Таким образом, из чисел (3) в $\mathfrak{s}$ лежит самое большее $[n/H] + 1$. Число тех среди чисел (3), которые попадают в $[2]$ и $[2']$ одновременно (т. е. лежащие в $[2']$, но не в $\mathfrak{s}$), поэтому

$$\geqslant n_{2'} - [n/H] - 1.$$

Отсюда следует, что тем более

$$n_2 \geqslant n_{2'} - [n/H] - 1 \geqslant n_1 - [n/H] - 1 - C.$$

В результате получаем

$$\limsup \frac{n_1 - n_2}{n} \leqslant \frac{1}{H},$$

а так как H может быть выбрано сколь угодно большим, то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n_1 - n_2}{n} \leqslant 0.$$

Но то же самое будет выполняться при перестановке отрезков $[1]$ и $[2]$, поэтому должно быть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_1 - n_2}{n} = 0,$$

т. е. в отрезки $[1]$ и $[2]$ одинаковой длины попадает асимптотически одинаковое количество чисел (3). Разобьем теперь весь отрезок $[0, 1]$ на конечное число равных частей $\mathfrak{D}$ длины δ; на каждую часть $\mathfrak{D}$ попадает асимптотически одинаковое количество редуцированных чисел (3). Так как каждое число попадает в один и только один отрезок $\mathfrak{D}$, то количество чисел, попадающих на каж-

[1] *Bohl P.*— Crelles J., 1909, Bd. 135, S. 189—283; в частности, с. 222; *Sierpinski W.*— Krakau. Akad. Anz., math.-naturwiss. Kl. (A), 1910, Jan., S. 9; *Weyl H.*— Rend. Circ. mat. Palermo, 1910, vol. 30, p. 406.

дый отрезок $\mathfrak{D}$, должно быть асимптотически равно δn. Отсюда наше утверждение (1) следует прежде всего для каждого отрезка $\mathfrak{a}$, состоящего из конечного числа отрезков $\mathfrak{D}$, а затем, так как δ может быть выбрано сколь угодно малым, и для произвольного отрезка.

В заключение дополнительно заметим, возвращаясь к нашей общей постановке вопроса, что предельное соотношение (1), если его рассмотреть при некоторой заданной последовательности α_n для каждого отрезка, будет выполняться также равномерно для всех этих отрезков (длины <1). Действительно, разделим отрезок $[0, 1]$ на конечное число частей $\mathfrak{D}$, длина которых равна δ; тогда для всех n больше некоторой определенной границы и всех интервалов $\mathfrak{D}$ имеем

$$\delta (1 - \delta) n \leqslant n_{\mathfrak{D}} \leqslant \delta (1 + \delta) n.$$

Учитывая теперь при произвольно заданном отрезке $\mathfrak{a}$ с одной стороны те отрезки $\mathfrak{D}$, которые лежат внутри $\mathfrak{a}$ (они имеют общую длину $> |\mathfrak{a}| - 2\delta$), с другой стороны, те, которые вообще имеют с $\mathfrak{a}$ общие точки (и общая длина которых $< |\mathfrak{a}| + 2\delta$), для n, превосходящих упомянутую выше границу, получаем

$$(|\mathfrak{a}| - 2\delta)(1 - \delta) n \leqslant n_{\mathfrak{a}} \leqslant (|\mathfrak{a}| + 2\delta)(1 + \delta) n,$$

$$\left| \frac{n_{\mathfrak{a}}}{n} - |\mathfrak{a}| \right| \leqslant 3\delta + 2\delta^2.$$

§ 2. Перенесение на более высокие размерности. Приложения

Придавая p переменным $x_1, x_2, \ldots, x_p$ определенные значения

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, x_p = \alpha_p,$$

получим некоторую точку (α) в p-мерном пространстве; α_i будут ее координатами. Две такие точки мы называем сравнимыми (имеется в виду по модулю 1), если соответствующие координаты обеих точек сравнимы между собой по модулю 1. Среди всех точек, сравнимых с заданной (α):

$$x_1 \equiv \alpha_1, \quad x_2 \equiv \alpha_2, \ldots, \quad x_p \equiv \alpha_p \pmod 1,$$

имеется одна и только одна такая, которая принадлежит единичному кубу $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_p < 1$; мы называем ее приведенной. Отождествляя две точки в случае, когда они сравнимы друг с другом, или объединяя каждую систему сравнимых точек в одну-единственную «точку», получаем из обычного p-мерного пространства некоторое замкнутое p-мерное многообразие $\mathfrak{R}_p$. Часть пространства (т. е. замкнутое, расположенное в конечной части множество точек с определенным объемом V в смысле Кантора—Жордана) в случае, когда она не содержит двух друг с другом сравнимых точек, будет также и в $\mathfrak{R}_p$ (просто накрытой) частью пространства с объемом V. Линейное преобразование

$$x_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} x_k' + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

будет в том и только в том случае соответствовать некоторому преобразованию в $\mathfrak{R}_p$, когда оно целочисленное и унимодулярное (т. е. когда коэффициенты a_{ik} — целые числа [2] с определителем ± 1).

Пусть в $\mathfrak{R}_p$ задана некоторая бесконечная последовательность точек

$$\alpha(n)\colon\ x_1 \equiv \alpha_1(n),\quad x_2 \equiv \alpha_2(n), \ldots,\quad x_p \equiv \alpha_p(n) \pmod 1$$
$$\{n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Как и выше в случае $p = 1$, мы спрашиваем: когда эта последовательность располагается в $\mathfrak{R}_p$ всюду равномерно плотно, т. е. когда число точек $\alpha(i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, попадающих в некоторую произвольную ограниченную часть пространства с объемом V, асимптотически задается в виде Vn? На это отвечает следующий, в точности, как и выше доказываемый, критерий:

Теорема 3. *Последовательность точек $\alpha(n)$ заполняет $\mathfrak{R}_p$ всюду равномерно плотно, если для любой системы целых, не обращающихся одновременно в нуль чисел $m_1, m_2, \ldots, m_p$ выполняется предельное соотношение*

$$\sum_{h=1}^{n} e(m_1\alpha_1(h) + m_2\alpha_2(h) + \ldots + m_p\alpha_p(h)) = o(n).$$

Отсюда сразу же получаем следующее обобщение теоремы 2:

Теорема 4. *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — какие-либо p чисел, между которыми нет никакого целочисленного линейного соотношения (т. е. никакого соотношения*

$$l_1\xi_1 + l_2\xi_2 + \ldots + l_p\xi_p = l,$$

в котором коэффициенты l_i и l — одновременно в нуль не обращающиеся целые числа), то последовательность точек

$$(n\xi_1, n\xi_2, \ldots, n\xi_p)\{n = 1, 2, 3, \ldots\} \bmod 1$$

всюду равномерно плотная.

Утверждение о том, что эта последовательность точек расположена всюду плотно, составляет содержание известной аппроксимационной теоремы Кронекера [3]. Приводимая здесь более сильная теорема была представлена мной сначала летом 1913 г. в докладе Геттингенскому математическому обществу и доказана подобным приводимому здесь способом. В основном совпадающие доказательства теоремы 2 Серпинского, Боля и мое не переносятся на многомерный случай, в то время как с элементарным доказательством Бора это возможно. Что касается неожиданных приложений, полученных Бором из теоремы Кронекера, и приведенной здесь более сильной теоремы к теории ζ-функции Римана, то мы укажем на планируемую книгу «Дзета-функция Римана и теория простых чисел» Бора и Литтлвуда [[3]]. Вопрос о том, как меняется высказывание в случае, когда между ξ_i выполняется одно или несколько целочисленных соотношений, обсуждается в § 5.

---

[2] a_i могут быть произвольными числами.

[3] Die Periodensysteme von Funktionen reeller Variablen.— S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1884, S. 1071—1080; Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen.— Ibid., S. 1179—1193, 1271—1299. (Werke, Bd. 4, S. 32—109).

Дискретную последовательность целых положительных чисел, которую пробегает параметр n в теореме 4, можно заменить непрерывным параметром t, который мы интерпретируем как время. В результате получаем:

Теорема 5. *Если некоторая точка в $\mathfrak{R}_p$ движется с постоянной скоростью по прямой линии:*

$$x_i \equiv \alpha_i + \gamma_i t \quad (\alpha_i, \gamma_i \text{ — константы}), \tag{4}$$

то относительное время пребывания ее в произвольной части пространства будет совпадать с числом, задаваемым объемом этой части пространства. При этом предполагается, что задающие направление числа γ_i не удовлетворяют никакому однородному целочисленному линейному соотношению.

Если при большом времени наблюдения от $t = 0$ до t через t_G обозначить общую длину интервалов времени, при которых движущаяся точка попадает в область G объема V, то под относительным временем пребывания в области G понимается $\lim\limits_{t\to\infty}(t_G/t)$. За объем области G в $\mathfrak{R}_p$ можно принять априорную вероятность того, что произвольно выбранная точка попадет в эту область G. Таким образом, в сформулированной теореме утверждается, что для прямолинейного проходимого с постоянной скоростью пути *относительное время пребывания в некоторой области равно априорной вероятности.* Связь этого утверждения со статистической механикой очевидна. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_p$ — p целых чисел, не все равные нулю, и положим

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_p\alpha_p = \alpha, \quad m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \ldots + m_p\gamma_p = \gamma.$$

Тогда перенесенный на непрерывно изменяющийся параметр t критерий (теорема 3) позволяет утверждать, что для доказательства теоремы 5 нужно лишь установить равенство

$$\int\limits_0^1 e(\alpha + \gamma t)\, dt = o(t).$$

Но это равенство очевидно, так как интеграл в левой части равен

$$\frac{e(\alpha + \gamma t) - e(\alpha)}{\gamma} = O(1).$$

Теорема 5 может быть сформулирована различными другими способами. *Замкнутым евклидовым пространством* называется любое замкнутое p-мерное многообразие, обладающее тем свойством, что у каждой его точки имеется такая окрестность, в которой выполняется геометрия Евклида [4]. $\mathfrak{R}_p$ является таким замкнутым евклидовым пространством. Если Γ_0 — какая-либо состоящая из конечного числа, скажем ν, целочисленных унимодулярных ли-

[4] Проблема, состоящая в том, чтобы сформулировать аксиомы как евклидовой, так и неевклидовой геометрии так, что в них высказывается что-то лишь об окрестности каждой отдельной точки (причем без упоминания о размерности), а затем исследовать, какие различные в топологическом смысле пространства этим аксиомам удовлетворяют, называется по инициаторам такой постановки вопроса «проблемой пространственных форм Клиффорда—Клейна». Ср. главным образом: *Klein F.* Über Nicht-Euklidische Geometrie.— Math. Ann., Bd. 37.

нейных преобразований пространства $\mathfrak{R}_p$ группа и каждая система из ν эквивалентных относительно группы Γ_0 точек пространства $\mathfrak{R}_p$ понимается как одна единственная точка, то из $\mathfrak{R}_p$ возникает замкнутое евклидово пространство $\mathfrak{R}_p^{\Gamma_0}$, для которого $\mathfrak{R}_p$ будет неограниченным и неразветвленным конечно-листным накрывающим пространством (в случае, когда ни одно из принадлежащих группе Γ_0 преобразований не имеет неподвижных точек в $\mathfrak{R}_p$). Можно строго доказать (это будет сделано в дополнении), что любое замкнутое евклидово пространство является таким пространством $\mathfrak{R}_p^{\Gamma_0}$. Таким образом, можно утверждать:

Теорема 6. *Каждая прямая в замкнутом евклидовом пространстве, за исключением легко характеризуемого множества особых прямых, пробегает его таким образом, что к любой точке пространства она подходит сколь угодно близко и в любых областях пространства с одинаковыми объемами находится в среднем одинаковое время.*

Пусть в пространстве $\mathfrak{R}_p$ отождествляются две точки, координаты которых *с точностью до знака* совпадают по модулю 1, так что каждая отдельная точка определяется сравнениями

$$x_1 \equiv \pm\alpha_1, \quad x_2 \equiv \pm\alpha_2, \ldots, \quad x_p \equiv \pm\alpha_p \pmod 1$$

при допустимости всех 2^p комбинаций знаков. Тогда каждая точка этого пространства в кубе с длиной ребра $1/2$:

$$0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, \quad x_p \leqq 1/2,$$

имеет одного и только одного представителя. Пробегаемая с постоянной скоростью прямая (4) представляется в этом кубе в виде зигзагообразного пути, который был бы описан материальной точкой в p-мерном пространстве, если бы она от граней этого куба отскакивала по обычным законам отражения (в случае $p = 2$ это будет путь биллиардного шара). Если между компонентами скорости по координатным осям не выполняется никакого однородного целочисленного линейного соотношения, то, следовательно, движущаяся по этому закону точка будет находиться в областях куба с равными объемами в среднем одинаково по длительности. То, что она к каждой точке куба подходит произвольно близко, было уже показано ранее Кенигом и Цуком на основании аппроксимационной теоремы Кронекера [5]. Не представило бы никакого труда полностью рассмотреть возможные исключительные случаи (Кениг и Цук тоже говорят о них).

Как известно, пространство $\mathfrak{R}_2$ можно взаимно однозначно и конформно отобразить на *тор*; прямые при этом переходят в локсодромы на торе, которые его меридианы пересекают всюду под одним и тем же углом. При этом можно получить тор любого вида, если заменить пространство $\mathfrak{R}_2$ на такое двумерное многообразие, в котором две точки (x', y'), (x'', y'') совпадают в том и только в том случае, когда

$$x' \equiv x'' \pmod a, \qquad y' \equiv y'' \pmod b;$$

[5] *König D., Szücs A.* Mouvement d'un point abandonné à l'intérieur d'un cube.— Rend. Circ. mat. Palermo, 1913. Vol. 36.

здесь a, b обозначают два предварительно заданных и фиксированных вещественных числа. Кроме того, каждое такое многообразие может быть превращено в $\mathfrak{R}_2$ с помощью подходящего аффинного преобразования координат xy. Тор получается вращением некоторой окружности радиуса r; пусть $\varkappa$ — гауссова кривизна в каждой точке поверхности тора. Тогда мы можем сказать: *локсодрома на торе* (за исключением легко характеризуемых случаев, когда она является замкнутой кривой) *располагается так, что она его покрывает всюду плотно; плотность этого покрытия, однако, в различных точках не одна и та же, но пропорциональна* $1 - r^2\varkappa$ (и, таким образом, она больше в частях тора, расположенных ближе к оси вращения, чем в более удаленных частях).

Как очевидно, теорему 5 для $p = 2$ можно сформулировать также в таком виде: *если* $\overrightarrow{\beta\delta}$ *— некоторый отрезок*[6] *в* $\mathfrak{R}_2$, *не параллельный прямолинейному пути* (4) *движующейся точки, то в среднем за единицу времени движущаяся точка пересекает этот отрезок с частотой, задаваемой площадью параллелограмма, образованного отрезком* $\overrightarrow{\beta\delta}$ *и вектором скорости* (γ_1, γ_2). При этом предполагается, что отношение компонент скорости $\gamma_1 : \gamma_2$ иррационально.

Эта формулировка принадлежит Болю, и была получена им из теоремы 2. Он использовал ее для получения ответа на поставленный Лагранжем вопрос о *наложении колебаний*. Получающийся из наложения m простых колебаний колебательный процесс описывается формулой

$$z = \sum_{i=1}^{m} C_i e(\alpha_i + \gamma_i t), \tag{5}$$

в которой α_i, γ_i вещественные, C_i — положительные константы; геометрически на комплексной z-плоскости он может быть представлен в виде эпицикла. Мы пишем $z = r \cdot e(\sigma)$, обозначая через r ($\geqslant 0$) абсолютную величину и через σ аргумент для z. Лагранж поставил вопрос о том, будет ли отношение аргумента σ ко времени приближаться в среднем к некоторому постоянному значению, т. е. будет ли существовать предел $\lim\limits_{t\to\infty} (\sigma/t)$. В одном особом случае Лагранж уже сам смог ответить на этот вопрос; а именно, если одно из чисел C_i, например C_m, больше суммы всех остальных, то, даже если аргументы $\alpha_i + \gamma_i t$ заменены на независимые переменные, всегда выполняются соотношения

$$|\sigma - (\alpha_m + \gamma_m t)| < 1/2, \qquad \lim_{t\to\infty} (\sigma/t) = \gamma_m.$$

Боль смог также в случае $m = 3$ рассмотреть нелагранжеву ситуацию. Он доказал, что *если* πA_i *— углы треугольника из трех сторон длин* C_i, *то*

$$\lim_{t\to\infty} (\sigma/t) = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3. \tag{6}$$

При этом предполагается, что между γ_i не выполняется никакого целочисленного линейного однородного соотношения. При доказательстве можно счи-

[6] Конечно, отрезок $\overrightarrow{\beta\delta}$ определен в $\mathfrak{R}_p$ начальной и конечной точками β и δ не однозначно.

тать $\alpha_3 = \gamma_3 = 0$,

$$z = re\,(\sigma) = C_1 e\,(x_1) + C_2 e\,(x_2) + C_3 \qquad (7)$$

как функция от x_1, x_2 обращается в нуль в двух точках

$$\beta: \begin{array}{l} x_1 \equiv \beta_1 = \frac{1 - A_2}{2} \\ x_2 \equiv \beta_2 = \frac{1 + A_1}{2} \end{array} \pmod 1; \quad \delta: \begin{array}{l} x_1 \equiv \delta_1 = \frac{1 + A_2}{2} \\ x_2 \equiv \delta_2 = \frac{1 - A_1}{2} \end{array} \pmod 1$$

из $\mathfrak{R}_2$. Произведя разрез пространства $\mathfrak{R}_2$ по отрезку

$$\overrightarrow{\beta\delta}: \begin{array}{l} x_1 \equiv \beta_1 \tau + \delta_1 (1 - \tau) \\ x_2 \equiv \beta_2 \tau + \delta_2 (1 - \tau) \end{array} \pmod 1 \quad \{0 \leqslant \tau \leqslant 1\},$$

при помощи очень простых геометрических рассмотрений можно показать, что определяемая равенством (7) функция $\sigma = \sigma\,(x_1, x_2)$, разветвленная в точках β, δ, в *разрезанном* пространстве $\mathfrak{R}_2$ будет непрерывной и однозначной, а при переходе через отрезок $\overrightarrow{\beta\delta}$ она претерпевает скачок в 1. Отсюда сразу же получается утверждение Боля.

Так как теорема 5 справедлива для произвольного p, не представляет труда ответить на вопрос Лагранжа не только при $m = 3$, но и при всех m (что Болю не удалось сделать). При $m = 4$ нелагранжев случай распадается далее на два подслучая. Мы приведем здесь результат для одного из этих подслучаев [7]:

Теорема 7. *Пусть заданы четыре положительных числа $C_1 < C_2 < C_3 < C_4$, удовлетворяющих соотношениям $C_1 + C_4 > C_2 + C_3$ и $C_4 < C_1 + C_2 + C_3$. В таком случае можно считать, что все возможные не сравнимые положения, которые способен занять плоский четырехугольник со сторонами C_i, пробегаются в определенном циклическом порядке. Если обозначить через $2\pi\xi_i$ углы, которые образуются сторонами C_i какого-нибудь такого четырехугольника с некоторой фиксированной прямой той же плоскости, то разности углов $2\pi\,(\xi_i - \xi_k)$ при прохождении введенного цикла все возвращаются к своим первоначальным значениям. Введем в рассмотрение распространенный на какой-либо цикл интеграл*

$$A_1 = {}^1/_2 \int [(\xi_2 d\xi_3 - \xi_3 d\xi_2) + (\xi_3 d\xi_4 - \xi_4 d\xi_3) + (\xi_4 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_4)],$$

и аналогично для A_2, A_3, A_4. Эти интегралы не зависят от того, каким способом плоский четырехугольник пробегает все свои не сравнимые положения, а также от того, относительно какой фиксированной прямой измеряются углы $2\pi\xi_i$. Назовем их поэтому интегральными инвариантами четырехугольника. Их сумма равна 1 [4]. *При суперпозиции четырех простых колебаний*

[7] Ср. в связи с этим доклад, сделанный мной на весенней сессии Швейцарского математического общества в 1914 г.: Une application de la théorie des nombres à la mécanique statistique et à la théorie des perturbations.— Enseign. math., 1914, vol. 16, N 6.

с амплитудами C_i возникает колебание

$$z = re(\sigma) = \sum_{i=1}^{4} C_i e(\alpha_i + \gamma_i t);$$

аргумент σ растет в среднем со скоростью $\sum_{i=1}^{4} \gamma_i A_i$ за единицу времени в случае, если между γ_i нет никакого целочисленного линейного однородного соотношения.

По-видимому, интегральные инварианты A_i связаны со сторонами C_i четырехугольника соотношениями, аналогичными тем, которые имеют место соответственно в плоской тригонометрии между углами и сторонами треугольника.

Поставленный Лагранжем вопрос имеет особый интерес в *астрономии*. Там r обозначает числовой эксцентриситет орбиты какой-либо планеты, а σ — величину перигелия (или r — синус наклонения орбиты относительно неизменной плоскости системы планет и σ — долготу узла). Таким образом, формулы вида (5) представляют, в частности, вековые изменения величин перигелия и долготы узла. Нелагранжев случай реализуется в нашей солнечной системе лишь для *Венеры* и *Земли*.

§ 3. Ряд $\Sigma e(\varphi(n))$ для некоторого многочлена φ

До сих пор мы предполагали, что рассматривавшиеся нами точки из пространства $\mathfrak{R}_p$ зависели как от непрерывного, так и от целочисленного параметра линейным образом. Мы переходим теперь к более общему случаю, когда эта зависимость задается многочленом более высокой степени. Если параметр t (время) пробегает непрерывно все значения, то соответствующие вопросы могут быть рассмотрены на основании формулы

$$\int_0^\infty e(\varphi(t))\,dt = o(t), \tag{8}$$

которая имеет место в случае, когда $\varphi(t)$ — многочлен от t, не равный константе. После того как линейный случай рассмотрен, можно предположить, что степень многочлена $\varphi(t)$ больше чем 1. Определим t_0 так, чтобы при $t \geqslant t_0$ производная имела всюду один и тот же знак, например положительный, и произведем в интеграле

$$2\pi i \int_{t_0}^{t} e(\varphi))\,dt \qquad (t > t_0)$$

подстановку $\varphi(t) = x$. Он перейдет тогда в

$$2\pi i \int_{t_0}^{t} e(x)\,\frac{dx}{\varphi'(t)} = \int_0^t \frac{de(x)}{\varphi'(t)}\,.$$

Интегрирование по частям приводит к продолжению этого равенства:

$$\left[\frac{e(x)}{\varphi'(t)}\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} e(\varphi(t))\, dt.$$

Так как интеграл $\int_0^\infty \frac{|\varphi''|}{\varphi'^2} dt$ сходится, отсюда получаем сходимость интеграла

$$\int_0^\infty e(\varphi(t))\, dt.$$

Таким образом, равенство (8) доказано даже в более сильной форме:

$$\int_0^t e(\varphi(t))\, dt = O(1).$$

Используя наш критерий, в результате отсюда получаем:

Теорема 8. *Пусть* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, . . ., $\varphi_p(t)$ — *такие* p *многочленов, что никакая их целочисленная нетривиальная линейная комбинация не редуцируется в константу* [5]. *Тогда движущаяся в пространстве* $\mathfrak{R}_p$ *по закону*

$$x_i \equiv \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

точка будет находиться в областях пространства с равными объемами (при бесконечно большом времени наблюдения) в среднем одинаковое время.

Исследование становится более трудным, если непрерывный параметр t заменяется на дискретный n, который пробегает ряд натуральных чисел. Все сводится к тому, чтобы доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Если в многочлене* $\varphi(z)$ *степени* q:

$$\varphi(z) = \alpha_q z^q + \alpha_{q-1} z^{q-1} + \ldots + \alpha_0,$$

один из коэффициентов $\alpha_q, \alpha_{q-1}, \ldots, \alpha_1$ *иррационален, то выполняется предельное равенство*

$$\sum_{h=0}^{n} e(\varphi(h)) = o(n). \tag{9}$$

{Дополнение. *Если* α_l — *тот из иррациональных коэффициентов, который имеет наибольший индекс* l, *то соотношение* (9) *выполняется при фиксированном* α_l *равномерно относительно всех значений последующих коэффициентов* $\alpha_{l-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$}.

Для $\varphi(z) = \alpha z^q$ эта теорема была высказана сперва Харди и Литтлвудом в Кембридже (1912) [8]. Для многочлена $\varphi(z)$ степени 2 оба автора опубликовали затем доказательство, основанное на применении интегральной теоремы Коши[9].

[8] В их докладе «Some problems of Diophantine approximation»; ср. сообщения конгресса [6].

[9] *Hardy G. H., Littlewood J. E.* — Acta math., vol. 37, p. 193—238, теорема 2.14 на с. 213. Эта работа является продолжением начинающейся на с. 155 статьи «Некоторые проблемы диофантовых приближений», третья часть которой в настоящее время все еще отсутствует [7].

Как я узнал из любезного сообщения Харди, теорема 9 получена ими точно в том же объеме, что и мною, и их доказательство, совершенно отличное от моего, появится вскоре в журнале «Acta mathematica».

Рассмотрим в обычном q-мерном пространстве все точки решетки $r = (r_1, r_2, \ldots, r_q)$, т. е. все точки с целочисленными координатами r_i, которые принадлежат «октаэдральной» области $|r| = |r_1| + |r_2| + \ldots + |r_q| \leqslant n$. Их число обозначается через n_q и равно

$$2^q\binom{n}{q} + 2^{q-1}\binom{n}{q-1}\binom{q}{1} + 2^{q-2}\binom{n}{q-2}\binom{q}{2} + \ldots + 1.$$

Однако точное значение величины n_q не важно; нам понадобится лишь имеющая место для достаточно больших n асимптотическая формула (с геометрически-числовой точки зрения очевидная)

$$n_q \sim (2n)^q/q!.$$

Доказательству теоремы 9 мы предпошлем следующую вспомогательную лемму:

Пусть ξ — некоторое иррациональное число. Среди n_q точек решетки

$$r = (r_1, r_2, \ldots, r_q),$$

которые принадлежат октаэдральной области $|r| \leqslant n$, выделим те, для которых число

$$r_1 r_2 \ldots r_q \xi \bmod 1$$

попадает в произвольно заданный отрезок ab длины $c = b - a < 1$; утверждается, что число их асимптотически равно $c \cdot n_q$.

Согласно установленному в теореме 1 критерию для доказательства следует лишь установить предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n_q} \sum_{|r| \leqslant m} e(r_1 r_2 \ldots r_q \xi) = 0. \tag{10}$$

Действительно, если это равенство выполняется для любого иррационального числа ξ, то оно будет выполняться также для любого целого кратного $m\xi$ от ξ $(m \neq 0)$. Так как для $q = 1$ доказываемое равенство справедливо, то для доказательства в общем случае можно воспользоваться индуктивным переходом от $q - 1$ к q. Произведем суммирование в левой части (10) сначала по r_q, а затем по остальным r. Если r' обозначает «спроектированную» точку решетки $(r_1, r_2, \ldots, r_{q-1})$ в $(q - 1)$-мерном координатном пространстве $(x_q = 0)$, то мы полагаем, таким образом,

$$\sum_r = \sum_{r'} \sum_{r_q}.$$

Внешнее суммирование по r' при этом распространяется на октаэдральную область $|r'| \leqslant n$, а для каждого такого r' внутреннее суммирование — на все удовлетворяющие условию

$$|r_q| \leqslant n - |r'|$$

целые числа. Внутреннее суммирование можно провести (геометрическая прогрессия); положив

$$r_1 r_2 . . . r_{q-1} = R,$$

получим, что

$$\left|\sum_{r_q} e(r_q R\xi)\right| \leqslant 1/|\sin(\pi R\xi)|.$$

Так как эта сумма содержит самое большее $2n+1$ слагаемых, то, кроме того, выполняется неравенство

$$\left|\sum_{r_q} e(r_q R\xi)\right| \leqslant 2n+1.$$

Фиксируем некоторое положительное число ε ($<{}^1/_2$). Предположим, что наше утверждение для $q-1$ уже установлено; в таком случае мы знаем, что число тех из n_{q-1} точек решетки r', для которых $R\xi \bmod 1$ лежит между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$, асимптотически равно $2\varepsilon \cdot n_{q-1}$, а следовательно, для достаточно большого n даже меньше $3\varepsilon \cdot n_{q-1}$. Для таких r' мы применяем вторую из приведенных выше оценок внутренней суммы, для остальных первая оценка дает

$$\left|\sum_{r_q} e(r_q R_\xi)\right| \leqslant 1/\sin \pi\varepsilon.$$

В целом получаем

$$\left|\sum_{r} e(r_1 r_2 \ldots r_q \xi)\right| = \left|\sum_{r}\right| \leqslant \sum_{r'}\left|\sum_{r_q}\right| \leqslant n_{q-1}\{3\varepsilon(2n+1) + 1/\sin \pi\varepsilon\}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_{q-1}(2n+1)}{n_q} = q,$$

то поэтому для достаточно больших n имеем

$$\frac{1}{n_q}\left|\sum_{r} e(r_1 r_2 \ldots r_q \xi)\right| < \varepsilon(3q+1),$$

что и было содержанием нашего утверждения.

При доказательстве теоремы 9 нам нужно будет применить такое следствие доказанной леммы: систем целых чисел $r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}$, для которых

$$|r'| = |r_1| + |r_2| + \ldots + |r_{q-1}| \leqslant n$$

и $R\xi = r_1 r_2 \ldots r_{q-1}\xi \bmod 1$ лежит между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$, меньше чем $3\varepsilon \cdot n_{q-1}$.

Проведя предварительную подготовку, мы можем приступить теперь к исследованию суммы

$$\sigma_n = \sum_{h=0}^{n} e(\varphi(h)).$$

Мы предположим сначала, что иррационален старший коэффициент α_q многочлена $\varphi(z)$.

Шаг 1. Сопряженным к σ_n будет

$$\bar{\sigma}_n = \sum_{h=0}^{n} e(-\varphi(h));$$

таким образом,

$$|\sigma_n|^2 = \sigma_n \bar{\sigma}_n = \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} e(\varphi(h)) \cdot e(-\varphi(k)) = \sum_{h,\,k} e(\varphi(h) - \varphi(k)).$$

Положим $h = k + r$; тогда

$$\varphi(h) = \varphi(k + r) = \varphi(k) + r\varphi(r, k).$$

$\varphi(r, k)$ является целой рациональной функцией от k и r, которая содержит лишь члены $(q - 1)$-й или более низких степеней. В ее выражение не входит коэффициент α_0, и разложение по уменьшающимся степеням k начинается с члена $q\alpha_q k^{q-1}$. Таким образом, мы имеем теперь

$$|\sigma_n|^2 = \sum_{r} \sum_{k} e(r\varphi(r, k)).$$

Область суммирования описывается неравенствами

$$0 \leqslant k \leqslant n, \qquad 0 \leqslant k + r \leqslant n.$$

Таким образом, r пробегает весь отрезок от $-n$ до $+n$ и для каждого такого r во внутренней сумме k пробегает все целые числа отрезка от 0 до $n - |r|$ или от $|r|$ до n в соответствии с тем, будет ли $r \geqslant 0$ или $r \leqslant 0$.

Шаг 2. Воспользовавшись обозначением n_q при $q = 1, 2, \ldots$ с тем же смыслом, что и в лемме, из последнего соотношения при помощи неравенства Шварца получим, что

$$|\sigma_n|^4 \leqslant n_1 \sum_{r} \Big| \sum_{k} e(r\varphi(r, k)) \Big|^2.$$

Применим теперь использованный при шаге 1 прием. Имеем

$$\Big| \sum_{k} e(r\varphi(r, k)) \Big|^2 = \sum_{k,\,l} e(r\varphi(r, k) - r\varphi(r, l)).$$

Запишем опять

$$k = l + s, \qquad \varphi(r, k) = \varphi(r, l + s) = \varphi(r, l) + s\varphi(r, s, l).$$

Целая рациональная функция $\varphi(r, s, l)$ от r, s и l содержит лишь члены степеней $\leqslant q - 2$ и при разложении по убывающим степеням относительно l начинается с члена $q(q - 1)\alpha_q l^{q-2}$; коэффициенты α_0, α_1 в нее больше не входят. На данной стадии

$$|\sigma_n|^4 \leqslant n_1 \sum_{r,\,s} \sum_{l} e(rs\varphi(r, s, l)).$$

(r, s) пробегает здесь двумерный «октаэдр» $|r| + |s| \leqslant n$ и l изменяется в отрезке, который возникает из описанного выше отрезка суммирования для k, если снизу или сверху выбросить $|s|$ чисел в соответствии с тем, будет ли $s \geqslant 0$ или $s \leqslant 0$.

Ш а г 3 начинается с повторного применения неравенства Шварца, что дает

$$|\sigma_n|^8 \leqslant n_1^2 n_2 \sum_{r,s} \Big|\sum_l e(rs\varphi(r,s,l))\Big|^2,$$

и продолжается затем далее, как и выше.

Этот процесс следует продолжить до $(q-1)$-го шага. Будем различать при этом буквы суммирования $h, k, l, \ldots; r, s, \ldots$ индексами так, что будем иметь:

$$\begin{aligned} h_1 &= r_1 + h_2; & \varphi(h_1) &= \varphi(h_2) + r_1\varphi(r_1, h_2),\\ h_2 &= r_2 + h_3; & \varphi(r_1, h_2) &= \varphi(r_1, h_3) + r_2\varphi(r_1, r_2, h_3),\\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ h_{q-1} &= r_{q-1} + h; & \varphi(r_1, \ldots, r_{q-2}, h_{q-1}) &= \varphi(r_1, \ldots, r_{q-2}, h) + r_{q-1}\varphi(r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}, h). \end{aligned}$$

Последняя функция φ, зависящая от q аргументов $r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}, h$, будет содержать лишь члены степеней 0 или 1, а коэффициентом, на который умножается h, будет $q!\alpha_q$:

$$\varphi(r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}, h) = q!\alpha_q h + (\beta_0 + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \ldots + \beta_{q-1} r_{q-1}).$$

Коэффициенты β вычисляются по обоим первым коэффициентам α_q, α_{q-1} многочлена $\varphi(z)$ способом, который нас в данный момент не интересует. Вводя следующие обозначения:

$$R = r_1 r_2 \ldots r_{q-1}, \qquad \rho = R(\beta_0 + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \ldots + \beta_{q-1} r_{q-1}),$$

$$\xi = q!\,\alpha_q, \qquad Q = 2^{q-1}, \qquad N = (n_1)^{2^{q-3}} (n_2)^{2^{q-4}} \ldots n_{q-3}^2 n_{q-2}$$

(для $q = 2$ следует положить $N = 1$), получаем, в конце концов, неравенство

$$|\sigma_n|^Q \leqslant N \sum_{r'} \Big\{e(\rho) \sum_h e(R\xi h)\Big\}, \tag{11}$$

в котором $r' = (r_1, r_2, \ldots, r_{q-1})$ пробегает октаэдр $|r'| \leqslant n$, а h лежит в зависящем от r' отрезке из $n + 1 - |r'|$ целых чисел; последний получается из $0n$ таким образом, что каждый раз $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$ выбрасывается $|r_i|$ чисел снизу или сверху в зависимости от того, будет ли $r_i \geqslant 0$ или $\leqslant 0$. Заменяя в выражении для N каждое n_i на n^i, получим, что N перейдет в степень от n с показателем степени

$$1\cdot 2^{q-3} + 2\cdot 2^{q-4} + 3\cdot 2^{q-5} + \ldots + (q-2)\cdot 2^0 = Q - q.$$

Поэтому для самого N выполняется асимптотическая формула

$$N \sim \varkappa \cdot n^{Q-q},$$

в которой $\varkappa$ — константа, зависящая лишь от q.

В (11) мы можем оценить внутреннюю сумму по h, которая является геометрической прогрессией. Для всех r' с $R\xi \bmod 1$, не лежащем между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$, получаем

$$\Big|\sum_h\Big| \leqslant 1/\sin \pi\varepsilon;$$

для остальных r', число которых при достаточно большом n меньше, чем $3\varepsilon \times$ $\times n_{q-1}$, мы опять используем грубую оценку:

$$\Big|\sum_h\Big| \leqslant n+1.$$

В результате из формулы (11) получаем неравенство

$$|\sigma_n|^Q \leqslant N \cdot n_{q-1}\{3\varepsilon(n+1)+1/\sin\pi\varepsilon\}.$$

При достаточно большом n поэтому будет

$$\left|\frac{\sigma_n}{n}\right|^Q \leqslant 3\varepsilon\left(\frac{\varkappa\cdot 2^{q-1}}{(q-1)!}+1\right),$$

и доказательство закончено. Если старший коэффициент не иррационален и, скажем, $\alpha_q, \alpha_{q-1}, \ldots, \alpha_{l+1}$ рациональны, а α_l иррационален, то пусть G — общий знаменатель дробей $\alpha_q, \alpha_{q-1}, \ldots, \alpha_{l+1}$. Разобьем тогда сумму $\sum\limits_n$ на G частей в соответствии с остатком, получающимся от $n \bmod G$. Таким образом, мы заменяем n на $Gn+r$ и имеем

$$\sum_{h=0}^{G-n-1} e(\varphi(h)) = \sum_{r=0}^{G-1}\sum_{h=0}^{n} e(\varphi(Gh+r)).$$

Но $\varphi(Gz+r)$ для каждого $r=0, 1, \ldots, G-1$ сравним по модулю 1 [10] с некоторым многочленом $\varphi_r(z)$ степени l, старший коэффициент которого $\alpha_l G^l$ иррационален. Таким образом, каждая из отдельных G сумм, на которые мы разбили нашу первоначальную сумму, будет равна $o(n)$.

Наряду с σ_n можно рассмотреть ряды вида

$$\sum n e(\varphi(n)), \qquad \sum \frac{1}{n} e(\varphi(n))$$

и вообще ряд

$$\sum_n a_n e(\varphi(n)),$$

в котором $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — положительные числа, сумма которых сходится.

Теорема 10. *Предельное соотношение*

$$\sum_{h=0}^{n} a_h e(\varphi(h)) = o\Big(\sum_{h=0}^{n} a_h\Big)$$

выполняется для любого сходящегося ряда $a_0+a_1+a_2+\ldots$, *положительные члены которого монотонно убывают. Если все члены монотонно возрастают, то то же самое утверждение будет верным во всяком случае тогда, когда*

$$na_n = O\Big(\sum_{h=0}^{n} a_h\Big);$$

т. е. всегда, когда a_n *растет как степень* n.

[10] Два многочлена называются сравнимыми по модулю 1, если их разность является многочленом, у которого все коэффициенты — целые числа.

Результат получается при помощи известного способа частичного суммирования. Имеем

$$\sum_{h=0}^{n} a_h e(\varphi(h)) = a_n \sigma_n + \sum_{h=0}^{n-1} \sigma_h (a_h - a_{h+1}).$$

Если ε — некоторое заданное положительное число, то, начиная с некоторого определенного номера h, имеем $|\sigma_h| < \varepsilon \cdot h$, а поэтому

$$\left| \sum_{h=0}^{n} a_h e(\varphi(h)) \right| \leqslant C_\varepsilon + \varepsilon n a_n + \varepsilon \sum_{h=0}^{n-1} h |a_h - a_{h+1}|,$$

где C_ε обозначает зависящую, может быть, от ε, но не от n константу. Если a_n монотонно убывает, получим, что сумма справа равна

$$\sum_{h=0}^{n-1} h(a_h - a_{h+1}) = \sum_{h=1}^{n} a_h - n a_n$$

и

$$\left| \sum_{h=0}^{n} a_h e(\varphi(h)) \right| \leqslant C_\varepsilon + \varepsilon \sum_{h=0}^{n} a_h.$$

Тем самым этот случай рассмотрен. Если же a_n монотонно возрастает, то сумма справа равна

$$\sum_{h=0}^{n-1} h(a_{h+1} - a_h) = n a_n - \sum_{h=1}^{n} a_h < n a_n,$$

и мы получаем

$$\sum_{h=0}^{n} a_h e(\varphi(h)) \leqslant C_\varepsilon + 2\varepsilon n a_n.$$

В частности, отметим равенство [11]

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{e(\varphi(h))}{h} = o(\lg n).$$

[11] Первоначальной целью исследования Харди—Литтлвуда было получение предельного соотношения

$$\zeta(1 + ti) = o(\lg t)$$

для ζ-функции Римана, т. е.

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{e^{ti \lg n}}{n} = o(\lg t). \qquad (*)$$

Это может быть доказано при помощи примененного здесь к $\Sigma e(\varphi(n))$ способа точно так же; утверждение об этом, как мне кажется, даже по сравнению с теоремой 9 менее глубокое, так как для получения соотношения (*) не нужно опираться на «критерий» (теоремы 1). Я опубликую свое доказательство позднее (возможно, как дополнение к работе Харди и Литтлвуда на эту тему) [8].

Очень важны также случаи, когда ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ сходится. Рассмотрим, например, простейшую θ-функцию

$$\theta(z; v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{n^2} e^{2\pi i n v} \qquad (|z| < 1)$$

для вещественных значений аргумента v (z — обычно обозначаемый через q модуль). Положив $|z| = r$, запишем $z = re^{2\pi i \alpha}$ и сохраним в сумме сначала лишь часть, в которой n пробегает значения от 0 до $+\infty$. θ-ряд перейдет при этом в

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{n^2} e(\varphi(n)) \, \{\varphi(n) = \alpha n^2 + vn\}.$$

Мы хотим исследовать поведение θ-функции в случае, когда модуль z по некоторому радиусу приближается к точке, лежащей на единичной окружности, т. е. мы хотим приближать r (при фиксированных α и v) от меньших значений к 1. Рассматриваемый ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n,$$

если положить $c_n = 0$ в случае, когда n не является квадратом; если же $n = m^2$, то $c_n = e(\varphi(m))$. Частичное суммирование приводит теперь к тому, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (r^n - r^{n+1}) = (1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n,$$

$$C_n = C_0 + C_1 + \ldots + C_n = \sum_{m=0}^{\sqrt{n}} e(\varphi(m)).$$

Если α иррационально, то

$$C_n = o(\sqrt{n}) \text{ или } C_n = o\left(\frac{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n}\right).$$

Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} r^n = (1 - r)^{-3/2},$$

то, таким образом, получаем

$$\lim_{r \to \infty} \left\{\sqrt{1 - r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n\right\} = 0.$$

Для θ-функции мы получаем соответственно [12]:

$$\theta(z; v) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1 - |z|}}\right).$$

Нечто подобное имеет место для более общей функции

$$\theta(z; v_1, v_2, \ldots, v_{q-1}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{n^q} e(v_1 n + v_2 n^2 + \ldots + v_{q-1} n^{q-1}).$$

[12] Ср. с теоремой 7 кембриджского доклада Харди и Литтлвуда [6].

Теорема 11. *Если z при постоянном несравнимом с 2π аргументе приближается к единичной окружности, то*

$$\theta(z; v_1, v_2, \ldots, v_{q-1}) = o\left(\frac{1}{\sqrt[q]{1-|z|}}\right)$$

равномерно относительно вещественных переменных v.

§ 4. Следствия для равномерного распределения точек в $\mathfrak{R}_p$

Из теоремы 9 при помощи критерия, на котором основано все наше исследование, получаем такое следствие:

Теорема 12. *Если $\varphi(z)$ — некоторый многочлен со свободным членом α_0 и у $\varphi(z) - \alpha_0$ не все коэффициенты рациональны, то последовательность чисел*

$$\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \ldots$$

распределена всюду равномерно плотно.

В частности:

Теорема 13. *Если ξ — некоторое иррациональное число, то последовательность точек*

$$1\xi, 4\xi, 9\xi, 16\xi, 25\xi, \ldots$$

при накручивании числовой прямой на окружность длины 1 покрывает ее всюду равномерно плотно. То же самое будет выполняться, если квадраты чисел заменить на их кубы или четвертые степени и т. д.

Более общий случай:

Теорема 14. *Пусть*

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_p(z)$$

— какие-либо p многочленов со свойством: любая их нетривиальная целочисленная линейная комбинация несравнима с константой по модулю 1. Тогда последовательность точек

$$x_1 \equiv \varphi_1(n), x_2 \equiv \varphi_2(n), \ldots, x_p \equiv \varphi_p(n) (\mathrm{mod}\ 1)$$
$$\{n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

расположена в $\mathfrak{R}_p$ всюду равномерно плотно.

Действительно, для любой системы не обращающихся одновременно в нуль целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_p$ многочлен

$$\varphi(z) = m_1\varphi_1(z) + m_2\varphi_2(z) + \ldots + m_p\varphi_p(z)$$

удовлетворяет предположению теоремы 9.

В теореме 14 в качестве частного результата содержится

Теорема 15. *Если ξ — какое-либо иррациональное число и на единичном отрезке $[0, 1]$ выделены некоторые q отрезков a_ib_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$, то число тех среди первых n целых чисел $h = 1, 2, \ldots, n$, для которых вычет по модулю 1 $(h\xi)$ лежит в a_1b_1 и одновременно вычеты $(h^2\xi), \ldots, (h^q\xi)$ лежат*

в $a_2b_2, \ldots, a_qb_q$ *соответственно, асимптотически равно*

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_q - a_q)\, n$$

для $\lim n = \infty$.

Теорема 16. *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — *какие-либо* p *чисел, между которыми нет никакого целочисленного линейного соотношения, и на единичном отрезке выделены произвольные* pq *отрезков* $a_{ij}b_{ij}$, *то чисел* $h = 1, 2, \ldots, n$, *для которых одновременно выполняются неравенства*

$$\begin{array}{llll} a_{11} \leqslant (h\xi_1) \leqslant b_{11}, & a_{21} \leqslant (h^2\xi_1) \leqslant b_{21}, \ldots, & a_{q1} \leqslant (h^q\xi_1) \leqslant b_{q1}, \\ a_{12} \leqslant (h\xi_2) \leqslant b_{12}, & a_{22} \leqslant (h^2\xi_2) \leqslant b_{22}, \ldots, & a_{q2} \leqslant (h^q\xi_2) \leqslant b_{q2}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1p} \leqslant (h\xi_p) \leqslant b_{1p}, & a_{2p} \leqslant (h\xi_p) \leqslant b_{2p}, \ldots, & a_{qp} \leqslant (h^q\xi_p) \leqslant b_{qp}, \end{array}$$

асимптотически имеется в количестве

$$n \cdot \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{p} (b_{ij} - a_{ij}).$$

Харди и Литтлвуд в их первой работе в журнале «Acta mathematica» [9] (элементарным способом) также показали, что числа h с требуемыми в теоремах 15 и 16 свойствами, вообще говоря, существуют; этот результат им понадобился для доказательства теоремы 9. Установленные здесь теоремы, которые мы получили в обратном порядке из по-другому и непосредственно доказанной теоремы 9, были ими высказаны лишь предположительно.

Следующий интересный специальный случай теоремы 14 такой:

Теорема 17. *Пусть* $\varphi(z)$ — *какой-либо многочлен, в котором* z^l — *наивысшая имеющаяся степень с иррациональным коэффициентом. Обратим внимание на то, когда и как часто случается, что какие-то* l *следующих друг за другом чисел ряда*

$$\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \ldots$$

попадают в l *заданных отрезков* a_ib_i. *Оказывается, что относительная частота такого события совпадает с априорной вероятностью*

$$\prod_{i=1}^{l} (b_i - a_i).$$

Следует проверить, могут ли существовать l целых чисел $m_0, m_1, \ldots, m_{l-1}$, для которых

$$\sum_{r=0}^{l-1} m_r \varphi(z + r)$$

будет многочленом, у которого все коэффициенты, за исключением свободного члена,— рациональные числа. При проверке этого вопроса можно заменить φ на такой укороченный многочлен, который получается из φ выбрасыванием всех

членов с большими, чем у z^l, степенями. Если укороченный многочлен

$$\varphi(z) \text{ равен } \alpha z^l + \alpha_1 z^{l-1} + \ldots + \alpha_l \ (\alpha \text{ иррационально}),$$

то имеем

$$\varphi(z+r) = \alpha z^l + \left(\alpha \binom{l}{1} r + \alpha_1\right) z^{l-1} + \left(\alpha \binom{l}{2} r^2 + \alpha_1 \binom{l-1}{1} r + \alpha_2\right) z^{l-2} + \ldots.$$

Если числа m_r обладают требуемым свойством, то выполняется система уравнений

$$\sum_{r=0}^{l-1} m_r = 0,$$

$$\sum_{r=0}^{l-1} r m_r = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{r=0}^{l-1} r^{l-1} m_r = 0,$$

откуда получаем

$$m_0 = m_1 = \ldots = m_{l-1} = 0.$$

Одновременно получается, что теорема для более чем из l следующих друг за другом чисел $\varphi(n)$ не верна.

§ 5. Особые случаи

Пусть опять

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_p(z)$$

— какие-либо p многочленов с вещественными коэффициентами без свободных членов [13]. Предположим теперь, что существуют такие целые числа l_i, для которых

$$l_1 \varphi_1(z) + l_2 \varphi_2(z) + \ldots + l_p \varphi_p(z)$$

будет многочленом со всеми рациональными коэффициентами. Систему целых чисел $(l_1, l_2, \ldots, l_p)$, для которых это выполняется, будем обозначать словами «точка $\mathfrak{l}$». Точки $\mathfrak{l}$ образуют *решетку*; т. е. вместе с $\mathfrak{l}$ также $-\mathfrak{l}$ и для двух точек $\mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ также сумма $\mathfrak{l}' + \mathfrak{l}''$ будут «точками $\mathfrak{l}$» [14]. Согласно известному способу («сведение числовой решетки к некоторой решетке, в ней содержащейся» по Минковскому [15]), можно так определить точки $\mathfrak{l}$:

$$\mathfrak{l}_k = (l_{k1}, l_{k2}, \ldots, l_{kp}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

---

[13] Последнее предположение сделано лишь для удобства записи.

[14] В каком смысле здесь точки умножаются на числовые множители и складываются, едва ли требует явного пояснения.

[15] Diophantische Approximationen. Leipzig, 1907, § 14; этот способ кратко описан, например, на с. 78 моей книги «Die Idee der Riemannschen Fläche» (Leipzig, 1913).

в количестве $q \leqslant p$, что между ними не выполняется никакого соотношения $\sum_{k=1}^{q} y_k \mathfrak{l}_k = 0$ с произвольными, не обращающимися одновременно в нуль коэффициентами y_k, в то время как все точки $\mathfrak{l}$ могут быть получены из $\mathfrak{l}_k$ с помощью *целочисленных* коэффициентов h_k:

$$\mathfrak{l} = \sum_{k=1}^{q} h_k \mathfrak{l}_k.$$

Те точки $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, которые могут быть представлены с помощью произвольных *вещественных* коэффициентов y_k в виде

$$\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{q} y_k \mathfrak{l}_k,$$

образуют в обычном p-мерном пространстве q-мерное линейное многообразие $\mathfrak{X}$. Будем понимать под точкой решетки любую точку с целочисленными координатами x_i; тогда я утверждаю, что точки $\mathfrak{l}$ состоят из всех лежащих на линейном многообразии $\mathfrak{X}$ точек решетки. Так как между точками $\mathfrak{l}_k$ нет линейных соотношений, то в матрице

$$\begin{matrix} l_{11}, & l_{12}, & \ldots, & l_{1p}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{q1}, & l_{q2}, & \ldots, & l_{qp} \end{matrix}$$

можно найти отличный от 0 определитель порядка q, скажем

$$L = \| l_{ik} \|_{\substack{i=1, 2, \ldots, q \\ k=1, 2, \ldots, q}}.$$

Из первых q уравнений

$$x_i = \sum_{k=1}^{q} y_k l_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

если $\mathfrak{x} = (x_i)$ — какая-либо лежащая на $\mathfrak{X}$ точка решетки, получаем с помощью разрешения их относительно y, что y_k будут дробными числами со знаменателем L. Следовательно, $L\mathfrak{x}$ — точка $\mathfrak{l}$, а поэтому таковой же будет (следует вспомнить определение точек $\mathfrak{l}$) и $\mathfrak{x}$ сама. Отсюда следует согласно выбору точек $\mathfrak{l}_k$, что коэффициенты y_k должны быть целыми числами. Так как все лежащие в $\mathfrak{X}$ точки решетки, следовательно, могут быть представлены в виде $\sum_{k=1}^{q} y_k \mathfrak{l}_k$ с целыми y_k, то, продолжая такой выбор точек решетки далее, получим, что к точкам решетки $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_q$ можно добавить такие $r = p - q$ точек

$$\mathfrak{m}_h = (m_{h1}, m_{h2}, \ldots, m_{hp}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

для которых каждая точка решетки $\mathfrak{x}$ имеет представление

$$\mathfrak{x} = (y_1 \mathfrak{l}_1 + y_2 \mathfrak{l}_2 + \ldots + y_q \mathfrak{l}_q) + (z_1 \mathfrak{m}_1 + \ldots + z_r \mathfrak{m}_r) \qquad (12$$

с целочисленными коэффициентами y_k, z_h. Таким образом, равенство (12) или равенство

$$x_i = (l_{1i}y_1 + l_{2i}y_2 + \ldots + l_{qi}y_q) + (m_{1i}z_1 + \ldots + m_{ri}z_r)$$

задает целочисленное унимодулярное линейное преобразование координат x в новые координаты y, z, при котором система точек решетки переходит в себя. То же самое выполняется поэтому также для контрагредиентной подстановки

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{i=1}^{p} l_{ki}x_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, q), \\ z_h &= \sum_{i=1}^{p} m_{hi}x_i \qquad (h = 1, 2, \ldots, r). \end{aligned} \tag{13}$$

Эти формулы представляют, следовательно, некоторое линейное преобразование в $\mathfrak{R}_p$.

Образуем, в частности, многочлены

$$f_k(z) = \sum_{i=1}^{p} l_{ki}\varphi_i(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$\psi_h(z) = \sum_{i=1}^{p} m_{hi}\varphi_i(z) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Первые q из них имеют рациональные коэффициенты, общий знаменатель которых обозначим через G. Относительно же последних r многочленов можно утверждать, что никакая образованная из них посредством целых чисел t_1, $t_2, \ldots, t_r$ комбинация $\sum_{h=1}^{r} t_h\psi_h(z)$ не будет многочленом с рациональными коэффициентами, если только не все $t_h = 0$. Перед нами стояла задача изучить определенные сравнениями

$$x_i \equiv \varphi_i(n) \pmod 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

точки в $\mathfrak{R}_p$, где n пробегает последовательность всех положительных чисел. Посредством найденного нами целочисленного унимодулярного преобразования эта задача сводится к изучению точек (y, z):

$$\begin{aligned} y_k &\equiv f_k(n) \quad (k = 1, 2, \ldots, q), \\ z_h &\equiv \varphi_h(n) \quad (h = 1, 2, \ldots, r) \pmod 1. \end{aligned}$$

Для каждого целого числа n сравнениями

$$y_1 \equiv f_1(n), \quad y_2 \equiv f_2(n), \quad \ldots, \quad y_q \equiv f_q(n) \pmod 1$$

в пространстве $\mathfrak{R}_p$ (при пересчете на координаты y, z) однозначным образом выделяется некоторое *r-мерное линейное многообразие* $\mathfrak{E}_n$. Все $\mathfrak{E}_n$ параллельны друг другу, так как они параллельны r-мерному многообразию

$$y_1 \equiv 0, \quad y_2 \equiv 0, \quad \ldots, \quad y_q \equiv 0 \pmod 1.$$

Кроме того, $\mathfrak{C}_n$ совпадает с $\mathfrak{C}_m$, если два целых числа n и m сравнимы по модулю G, так что следует ограничиться рассмотрением одного-единственного периода

$$\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{C}_G. \tag{14}$$

Таким образом, среди пространств $\mathfrak{C}_n$ имеется лишь конечное число отличных друг от друга: $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, . . .; пусть они в выделенный период (14) входят m, m'', . . . раз соответственно $(m' + m'' + \ldots = G)$. Мы утверждаем: точки

$$y_k \equiv f_k(n) \quad (k = 1, 2, \ldots, q), \quad z_h \equiv \varphi_h(n) \quad (h = 1, 2, \ldots, r) \pmod 1 \tag{15}$$

из $\mathfrak{R}_p$, если n пробегает последовательность целых положительных чисел, распределяются по параллельным друг другу r-мерным линейным многообразиям $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, . . ., $\mathfrak{C}_G$ с вполне равномерной плотностью. Это следует понимать таким образом, что плотность для каждого отдельного из этих многообразий всегда одна и та же, а для двух различных, скажем $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, пропорциональна их кратностям m', m''.

То, что точки (15) лежат в многообразиях $\mathfrak{C}_n$, само собой разумеется. Для доказательства равномерной плотности распределения мы опять применим уже использовавшийся в предыдущих параграфах прием, а именно, мы покажем, что для каждой ограниченной, определенной на $\mathfrak{C}_n$ функции

$$F(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_q;\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_r),$$

которая интегрируема по Риману относительно переменных z_h и по всем переменным обладает периодом 1, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} F(y_k = f_k(n), z_h = \psi_h(n)) = \frac{1}{G}\sum_{n=1}^{G}\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 F(y_k = \\ = f_k(n);\ z_1, z_2, \ldots, z_r)\,dz_1\,dz_2\ldots dz_r. \tag{16}$$

Достаточно проверить это для

$$F = \Phi(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_q)\cdot e(t_1z_1 + \ldots + t_rz_r),$$

где t — произвольные целые числа и Φ — некоторая функция, определенная лишь для тех значений системы (y), которые периодически повторяются в соответствии с формулой $y_k \equiv f_k(n) \pmod 1$, когда n пробегает натуральные числа. Если одно из целых чисел $t_h \neq 0$, то в силу теоремы 9 левая часть доказываемого равенства (16) имеет значение 0. То же самое выполняется также для правой части, так как каждое слагаемое стоящей там G-членной суммы равно 0. Если же все числа $t_n = 0$, то F будет функцией лишь от y; для таких функций выполнимость нашего соотношения получается сразу же.

Формулировку результата можно сделать независимой от использованного в доказательстве линейного преобразования.

Теорема 18. *Пусть заданы какие-либо p многочленов $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_p(z)$ с вещественными коэффициентами и α_i — свободный член в $\varphi_i(z)$. Под «точкой $\mathfrak{l}$» понимаем любую систему целых чисел $\mathfrak{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_p)$, для которой линейная комбинация*

$$l_1\{\varphi_1(z) - \alpha_1\} + l_2\{\varphi_2(z) - \alpha_2\} + \ldots + l_p\{\varphi_p(z) - \alpha_p\} = f_{\mathfrak{l}}(z)$$

будет многочленом с рациональными коэффициентами. Коэффициенты всех соответствующих различным точкам $\mathfrak{l}$ *многочленов* $f_{\mathfrak{l}}(z)$ *обладают общим знаменателем* G. *Для каждого целого числа* n *сравнения*

$$l_1(x_1 - \alpha_1) + l_2(x_2 - \alpha_2) + \ldots + l_p(x_p - \alpha_p) \equiv f_{\mathfrak{l}}(n) \pmod 1,$$

выполняющиеся для всех точек $\mathfrak{l}$, *выделяют в* $\mathfrak{R}_p$ *некоторое линейное* r*-мерное многообразие* $\mathfrak{C}_n$. *Многообразия* $\mathfrak{C}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *все друг другу параллельны и повторяются циклически с периодом* G; *пусть различные среди них* $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, ... *(их конечное число) входят в такой цикл с кратностями* m', m'', ... *соответственно. Точки в* $\mathfrak{R}_p$, *определяемые сравнениями*

$$x_1 \equiv \varphi_1(n), \quad x_2 \equiv \varphi_2(n), \quad \ldots, \quad x_p \equiv \varphi_p(n) \pmod 1,$$

распределяются, если n *пробегает последовательность всех целых положительных чисел, по этим линейным многообразиям* $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, ... *в конечном числе таким образом, что каждое из них покрывается не только всюду плотно, но и всюду с равномерной плотностью, причем для двух различных* $\mathfrak{C}$ *эти плотности пропорциональны их кратностям.*

На основании этой теоремы можно указать, как меняется формулировка теоремы 15 в случае, когда между числами ξ_i имеются целочисленные линейные соотношения, а также установить аналог теоремы 16 для случая, когда рассматривается одновременно более чем l последовательных чисел из $\varphi(n)$.

§ 6. Обобщения на большее число параметров

До сих пор мы рассматривали целые рациональные функции одной переменной z, которой было разрешено пробегать последовательность натуральных чисел. Наши исследования можно обобщить на тот случай, когда вместо одной переменной z допускается большее их количество. Я ограничусь случаем двух переменных u, v. Таким образом, пусть опять заданы p целых рациональных функций

$$\varphi_1(u, v), \; \varphi_2(u, v), \; \ldots, \; \varphi_p(u, v),$$

причем для простоты мы предположим, что никакая образованная из них при помощи целочисленных коэффициентов линейная комбинация не превращается в многочлен, сравнимый с константой по модулю 1. Пусть, далее, в плоскости (u, v) задано некоторое конечное (не уходящее в бесконечность), замкнутое множество точек $\mathfrak{K}$ с определенной площадью $J > 0$ (будем такое множество называть куском плоскости). Произведя растяжение куска $\mathfrak{K}$ из нулевой точки в отношении $t : 1$ в кусок $t\mathfrak{K}$ (причем t должно быть некоторым большим вещественным числом), получим, что число n_t лежащих в $t\mathfrak{K}$ точек решетки (точек с целочисленными координатами u, v) при $t \to \infty$ будет асимптотически задаваться в виде $J \cdot t^2$. Каждой такой точке u, v сопоставим в $\mathfrak{R}_p$ точку

$$x_1 \equiv \varphi_1(u, v), \quad x_2 \equiv \varphi_2(u, v), \quad \ldots, \quad x_p \equiv \varphi_p(u, v) \pmod 1. \tag{17}$$

Выделив в $\mathfrak{R}_p$ некоторый произвольный объем V, получим, что утверждение о равномерном распределении будет выражаться теперь в таком виде:

Теорема 19. *Среди n_t точек* (17), *которые получаются, если вместо u, v подставить все лежащие в $t\mathfrak{K}$ точки решетки, выделим те, которые в $\mathfrak{R}_p$ принадлежат куску пространства V; при переходе к пределу при $t \to \infty$ их число относится к n_t так же, как $V : 1$.*

Если предположение относительно целочисленных линейных комбинаций функций $\varphi_i(u, v)$ не выполняется, то результат изменяется так же, как в предыдущем параграфе. При этом сначала *самая общая* аппроксимационная теорема для линейных функций φ_i от u и v, установленная Кронекером, усиливается таким образом: слова «всюду плотно» заменяются на «всюду равномерно плотно» [16]. Доказательство будет получено, если мы покажем следующее:

Теорема 20. *Если $\varphi(u, v)$ — какая-либо целая рациональная функция от u, v, коэффициенты которой, за исключением свободного члена, не все рациональны, и образована сумма*

$$\sigma_t = \Sigma e(\varphi(u, v))$$

по всем n_t точкам решетки (u, v), принадлежащим куску плоскости $t\mathfrak{K}$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_t}{n_t} = 0.$$

Особый случай такого рода теорем возникает, например, если в одну или несколько целых рациональных функций $\Phi(z)$ с произвольными *комплексными* коэффициентами вместо z — подставлять все целые числа гауссова поля ($i = \sqrt{-1}$) и интересоваться распределением значений этой функции при заданных аргументах, предполагая, что не различаются два комплексных числа (значения функции Φ), разность которых равна некоторому целому числу гауссова поля. При этом z сначала подчиняется условию $|z| \leqslant t$, а затем положительное число t устремляется в бесконечность.

Вместо сделанного здесь предположения о том, что растущая во все стороны в бесконечность область $t\mathfrak{K}$, которая должна охватить постепенно все точки решетки, увеличивается *подобно*, можно было бы разобрать и другие, более общие предположения; при проведении доказательства мы ограничимся, однако, рассмотрением областей, растущих подобным образом. Увеличение $\mathfrak{K}$ показывает, что достаточно предположить $\mathfrak{K}$ прямоугольником

$$a_1 \leqslant u \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant v \leqslant b_2.$$

Число целых чисел u, удовлетворяющих неравенству

$$a_1 t \leqslant u \leqslant a_2 t,$$

пусть равно $m_t \{\sim(a_2 - a_1 t)\}$; число целых чисел v, для которых

$$b_1 t \leqslant v \leqslant b_2 t,$$

обозначим через $n_t \{\sim(b_2 - b_1) t\}$. Тогда в $t\mathfrak{K}$ лежат $m_t n_t$ точек решетки (u, v).

Представим многочлен $\varphi(u, v)$ расположенным по убывающим степеням v, а коэффициенты при различных степенях v, которые являются многочленами

[16] Ср. сочинения, т. 3, с. 104—105.

от u, — по убывающим степеням u. Без ограничения общности будем считать, что при этом упорядочении старший член имеет коэффициентом иррациональное число. Пусть

$$\varphi(u, v) = v^q \psi(u) + v^{q-1}\psi_1(u) + \ldots.$$

Так как мы рассматриваем сейчас случай не одной переменной, то должно быть $q \geqslant 1$. В случае $q > 1$ применим к

$$\sigma_t = \sum_{a_1 t \leqslant u \leqslant a_2 t} \Big\{ \sum_{b_1 t \leqslant v \leqslant b_2 t} e(\varphi(u, v)) \Big\}$$

неравенство Шварца:

$$|\sigma_t|^2 \leqslant m_t \sum_u \Big| \sum_v e(\varphi(u, v)) \Big|^2,$$

и преобразуем $|\Sigma_v|^2$ изложенным в § 3 способом. При использовании введенных там обозначений мы получим тогда, наконец,

$$|\sigma_t|^Q \leqslant m_t^{Q-1} N_t \sum_{u;\, r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}} \Big\{ e(\rho) \sum_h e(q!\, \psi(u) r_1 r_2 \ldots r_{q-1} h) \Big\}, \qquad N_t \sim \varkappa \cdot n_t^{Q-q}. \tag{18}$$

Область внешнего суммирования задается неравенствами

$$a_1 t \leqslant u \leqslant a_2 t, \quad |r| = |r_1| + |r_2| + \ldots + |r_{q-1}| \leqslant n_t - 1. \tag{19}$$

Внутреннее суммирование распространяется на зависящий от нее отрезок из $n_t - |r|$ целых чисел. Мы должны показать, что

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sigma_t}{m_t n_t} = 0.$$

Если $\psi(u)$ не содержит переменную u, т. е. совпадает с иррациональной константой α, это соотношение получается таким же образом, как и при одной переменной. Если же $\psi(u)$ содержит переменную u, нам следует опереться на следующую лемму:

Пусть среди всех $m_t n_t^{(q-1)}$ точек решетки, удовлетворяющих условиям (19), *выделяются те, для которых*

$$r_1 r_2 \ldots r_{q-1} \varphi(u) \bmod 1$$

лежит между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$. Число таких точек при $t \to \infty$ относится к $m_t n_t^{(q-1)}$ так же, как $2\varepsilon : 1$. При этом $\varphi(u)$ — какой-либо многочлен от u, старший коэффициент которого иррационален.

Эту лемму нам нужно будет применить к многочлену $\varphi(u) = q!\, \psi(u)$. Мы получим ее при помощи индукции. При $q = 1$ лемма верна (теорема 9). Предполагая ее верной для q, покажем, что она выполняется также для $q + 1$. Для этого достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{m_t n_t^{(q)}} \sum_{u;\, r_1, r_2, \ldots, r_q} e(r_1 r_2 \ldots r_q \varphi(u)) = 0, \tag{20}$$

когда сумма распространяется на

$$a_1 t \leqslant u \leqslant a_2 t, \quad |r_1| + |r_2| + \ldots + |r_q| \leqslant n_t - 1.$$

Произведем сначала суммирование по r_q при фиксированных u; $r_1, r_2, \ldots$ $\ldots, r_{q-1}$ и применим к этой простой сумме двойную оценку, как и ранее, в соответствии с тем, будет ли $r_1 r_2 \ldots r_{q-1}\, \varphi(u) \bmod 1$ лежатьмежду $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$ или нет. Принимая во внимание то обстоятельство, что число систем чисел (u; $r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}$) с первым свойством асимптотически равно $2\varepsilon m_t n_t^{(q-1)}$, предельное соотношение (20) получаем затем тем же самым способом, как и при доказательстве леммы из § 3.

Две переменные u, v можно заменить на три и более.

Упомянутая выше лемма, на которой в своей существенной части основывалось наше исследование, является довольно специальным случаем обобщенной таким образом теоремы 19.

§ 7. О равномерном распределении произвольных числовых последовательностей

Харди и Литтлвуд поставили общий вопрос: когда некоторая последовательность возрастающих целых чисел

$$l_1 < l_2 < l_3 < \ldots$$

обладает тем свойством, что для любого иррационального числа ξ последовательность величин

$$l_1\xi,\ l_2\xi,\ l_3\xi,\ \ldots \tag{21}$$

по модулю 1 приближается к любому значению сколь угодно близко[17]? Мы спрашиваем также: когда эта последовательность расположена всюду равномерно плотно? Исчерпывающий ответ на этот вопрос дать не удается. Можно, однако, утверждать, что при заданных l_n для любого значения ξ последовательность чисел (21) расположена всюду равномерно плотно, за исключением чисел ξ, принадлежащих некоторому определенному множеству меры 0. Это исключительное множество содержит, конечно, все рациональные числа, но остается неясным, содержатся ли в нем еще какие-нибудь дополнительные числа. Я хотел бы здесь это утверждение кратко обосновать, хотя и сознаю, что не следует высоко оценивать значение таких теорем, в которых встречаются неопределенные исключительные множества меры 0. Мое доказательство основывается на следующей лемме интегрального исчисления[18].

Если $f_n(x)$ — непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$, для которых сумма интегралов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)|^2\, dx$$

---

[17] *Hardy G. H., Littlewood J. E.*— Acta math., vol. 37, p. 156.

[18] На основе той же самой леммы я доказал ранее так называемую теорему Риса—Фишера: Math. Ann., 1909, Bd. 67, S. 243 ff.

сходится, то для всех x, за исключением таких, которые принадлежат некоторому множеству меры 0, $f_n(x)$ при неограниченно возрастающем n стремится к 0.

Доказательство. Если ε — некоторое произвольное малое положительное число и $\mathfrak{A}_n$ — множество чисел на отрезке $[0,1]$, для которых $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$, то для лебеговой меры A_n этого множества $\mathfrak{A}_n$ выполняется неравенство

$$\varepsilon^2 A_n \leqslant \int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx.$$

Образовав объединение множеств

$$\mathfrak{C}_n = \mathfrak{A}_{n+1} + \mathfrak{A}_{n+2} + \ldots,$$

получим, что точки x из $\mathfrak{C}_n$ характеризуются тем, что для них выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$|f_{n+1}(x)|,\ |f_{n+2}(x)|, \ldots \geqslant \varepsilon.$$

Мера C_n множества $\mathfrak{C}_n$ удовлетворяет неравенству

$$C_n \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |f_\nu(x)|^2\,dx = \frac{J_n}{\varepsilon^2}. \tag{22}$$

Каждое из множеств $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots$ полностью содержит в себе все следующие за ним. Их общие элементы

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}$$

в силу того, что

$$\lim_{n\to\infty} J_n = 0,$$

имеют согласно (22) меру 0. Для каждой точки x дополнительного множества существует такой индекс, начиная с которого все $|f_n(x)|$ будут меньше ε. Для каждого такого x, таким образом, имеем

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Выбирая в качестве ε, например, последовательность чисел 1/2, 1/3, 1/4, . . ., завершаем доказательство леммы.

Мы рассмотрим здесь функции

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} e(l_h x).$$

Для таких функций имеем

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx = \frac{1}{n^2} \sum_{h,\,k=1}^{n} \int_0^1 e(l_h x - l_k x)\,dx = \frac{1}{n}.$$

Из-за расходимости гармонического ряда $\Sigma\ (1/n)$ прямое применение доказанной леммы невозможно. Выбирая, однако, из целых чисел n квадраты, получаем

$$\lim_{n\to\infty} f_{n^2}(x) = 0$$

за исключением таких значений x, которые принадлежат некоторому определенному множеству $\mathfrak{A}$ меры 0. Если n — произвольное целое число, то определим целое число ν при помощи условия

$$\nu^2 \leqslant n < (\nu + 1)^2.$$

Тогда

$$|nf_n(x) - \nu^2 f_{\nu^2}(x)| \leqslant 2\nu, \qquad \left|f_n(x) - \frac{\nu^2}{n} f_{\nu^2}(x)\right| \leqslant 2/\sqrt{n},$$

так что для всех не принадлежащих множеству $\mathfrak{A}$ чисел x будет также

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Если ни x, ни $2x$, ни $3x$, ... не принадлежат (с периодом 1 повторенному) множеству $\mathfrak{A}$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(mx) = 0$$

для каждого целого числа $m \neq 0$. Для каждого такого x величины

$$l_1x,\ l_2x,\ l_3x,\ \ldots$$

mod 1 удовлетворяют закону равномерно плотного распределения.

Если относительно целых чисел l_n предположить лишь, что

$$l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant \ldots,$$

то

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2\, dx = \frac{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2}{n^2},$$

если среди чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n$ первые h_1 равны между собой, затем следующие h_2 равны и т. д. и, наконец, последние h_m совпадают между собой. Обозначив через $h^{(n)}$ наибольшее среди чисел $h_1, h_2, \ldots, h_m$, получим

$$h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2 \leqslant h^{(n)}(h_1 + h_2 + \ldots + h_m) = h^{(n)} \cdot n,$$

а потому

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2\, dx \leqslant h^{(n)}/n.$$

Предыдущее предположение $h^{(n)} = 1$ мы заменим теперь на значительно более общее о том, что должны существовать два таких положительных числа ε и c, для которых выполняется неравенство

$$h^{(n)} \leqslant \frac{c \cdot n}{(\lg n)^{1+\varepsilon}}.$$

В таком случае все еще будет применимо проведенное выше рассуждение. Мы выбираем из последовательности целых чисел n, например, такие:

$$n_\nu = [e^{\nu^{1-b}}],\quad b = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

и получаем, что

$$\int_0^1 |f_{n_\nu}(x)|^2\,dx \leqslant c/\nu^{1+b}.$$

Следовательно, за исключением значений x из отрезка, принадлежащих некоторому выделенному множеству $\mathfrak{A}$ меры 0, имеем

$$\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x) = 0.$$

Если n — некоторое произвольное целое число, то определим ν условием

$$n_\nu \leqslant n < n_{\nu+1}.$$

Тогда будем иметь

$$\left| f_n(x) - \frac{n_\nu}{n} f_{n_\nu}(x) \right| \leqslant \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n} \leqslant \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} - 1,$$

Так как

$$(\nu+1)^{1-b} - \nu^{1-b} < \nu^{-b} \qquad (0 < b < 1),$$

то

$$\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} - 1 < e^{\nu^{-b}} - 1, \qquad \lim_{\nu\to\infty} \left\{ \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} - 1 \right\} = 0.$$

Следовательно, вне $\mathfrak{A}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

В рассматриваемом случае, таким образом, опять выполняется закон равномерного распределения для «почти всех» x.

Заменяя x на x/m (m — некоторое целое положительное число), переходим к случаю, в котором l_n — дробные числа с некоторым общим конечным знаменателем m.

Пусть, наконец,

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$$

— какая-либо растущая к бесконечности последовательность вещественных чисел. Предположим, что рост λ как функции индекса не слишком медленный, а именно, что существуют два положительных числа ε и c со следующим свойством: если индекс n возрастает на величину $n/(\lg n)^{1+\varepsilon}$, то λ возрастает по крайней мере на c. Вещественную переменную x ограничим на каком-либо конечном отрезке $|x| \leqslant A$. Выберем произвольное целое положительное число m и поставим в соответствие каждому λ_n такую дробь l_n со знаменателем m, которая отличается от λ_n самое большее на $1/2m$. В таком случае среди первых n чисел l_n нельзя будет найти никакую группу из более чем $n/(\lg n)^{1+\varepsilon}$ равных друг другу (как только $m > 1/c$). Следовательно, для всех x с точностью до некоторого множества $\mathfrak{A}_m$ меры 0 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} e(l_h x) = 0.$$

Так как

$$| e(x_1) - e(x_2) | \leqslant 2\pi \, | x_1 - x_2 |,$$

то

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} e(\lambda_h x) - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} e(l_h x) \right| \leqslant \frac{A\pi}{m},$$

а потому для всех не лежащих в $\mathfrak{A}_m$ значений x

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{h=1}^{n} e(\lambda_h x) \right| \leqslant \frac{A\pi}{m}.$$

Образуем множество $\mathfrak{A}$, которому точка x из отрезка $-A \ldots + A$ принадлежит в том и только в том случае, когда она лежит во *всех* множествах $\mathfrak{A}_m$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$), за исключением конечного их числа. Множество $\mathfrak{A}$ имеет меру 0, и для всех принадлежащих $\mathfrak{A}$ значений x выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} e(\lambda_h x) = 0.$$

Тем самым доказана

Теорема 21. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ — какая-либо последовательность вещественных чисел; пусть для λ как функции от индекса существуют такие две положительные константы ε и c, что всякий раз, как индекс n возрастает более чем на $n/(\lg n)^{1+\varepsilon}$, λ возрастает по крайней мере на c. Если x — некоторое вещественное число, не принадлежащее определенному исключительному множеству меры 0, то последовательность величин*

$$\lambda_2 x, \; \lambda_2 x, \; \lambda_3 x, \; \ldots$$

распределена mod 1 *всюду равномерно плотно* [19].

§ 8. Дополнение. О замкнутых евклидовых пространствах

Под замкнутым евклидовым пространством мы понимаем некоторое замкнутое p-мерное многообразие [20] со свойством, что в какой-либо окрестности каждой точки выполняется евклидова геометрия.

Пусть в обычном p-мерном пространстве, в котором каждая система вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ задает некоторую точку, действует какая-

---

[19] Для случая $\lambda_n = a^n$ (a — некоторое целое положительное число) это было, даже в значительно более сильном виде, доказано Харди и Литтлвудом (Acta math., vol. 37, p. 183 и далее). Общий вопрос, независимо от меня, был исследован в лондонских «Proceedings» Таулером, учеником Харди и Литтлвуда.

[20] Что касается используемых в этом дополнении топологических понятий, я должен указать на мою книгу «Идея римановой поверхности» (особенно § 4 и 9) [10]. По поводу связи проблемы неевклидовых пространственных форм с римановой теорией функций см.: *Koebe P.*— Ann. Math. (3), vol. 21 (том, посвященный Лагранжу), p. 57 и далее.

либо дискретная группа **Г** евклидовых движений; **Г** обладает конечной фундаментальной областью и не содержит никаких чистых вращений. Объединяя каждую систему эквивалентных относительно **Г** точек обычного пространства в одну-единственную «точку» некоторого нового многообразия $\mathfrak{K}_\Gamma$, получим, что $\mathfrak{K}_\Gamma$, очевидно, будет замкнутым евклидовым пространством в нашем смысле; мы будем называть его *кристаллом* (принадлежащим группе **Г**). В этом дополнении мы хотим доказать следующую теорему:

Теорема 22. *Каждое замкнутое евклидово пространство является кристаллом.*

Согласно одной общей доказанной Бибербахом теореме [21] каждая группа движений **Г** указанного выше вида содержит p независимых переносов, из которых могут быть получены все содержащиеся в **Г** переносы. Добившись с помощью аффинного преобразования координат $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, чтобы они совпадали с переносами

$$(1, 0, \ldots, 0); \quad (0, 1, \ldots, 0); \quad \ldots; (0, 0, \ldots, 1),$$

получим, что точки x, совпадающие в $\mathfrak{R}_p$, будут идентичны также в $\mathfrak{K}_\Gamma$; в $\mathfrak{R}_p$ группа **Г** превращается в некоторую состоящую из конечного числа линейных целочисленных унимодулярных преобразований группу [22] Γ_0, причем $\mathfrak{K}_\Gamma$ можно получить из $\mathfrak{R}_p$ объединением в одну конечного множества точек, которые эквивалентны относительно Γ_0. Таким и было утверждение, сформулированное нами в § 2.

Чтобы установить, что каждое замкнутое евклидово пространство $\mathfrak{R}$ является кристаллом, поступаем следующим образом. Если $\mathfrak{p}$ — какая-либо точка из $\mathfrak{R}$, то для достаточно малого r внутренность шара с центром $\mathfrak{p}$ радиуса r (т. е. множество тех точек, которые могут быть соединены с $\mathfrak{p}$ отрезком прямой длины $<r$) будет окрестностью $\mathfrak{p}$, которую можно взаимно однозначно и конгруэнтно отобразить на внутренность шара в обычном евклидовом пространстве радиуса r. Для произвольно большого r, однако, это не обязательно так, ибо $\mathfrak{R}$ — замкнутое пространство. Следовательно, существует некоторое определенное положительное число $r(\mathfrak{p})$, которое отделяет те r $(\leqslant r(\mathfrak{p}))$, для которых такое отображение возможно, от тех, для которых это не так. $r(\mathfrak{p})$ как функция точки $\mathfrak{p}$ непрерывна. Действительно, как только $\mathfrak{q}$ подходит к $\mathfrak{p}$ достаточно близко, величина $|r(\mathfrak{q}) - r(\mathfrak{p})|$ не превосходит расстояния между двумя точками $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Поэтому $r(\mathfrak{p})$ (как непрерывная положительная функция на замкнутом многообразии) имеет *положительный* минимум r_0. Тем самым показано: во внутренности шара радиуса r_0 в $\mathfrak{R}$ всегда выполняется евклидова геометрия, где бы ни располагался центр этого шара. В частности, отсюда следует, что каждая из двух половин, на которые разбивается прямая линия в $\mathfrak{R}$ какой-либо своей точкой, обладает бесконечной длиной (это, конечно, не исключает того, что она совпадает с замкнутой, бесконечное число раз пробегаемой кривой). Если тогда при пробегании прямой мы достигаем какой-либо

---

[21] Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume.— Math. Ann., 1911, Bd. 70, S. 333. Ср. также: *Frobenius G.*— S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., 1911, S. 663.

[22] Группа **T** содержащихся в **Г** переносов является инвариантной подгруппой в **Г**. В обозначении теории групп $\Gamma_0 = \Gamma/T$.

определенной точки, то эта прямая продолжается затем в соответствующем направлении по крайней мере на отрезок длины r_0.

Мы выбираем теперь некоторую фиксированную точку $\mathfrak{p}_0$ в $\mathfrak{R}$ и в ней прямоугольную ортогональную систему координат. Если γ — произвольная начинающаяся в $\mathfrak{p}_0$ и оканчивающаяся в $\mathfrak{p}$ кривая в $\mathfrak{R}$, то введенные нами координатные оси вместе с началом можно так сдвигать по γ, чтобы они оставались все время параллельными. Получаемые на осях компоненты общего переноса, который испытывает начало координат при движении от $\mathfrak{p}_0$ к $\mathfrak{p}$, «компоненты переноса вдоль γ», обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_p$ [9]. (Они совсем не обязательно равны 0 в случае, когда кривая γ возвращается в начальную точку.) Мы скажем: каждая исходящая из $\mathfrak{p}_0$ кривая γ определяет некоторую «точку» $\bar{\mathfrak{p}}$ нового многообразия—$\bar{\mathfrak{R}}$, которая «лежит над конечной точкой $\mathfrak{p}$ кривой γ»; и притом две различные кривые γ, γ', выходящие из $\mathfrak{p}_0$ и оканчивающиеся в одной и той же точке $\mathfrak{p}$, должны определять одну и ту же точку $\bar{\mathfrak{p}}$ над $\mathfrak{p}$ лишь в том случае, когда компоненты переноса вдоль γ имеют те же самые значения, что и вдоль γ'. Если $\bar{\mathfrak{p}}$ — определяемая γ, лежащая над $\mathfrak{p}$ точка и $\mathbf{K}$ — внутренность шара с центром в $\mathfrak{p}$, радиус которого $\leqslant r_0$, то добавим к γ все возможные выходящие из $\mathfrak{p}$, расположенные в $\mathbf{K}$ кривые; определяемые таким образом с помощью возникающих путей $\gamma + \gamma_1$ точки должны образовывать «окрестность» $\bar{\mathbf{K}}$ для $\bar{\mathfrak{p}}$. Так как в силу этого построения над каждой точкой из $\mathbf{K}$ лежит одна точка в $\bar{\mathbf{K}}$, то тем самым мы построили неразветвленное накрывающее пространство $\bar{\mathfrak{R}}$ для $\mathfrak{R}$. Это накрывающее пространство «регулярно»; т. е. для двух кривых в $\bar{\mathfrak{R}}$, определяющих в основном пространстве $\mathfrak{R}$ одну и ту же кривую, никогда не случается так, что одна из них открытая, а другая замкнутая. Если поэтому $\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_1'$ — две точки из $\bar{\mathfrak{R}}$, которые «накрывают друг друга», т. е. лежат над одной и той же точкой $\mathfrak{p}_1$ пространства $\mathfrak{R}$, то существует единственное взаимно однозначное непрерывное отображение пространства $\bar{\mathfrak{R}}$ в себя, при котором каждая точка из $\bar{\mathfrak{R}}$ переходит в некоторую накрывающую ее точку («накрывающее отображение»), а $\bar{\mathfrak{p}}_1$, в частности, переходит в $\bar{\mathfrak{p}}_1'$. Накрывающие отображения образуют некоторую дискретную группу $\Gamma_{\mathfrak{R}}$. Измерение длин переносится с $\mathfrak{R}$ на $\bar{\mathfrak{R}}$; накрывающие отображения являются конгруэнтными преобразованиями пространства $\bar{\mathfrak{R}}$ в себя.

Каждой точке $\bar{\mathfrak{p}}$ в $\bar{\mathfrak{R}}$ однозначно соответствуют p чисел $x_1, x_2, \ldots, x_p$, а именно, компоненты переноса вдоль той кривой, которая определяет $\bar{\mathfrak{p}}$, а тем самым — некоторая точка $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ в евклидовом пространстве R с прямоугольными координатами x_i. Отображение $\bar{\mathfrak{p}} \to (x)$ однозначно, непрерывно и сохраняет длину. Мы меняем теперь точку зрения: условимся рассматривать $\bar{\mathfrak{p}}$ как точку, лежащую над точкой (x) пространства R. Тем самым $\bar{\mathfrak{R}}$ превращается в некоторое *неразветвленное* накрывающее пространство для R. Последнее *не ограничено*. Над нулевой точкой пространства R, несомненно, лежит некоторая точка из $\bar{\mathfrak{R}}$, а именно $\bar{\mathfrak{p}}_0$. Проведем из нулевой точки некоторую произвольную полупрямую y в R и проследим в $\bar{\mathfrak{R}}$ за непрерывно изменяющейся точкой $\bar{\mathfrak{p}}$, которая выходит из $\bar{\mathfrak{p}}_0$ и образ которой в R пробегает

эту прямую (принцип аналитического продолжения Вейерштрасса); таким способом мы получим некоторую однозначно определенную кривую $\bar{\gamma}$ в $\bar{\mathfrak{R}}$ над g. Невозможно, чтобы мы дошли в $\bar{\mathfrak{R}}$ до какой-либо «критической точки», дошли до некоторой «границы»; действительно, из каждой достигнутой точки можно сдвинуться по прямой g дальше еще по крайней мере на отрезок длины r_0. Так как тем самым $\bar{\mathfrak{R}}$ относительно R не разветвлено и не ограничено и *обычное евклидово пространство обладает простой связностью* [11], *то* $\bar{\mathfrak{R}}$ должно простираться над R всюду в точности однолистно, т. е. $\bar{\mathfrak{R}}$ *при помощи соответствия* $\bar{\mathfrak{p}} \to (x)$ *отображается на евклидово пространство* R *взаимно однозначно и конгруэнтно*. При помощи этого соответствия группа $\mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{R}}$ накрывающих отображений пространства $\bar{\mathfrak{R}}$ (относительно $\mathfrak{R}$) превращается в дискретную группу движений $\mathbf{\Gamma}$ в R, а само $\mathfrak{R}$ взаимно однозначно, непрерывно и с сохранением длин отображается на кристалл $\mathfrak{K}_{\Gamma}$. Если $\mathfrak{R}$ замкнуто, то то же самое должно выполняться и для $\mathfrak{K}_{\Gamma}$, т. е. группа $\mathbf{\Gamma}$ должна иметь конечную фундаментальную область. Наше доказательство тем самым окончено.

ПОРОЧНЫЙ КРУГ В СОВРЕМЕННОМ ОБОСНОВАНИИ АНАЛИЗА*

(Из письма Г. Вейля к О. Гёльдеру)

Мне хотелось бы теперь попытаться, насколько это возможно, выполнить Ваше пожелание — обсудить порочный круг, в наличии которого я упрекаю анализ в своем сочинении «Континуум» [1].

Хотя *область существования* предметов, представляющих собой сущности, выраженные в данном понятии, ограничивается *содержанием* ясно и однозначно установленного понятия, тем не менее отсюда вовсе не следует, что это понятие *объемно определенно*, т. е. имеет смысл говорить о подпадающих под него существующих предметах как об идеально замкнутой, определенной в себе и ограниченной совокупности. Если $\mathfrak{E}$ — ясно и однозначно заданное по своему содержанию свойство подпадающих под понятие B предметов, то для любого такого предмета a предложение «a обладает свойством $\mathfrak{E}$» устанавливает совершенно определенное положение дел, которое либо имеет место, либо нет; это суждение само по себе либо истинно, либо ложно, и такое противоположение истины и лжи незыблемо и не допускает никакой примирительной точки зрения. Если же понятие B объемно определенно, то для любого подпадающего под него предмета a осмыслен не только вопрос: «обладает ли a свойством $\mathfrak{E}$?», но и экзистенциальный вопрос: «существует ли предмет со свойством $\mathfrak{E}$ среди подпадающих под B предметов?» Аналогичное замечание следует сделать и об отношениях; при этом безразлично, обнаруживается ли значение рассматриваемого свойства или отношения непосредственно интуицией или же составляется логически из интуитивно ясных свойств или отношений. (Разумеется, здесь нужен был бы обстоятельный феноменологический анализ понятия существования, но сказанного, пожалуй, достаточно для того, чтобы объяснить суть дела.)

Наше убеждение, что понятие натурального числа объемно определенно, основывается на интуиции итерации (всякой арифметике непременно надо заимствовать из интуиции *этот* фундамент). Например, общее понятие «предмет» не является объемно определенным, так же как и понятие «свойство» или же «свойство натуральных чисел». Последнее утверждение можно даже доказать, если его очевидность не допускать непосредственно. Именно, пусть каким-то образом удалось отметить определенную область $\varkappa$ свойств натуральных чисел такую, что понятие «$\varkappa$-свойство» является объемно определенным; тогда можно было бы сразу определить лежащие вне этой области свойства натуральных чисел. Если A означает какое-нибудь свойство *свойств* натуральных чисел и если $\mathfrak{E}_A$-свойство, присущее натуральному числу x тогда и только тогда, когда имеется некоторое $\varkappa$-свойство, присущее числу x

---

* Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis.—J.-ber. Dt. Math. Ver., 1919, Bd. 28, S. 85—92. Перевод З. А. Кузичевой.

[1] *Weyl H.* Das Kontinuum. Leipzig, 1918, Abschn. 1, § 6.

и обладающее свойством A, то по своему содержанию $\mathfrak{E}_A$ отлично от каждого $\varkappa$-свойства. Из этого не следует, что $\mathfrak{E}_A$ не может быть равнообъемным с одним из $\varkappa$-свойств. Два свойства (натуральных чисел) я называю равнообъемными, если каждому числу, обладающему одним из этих свойств, присуще другое свойство, и наоборот; каждому свойству соответствует некоторое множество в том смысле, что равнообъемным свойствам соответствует одно и то же множество. (Это правильное соотношение понятий «свойство» и «множество».) Теперь сплошь и рядом недооценивается тот факт, что *содержание* понятия логически предшествует *объему*, этим недостатком страдают и основания современной теории множеств. Такая недооценка, как мне кажется, берет начало в замысловатых учениях об абстракции сенсуалистской теории познания; ср. направленные против этого краткие, меткие замечания Фихте в его «Трансцендентальной логике» [2] и тщательное изложение Гуссерля в «Логических исследованиях» [3]. Правда, кто в логических вещах стремится не смотреть, а формализовать — формализация ведь является болезнью математика, тот не получит удовлетворения ни у Фихте, ни у Гуссерля). Если сказанное выше распространить на понятие рационального числа (можно было бы убедиться, что понятие «рациональное число» также объемно определено) и вместе с Дедекиндом понимать действительное число как (специального вида) множество рациональных чисел, то обнаружится, что *понятие действительного числа не является объемно определенным.* Замечание на с. 594 Вашей рецензии на «Теорию чисел» Р. Грассмана в «Gottingen Nachrichten» 1892 года я, видимо, могу истолковать в том смысле, что Вы совершенно согласны с этой точкой зрения, да и вряд ли кто-нибудь взялся бы всерьез отрицать ее. Правда, чаще всего думают, что упомянутое обстоятельство довольно незначительно для обоснования анализа, поскольку имеется достаточно ясное определение по содержанию понятия действительного числа: всякий раз, когда в явном виде дано некоторое свойство рациональных чисел (определенного рода), тем самым дано и некоторое действительное число, отделяющее рациональные числа, обладающие указанным свойством, от остальных. Однако мне хотелось бы показать здесь, что такая точка зрения ошибочна, еще раз проанализировав утверждение о том, что каждое ограниченное множество действительных чисел имеет верхнюю границу.

Действительное число есть множество рациональных, соответствующее некоторому определенному свойству рациональных чисел. Множество действительных чисел, таким образом, соответствует некоторому свойству A свойств рациональных чисел. Верхняя граница этого множества действительных чисел сама является множеством тех рациональных чисел x, которые обладают определенным свойством $\mathfrak{E}_A$, именно следующим: *имеется некоторое свойство рода* A, которое присуще числу x. Однако такое определение, связывающее существование свойства $\mathfrak{E}_A$ с тем, что (вообще и без ограничения) *имеется* свойство такого рода, что . . ., *очевидно, бессмысленно*; понятие «свойство рациональных чисел» не является объемно определенным. Оно обретает содержание лишь тогда, когда общее понятие «свойство» суживается до объемно-

---

[2] *Fichte J.* Werke. Auswahl von Medius. Leipzig, 1912, Bd. 4, S. 133.
[3] *Husserl E.* Logischen Untersuchungen. 2. Aufl. Halle, Bd. 2, 1913, S. 106—224.

определенного «$\varkappa$-свойства»; если достигнуто это ограничение, тогда возможно соответствующее ограничение понятия действительного числа. Введением такого видоизменения в определение $\mathfrak{E}_A$ мы получаем в $\mathfrak{E}_A$ свойство, которое по своему *внутреннему содержанию* совершенно точно лежит вне области $\varkappa$-свойств. Правда, если бы оно могло быть равнообъемным с одним из $\varkappa$-свойств, то тогда и только тогда этому свойству $\mathfrak{E}_A$ соответствовало бы некоторое действительное число — верхняя граница. Но прежде всего совершенно неправдоподобно, чтобы можно было установить объемно определенное $\varkappa$-свойство столь точно, что каждое свойство $\mathfrak{E}_A$, подлежащее определению по указанной схеме на основании совокупности $\varkappa$-свойств, могло быть равнообъемным с каким-нибудь $\varkappa$-свойством. Во всяком случае, нет даже намека на доказательство какой-либо из этих возможностей. Но если бы это доказательство можно было непосредственно осуществить, то вместе с тем утверждение о существовании верхней границы *получает смысл и всеобщую достоверность*.

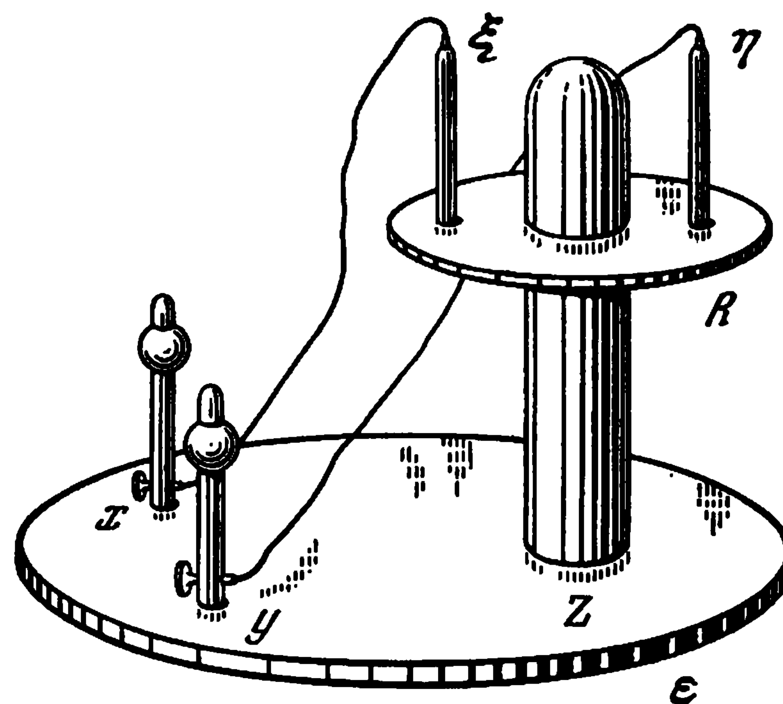
Итак, если обычным определениям таких фундаментальных понятий анализа, как «верхняя граница», «непрерывность» и т. д. не достает постижимого смысла до тех пор, пока общее понятие «свойство» (и отношение) не ограничено некоторым объемно определенным «$\varkappa$-свойством», то встает вопрос, каким образом можно было бы осуществить такое ограничение. Исторически сложившаяся математика не оставляет никаких сомнений относительно ответа на этот вопрос: ограничиться теми свойствами и отношениями, которые могут быть *определены чисто логически* на основании немногих свойств и отношений, доставляемых непосредственно интуицией вместе с принимаемыми в соображение категориями предметов (для натуральных чисел это единственное отношение «следовать непосредственно за»). Я попытался точно сформулировать принципы такой конструкции; нет нужды еще раз повторять, что в числе таких принципов было бы бессмысленно принимать что-то вроде следующего: «Если A — некоторое свойство свойств, то составляется такое свойство $\mathfrak{E}_A$, которое присуще предмету x тогда и только тогда, когда имеется построенное с использованием этих принципов свойство, присущее x и само обладающее свойстом A». Это был бы явный порочный круг, но наш современный анализ и без того страдает порочным кругом, в чем я его и упрекаю. Указанные мною принципы, как мне кажется, оговаривают основную часть *«чистого синтаксиса отношений»* [4], на который должна опираться чистая логика, если ей надо разрабатывать условия, обеспечивающие равнозначность двух свойств или отношений, образованных логической конструкцией. Нельзя a priori предвидеть, какие новые отношения раскроются нашему созерцанию с развитием духовной жизни, но я думаю, что можно раз и навсегда установить (наподобие элементарных форм логических выводов) принципы логической конструкции, руководствуясь которыми можно получать составные отношения из исходных. Я не настаиваю на признании полноты списка моих принципов, хотя я составил и логически осмыслил его, основываясь на огромном исторически сложившемся материале математики. Методы абстрактных построений составляют суть математико-физического познания, а после Галилея и Декарта в нем пора бы господствовать

---

[4] По поводу идеи «чистой грамматики» см.: *Husserl E.* Logische Untersuchungen. Bd. 2, S. 328.

полной ясности; и я надеюсь, что анализ тоже вернется к тем методам, которые он почти полностью утратил ради сомнительной общности понятий. Обоснование анализа тесно связано с приложениями, прежде всего с физикой; физический *смысл* вообще ускользает от меня, если я не могу подкрепить логическими принципами понятия «число», «множество», «функция», подобно тому, как я попытался это сделать в своем сочинении [1].

Позвольте мне сделать еще несколько замечаний об этих принципах; они служат для прояснения заключительной точки зрения, к которой мне хотелось бы подвести читателя «Континуума» и придерживаясь которой, я надеюсь, он сможет увидеть, что мое обоснование действительно исключает порочный круг. Указанные принципы конструкции распадаются на две группы: «логические» (гл. 1, § 2) и специфически математические (гл. 1, § 7); здесь речь пойдет лишь о последних. Связующее звено между ними образуется введением отношения ε (предложение вида: роза красная, первоначально свидетельствующее о некотором свойстве розы, понимается теперь как высказывание о наличии отношения ε, отношения «обладания» между розой и свойством «красный»). Кроме того, в моем изложении этот переход оказывается обусловленным прежде всего понятиями *множества* (одно- и многомерного) и *функции*, а движущим началом является *итерация* управляемого этими шестью «логическими» принципами конструктивного процесса. Это, как мне кажется, соответствует естественному развитию идей, хотя в математике не общепринят такой «диалектический» способ изложения, поднимающий предшествующее на все более высокую ступень. В систематической структуре, которой я в конце концов достигаю (гл. 1, § 8) — и это хотелось бы подчеркнуть с возможной отчетливостью, — полностью проявляется идея итерации, в то время как понятия множества и функции вынуждены отступить еще дальше, чем это предполагалось вначале (именно, они появляются в самую последнюю очередь, в п. V, в конце с. 31).



Рассмотрим, к примеру, тернарное отношение ε (xy, Z) (xy состоят в отношении Z), где x, y соотнесены одной и той же основной категории, а Z — категории бинарных отношений между объектами данной основной категории; на основании примечания на с. 3 схему этого соотношения можно изобразить деревянной дощечкой с двумя малыми и одним большим выступами, соотнесенными xy и Z соответственно. Объекты основной категории изображаются шарами с такими отверстиями, чтобы они могли надеваться на малые выступы, символизируя замещение просветов xy соответствующими предметами. Пусть эти шары надеты на выступы. Просвет для Z в ε надо заполнить некоторым бинарным отношением R. Оно в свою очередь изображается дощечкой с двумя выступами, которая, кроме того, должна иметь отверстие такой величины, как большой выступ в ε; если надеть это отверстие на свой выступ, то кажутся заполненными все просветы отношения ε. Однако мы пока еще не получили

никакого суждения; чтобы из ε получить суждение, необходимо еще определенным образом соотнести просветы x и y в ε, вернее, заполняющие их предметы, просветам $\xi\eta$ отношения $R(\xi, \eta)$, замещающего Z в ε, или, как я намерен говорить, последние (т. е. ξ и η) должны быть «присоединены» к первым (т. е. к x и y). Поэтому в схеме отношения прибавляются еще два выходящих из оснований выступов x и y «провода», с помощью которых должно происходить заполнение связи «вторичных» просветов $\xi\eta$ первичными просветами xy изображенным на рисунке способом. Для данного отношения это заполнение, очевидно, может быть осуществлено двумя разными способами. Провода, начинающиеся вверху, в выступах ξ, η, одновременно иллюстрируют, что при заполнении «насыщаются» все просветы. Существование таких «проводов» в схеме отношения естественно переносится с ε на те отношения, которые составляются из ε и исходных отношений на основе принципов конструкции; «вторичные» просветы ожидающих заполнения отношений надо частью соединить с первичными, частью с определенными исходными точками. Нужно некоторое усилие, чтобы уяснить, как же выглядит общая схема какого-нибудь отношения и в чем заключается заполнение, превращающее это отношение в суждение; добрую услугу здесь может оказать только что использованная модель. Если требуется составить полное представление и о синтаксисе отношения, то этого довольно затруднительного схематизма можно избежать простой формальной уловкой — введением *предметно-упорядоченных отношений* вместо рассмотренных. Несколько изменяя определение, данное в моем сочинении, я понимаю здесь под предметно-упорядоченным отношением такое, в схеме которого внутри каждой группы просветов, относящихся к одной и той же категории предметов, намечен определенный порядок их следования. Если в приведенном выше отношении занумеровать по этому способу просветы x и y и для просвета Z использовать тоже предметно-упорядоченное бинарное отношение, т. е. перенумеровать и вторичные просветы ξ и η, то «провод» становится излишним, так как само собой ясно, что вторичный просвет 1 присоединяется к первичному 1, а вторичный просвет 2 — к первичному просвету 2. В результате ε и все получаемые из него отношения одного и того же рода становятся такими, какими я предложил их в начале своего сочинения: для получения осмысленного утверждения достаточно заполнить в них каждый просвет предметом надлежащей категории (иногда — предметно-упорядоченным отношением). Однако момента введения предметно-упорядоченных множеств, не взирая на формальный и искусственный характер этого приема, я боюсь меньше, чем последующего, когда мне надо совершать переход от отношений к множествам в предположении, что отношения предметно упорядочены.

Пятеричное отношение $R(uv/xyZ)$ (взятое для определенности примера) можно считать зависящим от трех «аргументов» xyz бинарным отношением между u и v, а затем использовать для замещения просвета, предназначенного для бинарного отношения R, в каком-нибудь отношении более высокого порядка; тогда подключением замещаются только первые два из вторичных просветов uv/xyz, просветы же xyz остаются свободными, ожидая своего замещения предметами. Описанный процесс употребляется в *принципе подстановки* (принцип 7, с. 26). Плодотворность применения символа ε и принципа подстановки объясняется прежде всего тем, что они примыкают к *принципу итерации*

8, образуя его необходимые предпосылки. Итерация же имеет громадное значение для образования всех математических понятий.

Я называю финитными те отношения, которые могут быть построены из обнаруженных интуицией исходных отношений основной операциональной области с применением заданных вспомогательных средств. Этим достигается желаемое объемно определенное ограничение понятия «отношение», необходимое для свободного от порочного круга обоснования анализа. Только теперь, наконец, можно было бы вводить *понятия множества и функции*. Множества и функции именно в том смысле и соответствуют предметно-упорядоченным финитным отношениям, что мерилом их совпадения или различия служит уже не *содержание*, а *объем*; они образуют математическую надстройку над сооруженным интуицией фундаментом основных категорий.

Насколько мне известно, в математическом анализе до сих пор не встречался описанный выше математический процесс, расширенный 7-м и 8-м принципами, а полученная мною структура (схема) оказывается достаточно обширной и может быть пригодна как для приложений, так и для построения разумной теории континуума.

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ПРИ ПОМОЩИ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ*

Глава I

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Цель исследования

В n-мерном центрированном аффинном пространстве $\mathfrak{r}$ — понятие «аффинный» понимается в том смысле, в каком его впервые использовал Мебиус,— переход от одной системы координат к другой задается с помощью *однородного линейного преобразования t для n переменных с определителем* 1; группа всех этих преобразований будет обозначаться через $\mathfrak{g}$. Зависящая от выбора системы координат совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N$ называется *линейной величиной* в таком пространстве, если ее компоненты a_i, в произвольных двух координатных системах, которые связаны между собой с помощью преобразования t, сами связаны между собой соответствующим t однородным линейным преобразованием T для N переменных. Соответствие $t \to T$ должно переводить $\mathfrak{g}$ в некоторую гомоморфную ей группу линейных преобразований $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}$ характеризует *род* (или *класс*) рассматриваемой величины. Поэтому можно еще выразиться так: имеется *представление* группы $\mathfrak{g}$, т. е. гомоморфно связанная с $\mathfrak{g}$ группа $\mathfrak{G}$ однородных линейных преобразований для N переменных; иначе говоря, каждой системе координат в n-мерном аффинном пространстве $\mathfrak{r}$ поставлена в соответствие система координат в N-мерном пространстве $\mathfrak{R}$. Величины рода ($\mathfrak{G}$) являются *векторами* в пространстве $\mathfrak{R}$. Мы будем говорить также, что t в $\mathfrak{r}$ *индуцирует* преобразование T в $\mathfrak{R}$. Поэтому задача обозрения всех возможных родов линейных величин в аффинном пространстве является не чем иным, как *проблемой представлений для непрерывной группы* $\mathfrak{g}$. Об этом говорится в главе I этой работы. Затем полученные результаты распространяются на группу вращений, симплектическую группу и, наконец,— после предварительного исследования об их структуре — на все непрерывные полупростые группы с конечным числом параметров.

Два представления $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ одинаковой размерности N *подобны* друг другу или *эквивалентны*, отличаются лишь *ориентацией*, если одно представление получается из другого при помощи аффинного преобразования пространства $\mathfrak{R}$, т. е. если существует такая постоянная матрица A с N строками и N столбцами и с отличным от 0 определителем, что две матрицы T, T^*, соответствующие

* Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I.— Math. Ztschr., 1925, Bd. 23, S. 271—309; II, III — Math. Ztschr., 1926, Bd. 24, S. 328—376; IV — Math. Ztschr., 1926, Bd. 24, S. 377—395; Nachtrag.— Math. Ztschr., 1926, Bd. 24, S. 789—791. Перевод С. П. Демушкина.

в представлениях $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^*$ одному и тому же элементу t группы $\mathfrak{g}$, удовлетворяют тождественному соотношению

$$T^* = A^{-1}TA.$$

Представление $\mathfrak{S}$ *приводимо*, если в $\mathfrak{R}$ существует «плоскость», т. е. линейное векторное многообразие $\mathfrak{R}_1$, которая «под воздействием группы $\mathfrak{S}$», т. е. при преобразованиях группы $\mathfrak{S}$, переходит в себя и размерность которой $N_1 > 0$ и $< N$. В таком случае при подходящем выборе базиса в пространстве $\mathfrak{R}$ мы из представления $\mathfrak{S}$ получаем N_1-мерное представление в пространстве $\mathfrak{R}_1$ и $(N - N_1)$-мерное представление в том пространстве, которое получается из $\mathfrak{R}$ проектированием вдоль $\mathfrak{R}_1$ (это проектирование осуществляется при помощи соглашения считать два вектора из $\mathfrak{R}$ равными, если они сравнимы по модулю $\mathfrak{R}_1$, т. е. если их разность лежит в $\mathfrak{R}_1$) [1]. Соответствующую неприводимому представлению величину мы называем *простой*.

Если в $\mathfrak{R}$ имеются два линейных векторных пространства $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, инвариантных относительно группы $\mathfrak{S}$ и таких, что каждый вектор из $\mathfrak{R}$ представляется единственным образом в виде суммы векторов из $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ (размерности N_1, N_2 удовлетворяют тогда равенству $N_1 + N_2 = N$, $\mathfrak{R}$ «расщепляется» на $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$), то представление $\mathfrak{S}$ *распадается* на N_1-мерное представление $\mathfrak{S}_1$ с носителем $\mathfrak{R}_1$ и N_2-мерное представление $\mathfrak{S}_2$ в пространстве $\mathfrak{R}_2$; $\mathfrak{S}$ полностью приводится к сумме $\mathfrak{S}_1$ плюс $\mathfrak{S}_2$ [2]. Каждая величина рода ($\mathfrak{S}$) представляется в виде суммы двух независимых составных частей, одна из которых рода ($\mathfrak{S}_1$) и другая рода ($\mathfrak{S}_2$). Основной результат развиваемой теории будет состоять в том, что *каждая линейная величина может быть разложена на независимые друг от друга простые величины*. Из двух представлений $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ размерностей N и N' можно при помощи композиции по Гурвицу [3] составить новое представление $\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{S}'$ размерности $N\cdot N'$: каждому t становится в соответствие то линейное преобразование, которое испытывают величины

$$x_i x_j' \qquad (i = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, N'), \tag{0}$$

когда x_i преобразуются с помощью T и x_j' — с помощью T' ($t \to T$ в $\mathfrak{S}$, $t \to T'$ в $\mathfrak{S}'$).

Единственными линейными величинами, которые до сих пор были открыты математиками и которые встречались в физике, являются *тензоры* в том широком смысле слова, как его употреблял Эйнштейн. Если из компонент

$$x_i,\ y_i,\ z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

каких-либо трех векторов относительно произвольной системы координат образовать n^3 чисел

$$x_i y_k z_l \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

то при переходе к другой системе координат при помощи преобразования t эти числа также подвергаются однородному линейному преобразованию над n^3 переменными, которое соответствует t; так возникает представление $\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3$. Каждая система чисел f_{ikl}, зависящая от системы координат и изменяющаяся по тому же закону, называется тензором ранга 3. Вместо компонент

тензора удобно пользоваться трилинейной формой

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i, k, l} f_{ikl} \xi^i \eta^k \zeta^l, \qquad (1)$$

где ряды переменных ξ, η, ζ следует преобразовывать контрагредиентно по отношению к векторным компонентам, либо когредиентно по отношению к базисным векторам системы координат. В геометрических и физических приложениях всегда оказывается, что род величины характеризуется не только заданием ранга тензора, но и дополнительными *условиями симметрии*. Так, возможные значения напряжения описываются при помощи понятия «симметрический тензор ранга 2», а возможные значения четырехмерной интенсиности электромагнитного поля — при помощи понятия «кососимметрический тензор ранга 2». Общий вид (линейного) условия симметрии для тензора f ранга ν такой:

$$\sum_P \alpha_{P^{-1}} fP = 0.$$

Здесь P пробегает все $\nu!$ перестановок для ν рядов переменных $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; fP — форма, получающаяся из f после применения перестановки P, α_P — некоторая соответствующая перестановкам P система констант [1]. Определенный *род* или *класс тензоров* помимо ранга характеризуется одним или несколькими (или никакими) условиями симметрии такого типа. Все тензоры одного класса образуют линейное многообразие, скажем, размерности N, инвариантное относительно пространственных преобразований t; $\mathfrak{g}$ индуцирует в «N-мерном тензорном пространстве» $\mathfrak{R}$ представление $\mathfrak{G}$. Опыт математиков и физиков привел к гипотезе, что на таком пути получается самое общее представление, т. е. *кроме тензоров не существует никаких других линейных величин* (при этом условия симметрии включаются в понятие тензора). Эта теорема, в которой я и вижу собственно теоретико-групповое оправдание тензорного исчисления, будет доказана в дальнейшем. В ней утверждается, что все представления получаются при помощи редукции степеней $\mathfrak{g}$ и что выделение неприводимых частей из $\mathfrak{g}^\nu$ производится при помощи условий симметрии.

Но теория не исчерпывается этим результатом. В ней устанавливается также тесная связь между непрерывной группой $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n)}$ и конечной группой $\Sigma = \Sigma_\nu$ всех перестановок для ν символов. Из этой связи затем удается получить наиболее полный взгляд на строение всех возможных условий симметрии, простых величин, встречающихся здесь размерностей и т. д. Оказывается, что лишь исходя из этой точки зрения достигается правильное понимание теории представлений симметрической группы вместе с относящимися сюда формулами для степеней и характеров, которыми мы обязаны прежде всего мастеру теории групп Фробениусу [2].

---

[1] Почему множитель при fP удобно считать зависящим не от P от P^{-1}, будет выяснено впоследствии.

[2] *Frobenius G.* Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe.— S.-Ber. Berlin Akad., 1900, S. 516; Über die charakterischen Einheiten der symmetrischen Gruppe.— Ibid., 1903, S. 328. Я ссылаюсь на эти работы, как Фр. I, II.

В частном случае, когда элементы представляющей матрицы T должны быть целиком рациональными функциями от элементов представляемой матрицы t, наша задача рассматривалась И. Шуром в его диссертации 1901 г. при помощи прямого алгебраического метода. Там четко выражена связь с представлениями симметрической группы. Аддитивному разложению произвольного тензора на простые тензорные величины посвящены две работы Юнга, которые послужили толчком ко второму из упомянутых исследований Фробениуса [3] (см. также по этому поводу последнюю главу книги: *Schouten J. A.* Der Ricci-Kalkul. B., 1924). В одной небольшой заметке [4] я изложил, каким образом представления симметрической группы дают возможность сразу обозреть возможные классы симметрии тензоров. Исходя из точки зрения Ли бесконечно малых преобразований, уже в 1913 г. Э. Картан дал метод для получения всех неприводимых представлений не только для группы $\mathfrak{g}$, но и для всех полупростых групп [5]. В настоящей работе все эти нити соединяются в одно целое. Недавно И. Шур [6] применительно к группе вращений развил новый метод, который мне удалось так видоизменить, что он оказался пригодным для исследования всех полупростых групп [7], причем для группы $\mathfrak{g}$ с его помощью всесторонне освещаются те разнообразные связи, о которых только что шла речь.

§ 2. Инфинитезимальный метод Картана: веса

Заданная абстрактно r-параметрическая инфинитезимальная группа [4] является r-мерным линейным векторным многообразием; сложение векторов воспроизводит композицию элементов группы. Но кроме композиции здесь имеется операция образования коммутатора, при помощи которой из двух произвольных элементов u, v группы получается новый элемент $w = [u, v]$. Эту операцию следует рассматривать как умножение, так как она подчиняется дистрибутивному закону как относительно первого сомножителя:

$$[u + u', v] = [u, v] + [u', v], \qquad [\alpha u, v] = \alpha [u, v]$$

(α — произвольное число), так и относительно второго. Однако вместо коммутативности и ассоциативности здесь выполняются следующие соотношения:

$$[v, u] = -[u, v],$$

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Если элементами являются матрицы (инфинитезимальные линейные преобразования), то коммутатор определяется следующим образом:

$$[u, v] = uv - vu.$$

---

[3] Proc. London Math. Soc., 1900, vol. 33, p. 97; 1901, vol. 34, p. 361.

[4] Rend. Circ. mat. Palermo, 1924, vol. 48, p. 29.

[5] Bull. Soc. math. France, p. 53 (цитируется далее: *Cartan E.*, II). Затем: J. math. (6), 1914, vol. 10, p. 149. Эти работы опираются на диссертацию Э. Картана (Париж, 1894), в которой была строго доказана таблица Каллинга для абстрактно заданных полупростых групп.

[6] В трех статьях: S. - Ber. Berlin Akad., 1924, S. 189, 297, 346.

[7] Предварительные сообщения о моих результатах появились в: Götting. Nachr., 1925; S.- Ber. Berlin Akad., 1924, S. 338.

Инфинитезимальные операции группы $\mathfrak{g}$ образуют *инфинитезимальную группу* $\mathfrak{g}^0$ *матриц со следом* 0; число ее параметров $r = n^2 - 1$. Зафиксировав определенную систему координат, мы из $\mathfrak{g}^0$ выделяем $(n - 1)$-параметрическую абелеву группу диагональных матриц:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix} = h = h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n);$$

λ являются переменными, связанными соотношением

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем через e_{ik} для $i \neq k$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ обозначается матрица, у которой на пересечении i-й строки и k-го столбца стоит 1, а во всех остальных местах — нули. Элементы e_{ik} вместе с h образуют *базис* группы $\mathfrak{g}^0$, ибо каждый элемент из $\mathfrak{g}^0$ можно единственным образом записать в виде

$$h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + \sum_{i \neq k} \tau_{ik} e_{ik}. \tag{3}$$

Структурные формулы для группы $\mathfrak{g}^0$ таковы:

$$[h, h'] = 0 \text{ для двух произвольных } h;$$

$$[h, e_{ik}] = (\lambda_i - \lambda_k) e_{ik}.$$

Благодаря последнему соотношению линейные формы $\lambda_i - \lambda_k$ переменных λ называются *корнями* нашей группы; $e_{ik} = e_\alpha$ есть элемент группы, соответствующий корню $\alpha = \lambda_i - \lambda_k$.

$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$, т. е. равно тому h, у которого $\lambda_i = 1$, $\lambda_k = -1$, все прочие λ равны нулю.

$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} e_{\alpha+\beta} \\ 0 \end{cases}$ в зависимости от того, будет $\alpha + \beta \neq 0$ снова корнем или нет.

Проблема представления для абстрактно заданной инфинитезимальной группы состоит в том, чтобы ее элементам u однородно линейным образом так поставить в соответствие матрицы U, что коммутатору $[u, v]$ двух элементов u, v всегда соответствует коммутатор

$$[U, V] = UV - VU$$

матриц U, V. Если имеется состоящий из r элементов базис инфинитезимальной группы, то достаточно задать соответствующую матрицу для каждого базисного элемента. Речь идет, таким образом, о *чисто алгебраической проблеме*. Если исходить из непрерывной группы $\mathfrak{g}$ и какого-либо представления $\mathfrak{S}$ этой группы, то при таком переходе к инфинитезимальным операциям приходится пользоваться некоторыми допущениями о дифференцируемости, которые будем считать выполненными. Даже если первоначально речь идет лишь о представлении *вещественной* группы $\mathfrak{g}$, параметрам λ_i, τ_{ik} в (3) можно придавать любые комплексные значения и переходить к некоторому представлению $\mathfrak{S}^0$ полной комплексной инфинитезимальной группы $\mathfrak{g}^0$. Элементы из $\mathfrak{g}^0$ будут

обозначаться малыми латинскими буквами, а соответствующие им матрицы в $\mathfrak{G}^0$ — соответствующими большими латинскими буквами. Матрица H $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ однородно и линейно зависит от параметров λ, связанных соотношением (2), и для искомой инфинитезимальной группы $\mathfrak{G}^0$ линейных преобразований в N-мерном пространстве $\mathfrak{R}$ мы имеем следующие структурные формулы:

$$[H, H'] = 0, \quad [H, E_\alpha] = \alpha E_\alpha,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \quad [E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} E_{\alpha+\beta} \\ 0 \end{cases}$$

в соответствии с тем, будет ли $\alpha + \beta \neq 0$ корнем или нет. Такова алгебраическая постановка проблемы. Далее в этом и следующем параграфах будет изложена наиболее существенная часть исследований Картана.

Так как мы почти исключительно будем действовать с представляющими матрицами в пространстве $\mathfrak{R}$, то малые латинские буквы будут использоваться также для обозначения векторов в этом пространстве. N-мерная матрица E будет обозначать инфинитезимальное преобразование в $\mathfrak{R}$, которое задает приращение

$$dx = Ex$$

для произвольного вектора x. Если для вектора e тождественно по λ выполняется соотношение

$$He = \Lambda \cdot e,$$

где Λ — линейная форма от λ, то мы говорим, что e — вектор *веса* Λ, причем если $e \neq 0$, Λ называется весом рассматриваемого представления $\mathfrak{G}^0$.

Если x есть вектор веса Λ, то и Hx будет вектором того же веса Λ, а $E_\alpha x$ — вектором веса $\Lambda + \alpha$. Достаточно доказать второе утверждение [5]:

$$HE_\alpha x = [H, E_\alpha]x + E_\alpha Hx = \alpha \cdot E_\alpha x + \Lambda \cdot E_\alpha x.$$

Если вектор x веса Λ равен сумме векторов с другими весами, то $x = 0$. В самом деле, пусть

$$x = x_1 + x_2 + \ldots \tag{4}$$

и $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ суть веса векторов $x_1, x_2, \ldots$. Построив многочлен

$$\varphi(\zeta) = (\zeta - \Lambda_1)(\zeta - \Lambda_2) \ldots$$

и применив операцию $\varphi(H)$ к равенству (4), справа получим 0, а слева $\varphi(\Lambda) \cdot x$.

С помощью базиса $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ линейного семейства всех матриц H, *которые перестановочны между собой*, известным способом получаем, *что вообще веса существуют*, т. е. что существует такой отличный от 0 вектор e, что He будет его кратным. Если имеется неприводимое представление, то легко строится даже координатная система $e_1, e_2, \ldots, e_N$ пространства $\mathfrak{R}$, которая вся состоит из векторов с определенными весами [8]. В таком случае H стано-

[8] С помощью более сложного анализа то же самое можно получить и для приводимых представлений; см.: *Cartan E.* Thèse. P., 1894, сар. 8. Этот результат, однако, нам здесь не нужен; впрочем, в нашем исследовании он получится далее сам собой [6].

вится, как и h, диагональной матрицей. Действительно, исходя из некоторого вектора $e \neq 0$, обладающего весом Λ, построим наименьшее инвариантное относительно $\mathfrak{G}^0$ векторное многообразие, содержащее e. Мы строим, таким образом, ряд

$$e, E_\alpha e, E_{\alpha'} E_\alpha e, \ldots, \tag{5}$$

где $\alpha, \alpha', \ldots$ независимо друг от друга пробегают все корни группы $\mathfrak{g}^0$. По крайней мере после N-го шага этот ряд перестанет давать новые векторы, которые были бы линейно независимы от предыдущих. На векторы ряда (5) натягивается некоторая плоскость $\mathfrak{R}'$, инвариантная относительно $\mathfrak{G}^0$; если $\mathfrak{G}^0$ неприводимо, то должно быть $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$. Каждый вектор выписанного ряда имеет определенный вес: Λ, $\Lambda + \alpha$, $\Lambda + \alpha + \alpha'$, ...

Переход от инфинитезимальной точки зрения к интегральной дает нам, пожалуй, возможность сделать дальнейшее более прозрачным. С помощью итерации инфинитезимального линейного преобразования h пространства $\mathfrak{r}$ получается конечное преобразование, которое характеризуется диагональной матрицей (ε) с элементами

$$\varepsilon_i = e^{\lambda_i} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n; \quad \prod_i \varepsilon_i = 1\right).$$

В неприводимом представлении $\mathfrak{G}$ ей соответствует диагональная матрица (E) с элементами

$$\mathrm{E}_i = e^{\Lambda_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где каждый из весов Λ_i имеет вид

$$\Lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n \tag{6}$$

и, следовательно, каждая из E_i имеет вид

$$\mathrm{E} = \varepsilon_1^{m_1} \varepsilon_2^{m_2} \ldots \varepsilon_n^{m_n}. \tag{7}$$

«Произвольное» преобразование [7] t группы $\mathfrak{g}$ сопряжено с некоторым диагональным преобразованием (ε) внутри $\mathfrak{g}$:

$$t = u^{-1}(\varepsilon)\, u. \tag{8}$$

ε_i — характеристические корни или — как я предпочитаю говорить, чтобы прилагательное «характеристический» встречалось не слишком часто — *мультипликаторы преобразования* t. Из (8) для представления $\mathfrak{G}$ следует соответствующее равенство:

$$T = U^{-1}(\mathrm{E})\, U.$$

След матрицы T поэтому равен следу матрицы (E), т. е. сумме членов E_i вида (7). След $\chi(t)$ преобразования T, индуцированного преобразованием t, называется *характером представления* $\mathfrak{G}$; этот характер является точным аналогом фробениусовского понятия характера для конечных групп [8]. Сумма членов E_i равна характеру, выраженному через мультипликаторы преобразования t. Вычисление весов Λ_i и их кратностей эквивалентно вычислению $\chi(t)$

как функции мультипликаторов ε_i преобразования t: каждому весу (6) соответствует произведение степеней (7). Так как матрица (ε) внутри $\mathfrak{g}$ сопряжена с матрицей, получающейся из нее перестановкой членов ε_i, то характер должен быть *симметрической* функцией мультипликаторов. Для весов это означает, что *вместе с некоторым весом* (6) *всегда имеется вес, получающийся из него произвольной перестановкой переменных* λ_i. Учитывая соотношение (2) между переменными λ_i, коэффициенты в линейной форме (6) можно нормировать так, чтобы $m_n = 0$. Исходя из топологических свойств группы $\mathfrak{g}$, мы в дальнейшем докажем, что если параметры λ_i чисто мнимые, то характер $\chi((\varepsilon))$ будет однозначной функцией от (ε). При нормировании $m_n = 0$ показатели m_i должны быть поэтому целыми числами; или, выразив это независимо от нормирования: *для любого веса* Λ *коэффициенты* m_i *отличаются друг от друга на целые числа*. Это существенный шаг к пониманию того, что существуют лишь рациональные представления [9] группы $\mathfrak{g}$.

Оба выделенных выше курсивом утверждения могут быть доказаны с помощью инфинитезимального метода некоторым рассуждением, которое играет основополагающую роль во всей теории инфинитезимальных групп. Пусть Λ_α обозначает значение веса Λ для $H = H_\alpha$, т. е. при $\lambda_i = 1$, $\lambda_k = -1$ и всех других $\lambda = 0$

$$\Lambda_\alpha = m_i - m_k; \tag{9}$$

в частности, $\alpha_\alpha = 2$.

Теорема 1. *Если* Λ *есть вес, то* $\Lambda - \Lambda_\alpha \cdot \alpha$ *также есть вес*; Λ_α — *целое число*.

Доказательство. Пусть Λ будет крайним весом по отношению к α, т. е. Λ будет, а $\Lambda + \alpha$ уже не будет весом. Имеем

$$He = \Lambda \cdot e \qquad (e = e_0 \neq 0).$$

Образуем векторы

$$E_{-\alpha}\, e = e_1, \qquad E_{-\alpha} e_1 = e_2, \; \ldots$$

весов $\Lambda - \alpha$, $\Lambda - 2\alpha$, ... Так как вообще

$$He_i = (\Lambda - i\alpha)\cdot e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

то, в частности,

$$H_\alpha e_i = (\Lambda - i\alpha)_\alpha e_i. \tag{10}$$

Пусть в ряду $e_0, e_1, e_2, \ldots$ вектор e_{h+1} будет первым, равным нулю [10]. Если исходить из вектора e_h веса $\Lambda - h\alpha$ и применять к нему последовательно операцию E_α, то получим ли мы те же векторы [11], но в обратном порядке? В действительности это так и будет, а именно, имеют место равенства

$$E_\alpha e_i = \mu_i e_{i-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство проводится с помощью полной индукции. Утверждение верно для $i = 0$, причем следует положить $\mu_0 = 0$, так что значение e_{-1} безразлично. В самом деле, $E_\alpha e$ есть вектор веса $\Lambda + \alpha$ и вес $\Lambda + \alpha$ не встречается среди весов данного представления, а поэтому $E_\alpha e = 0$. Переход от i к $i + 1$ осно-

вывается на равенстве (10) и на том факте, что $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$:

$$E_\alpha e_{i+1} = E_\alpha E_{-\alpha} e_i = H_\alpha e_i + E_{-\alpha} E_\alpha e_i = (\Lambda - i\alpha)_\alpha e_i + \mu_i E_{-\alpha} e_{i-1}.$$

Отсюда получается рекуррентная формула

$$\mu_{i+1} = \mu_i + (\Lambda - i\alpha)_\alpha,$$

так что

$$\mu_i = \sum_{j=0}^{i-1} (\Lambda - j\alpha)_\alpha.$$

Так как $e_{h+1} = 0$, а $e_h \neq 0$, то должно быть $\mu_{h+1} = 0$. Это приводит к равенству

$$(h + 1)(\Lambda_\alpha - {}^1/_2 h\alpha_\alpha) = 0 \text{ или } \Lambda_\alpha = h.$$

Тем самым теорема доказана для крайнего веса Λ, для которого она нам, собственно, и нужна. Но она сразу же переносится на всю серию весов

$$\Lambda,\ \Lambda - \alpha,\ \Lambda - 2\alpha, \ldots, \Lambda - h\alpha.$$

Линейная подстановка переменных λ, переводящая линейную форму Λ от них в $\Lambda' = \Lambda - \Lambda_\alpha \cdot \alpha$, переводит этот ряд в обратный.

Но в силу (9) упомянутая подстановка является не чем иным, как перестановкой λ_i и λ_k. Тем самым поставленная цель достигнута.

§ 3. Инфинитезимальный метод Картана: нахождение неприводимого представления при помощи его старшего веса

Наши рассуждения до сих пор следовали руслу, проложенному в большей или меньшей степени алгебраической традицией еще до Картана. Его собственным и оригинальным достижением является установление и доказательство следующей теоремы:

Теорема 2. *Неприводимое представление однозначно определяется своим старшим весом; этот вес всегда имеет кратность* 1.

Нормируя коэффициенты m_i линейной формы (6) при помощи симметрического условия

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0, \tag{11}$$

будем форму Λ называть положительной, если первый отличный от 0 коэффициент в ряде $m_1, m_2, \ldots, m_n$ будет положительным. Из двух подобных линейных форм

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} m_i \lambda_i, \quad \Lambda' = \sum_{i=1}^{n} m_i' \lambda_i$$

Λ' старше, если форма $\Lambda' - \Lambda$ положительна. Это расположение по старшинству лежит в основе определения «старшего веса». При нормировке (11) коэффициенты m_i некоторого веса, вообще говоря, будут дробными числами со зна-

менателем n. Для характера как функции от ε_i это расположение по старшинству сводится к известному лексикографическому расположению произведений степеней. Теорема 2 утверждает, что старший член в характере имеет коэффициент 1 и что неприводимое представление полностью определяется этим старшим членом. Тем самым теорема 2 дополняет и уточняет общую теорему Фробениуса—Шура, которая возникла вне инфинитезимального круга идей и в которой утверждается, что неприводимое представление однозначно определяется своим характером. Так как вместе с Λ в качестве веса всегда встречается линейная форма, которая получается из Λ перестановкой двух переменных λ_i, λ_k, то старший вес, записанный в виде

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_{n-1}\lambda_{n-1} \; (m_n = 0),$$

должен иметь целочисленные коэффициенты, удовлетворяющие неравенствам

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n = 0. \tag{12}$$

Исходя из некоторого вектора $e \neq 0$ со старшим весом Λ, построим все векторы ряда (5). Имеет место

Лемма. *Каждый вектор со старшим весом Λ из этого ряда является кратным вектора e, т. е. имеет вид $\varkappa e$, причем множитель $\varkappa$ полностью определяется старшим весом и процессом образования данного вектора из e с помощью отображений E_α.*

Доказательство. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — какие-либо корни и для краткости положено $E_{\alpha_i} = E_i$, то

$$E_m \ldots E_2E_1e \tag{13}$$

будет, как и e, вектором веса Λ, если

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = 0. \tag{14}$$

Утверждается, что вектор (13) равен $\varkappa e$, где $\varkappa$ зависит лишь от старшего веса Λ и от корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Среди этих корней в силу (14) должны быть положительные; пусть α_l — первый из них. В случае $l = 1$ наше утверждение очевидно, так как тогда вес $\Lambda + \alpha_1$ вектора E_1e старше Λ и поэтому по смыслу Λ вектор E_1e должен быть равен нулю. В случае $l > 1$ заменяем $e' = E_lE_{l-1}\ldots$ $\ldots E_1e$ через

$$[E_l, E_{l-1}]E_{l-2}\ldots E_1e + E_{l-1}E_lE_{l-2}\ldots {}_1e. \tag{15}$$

Первый член в (15):

либо $= 0$: если $\alpha_l + \alpha_{l-1} \neq 0$, но не является корнем;

либо $= \mu \cdot E_{l-2} \ldots E_1e$: если $\alpha_l + \alpha_{l-1} = 0$, $[E_l, E_{l-1}]$ в этом случае равно какому-то H и число μ будет весом вектора $E_{l-2} \ldots E_1e$, вычисленным для этого H;

либо имеет вид $E_\beta E_{l-2} \ldots E_1e$: если $\alpha_l + \alpha_{l-1} = \beta$ тоже является корнем.

Таким образом, в этом члене, если он не равен нулю, число стоящих перед вектором e отображений E на 2 или на 1 меньше, чем в e', а множитель μ определяется старшим весом и способом образования вектора e'. Во втором члене формулы (15) положительный корень α_l стоит уже не на l-м месте, как в e',

а на $(l-1)$-м. Тем самым, ссылаясь на рассмотренный уже случай $l = 1$, получаем, что лемма доказана по индукции.

Как сейчас будет показано, из этой леммы следует теорема 2, в формулировке которой, конечно, подразумевается, что два эквивалентных представления не различаются. Пусть e и e^* будут соответственно векторами старшего веса в двух неприводимых представлениях $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_*$. Наряду с рядом (5) рассмотрим аналогичный ряд

$$e^*, \ E_\alpha^* e^*, \ E_\alpha^*, \ E_\alpha^* e^*, \ \ldots, \qquad (5^*)$$

где E_α^* в $\mathfrak{S}_*^0$ соответствует тому же элементу e_α из $\mathfrak{g}^0$, что и E_α в $\mathfrak{S}^0$. Каждому вектору первого ряда сопоставим соответствующий вектор второго ряда. Таким образом мы получаем линейное отображение пространства $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{R}^*$ [12], в соответствии с которым представление $\mathfrak{S}^0$ переходит в $\mathfrak{S}_*^0$, если только имеет место следующее утверждение: пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — какие-либо векторы первого ряда, которые связаны однородным линейным соотношением

$$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_m e_m = 0; \qquad (16)$$

тогда соответствующие векторы e_1^*, e_1^*, ..., e_m^* второго ряда связаны между собой тем же соотношением [13]. Для доказательства этого утверждения поставим в соответствие каждому соотношению вида (16) вектор

$$\gamma_1 e_1^* + \gamma_2 e_2^* + \ldots + \gamma_m e_m^*$$

пространства $\mathfrak{R}^*$. Все эти векторы образуют некоторое линейное многообразие в $\mathfrak{R}^*$, инвариантное относительно $\mathfrak{g}_*^0$. Но согласно предыдущей лемме *это многообразие не содержит вектора* e^*, состоит исключительно из векторов младшего, чем e^*, веса [14] и, таким образом, в силу предположенной неприводимости представления $\mathfrak{S}_*^0$ должно редуцироваться к нулю.

§ 4. Построение неприводимых представлений

Самое простое представление группы $\mathfrak{g}^0$ получается, если каждому элементу из $\mathfrak{g}^0$ поставить в соответствие инфинитезимальное преобразование $dx = 0$ *одной* переменной x: каждому элементу группы $\mathfrak{g}$ соответствует при этом одномерная единичная матрица. Во-вторых, сама $\mathfrak{g}^0$, соответственно $\mathfrak{g}$, является неприводимым представлением этой группы. Далее, из аналитической геометрии известны группы $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, ..., по которым преобразуются поверхностные элементы, пространственные элементы и т. д. [15]; соответствующие размерности равны

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ \ldots$$

Поверхностный элемент $x \times y$, построенный на двух векторах $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ в пространстве $\mathfrak{r}$ («двумерный вектор» в $\mathfrak{r}$, получающийся при помощи «внешнего умножения» из одномерных векторов x и y), является кососимметрическим тензором ранга 2 с компонентами

$$x_i y_k - x_k y_i.$$

Внешние умножения из двух всевозможных базисных векторов $e_i \times e_k$ $(i < k)$ нашей системы координат в $\mathfrak{r}$ образуют базис для совокупности кососимметрических тензоров ранга 2. При переходе к другой координатной системе в пространстве $\mathfrak{r}$ с помощью преобразования t они в свою очередь подвергаются некоторому линейному преобразованию; таким способом получается упомянутое представление $\mathfrak{g}_2$ размерности $n(n-1)/2$. Если вектор e_i при инфинитезимальном преобразовании h получает приращение $de_i = \lambda_i e_i$, то двумерный базисный вектор $e_i \times e_k$ имеет вес $\lambda_i + \lambda_k$:

$$d(e_i \times e_k) = (de_i + e_k) + (e_i \times de_k) = (\lambda_i + \lambda_k)(e_i \times e_k).$$

Следовательно, весами представления $\mathfrak{g}_2$ являются $n(n-1)/2$ линейных форм $\lambda_i + \lambda_k$ $(i < k)$, старшим из которых будет $\lambda_1 + \lambda_2$. Это представление неприводимо в силу следующего утверждения:

Лемма. *Если N-мерное пространство $\mathfrak{R}$ какого-либо представления $\mathfrak{S}$ отнесено к координатной системе из N векторов $e_1, e_2, \ldots, e_N$, каждый из которых имеет определенный вес Λ_i, причем все эти N весов различны между собой, и если все N базисных векторов e_i могут быть получены из любого из них при помощи действия преобразований из $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{S}$ неприводимо.*

Действительно, пусть $\mathfrak{R}'$ будет линейным векторным многообразием в $\mathfrak{R}$, инвариантным относительно группы $\mathfrak{S}^0$ и содержащим отличный от 0 вектор

$$e = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_N e_N.$$

Тогда

$$He = \xi_1 \Lambda_1 e_1 + \xi_2 \Lambda_2 e_2 + \ldots + \xi_N \Lambda_N e_N.$$

Таким образом, если построить с помощью интерполяционной формулы Лагранжа многочлен $\varphi(\zeta)$, который при $\zeta = \Lambda_1$ принимает значение 1, а в точках $\zeta = \Lambda_2, \ldots, \Lambda_N$ обращается в нуль, то

$$\varphi(H)\, e = \xi_1 e_1.$$

При $\xi_1 \neq 0$ вектор e_1 принадлежит многообразию $\mathfrak{R}'$. Но по крайней мере один из коэффициентов ξ_i отличен от нуля, а поэтому по крайней мере один из базисных векторов e_i принадлежит $\mathfrak{R}'$. В силу того, что с помощью преобразований из $\mathfrak{S}$ из этого вектора могут быть получены все другие базисные векторы, $\mathfrak{R}'$ совпадает со всем $\mathfrak{R}$.

Таким образом, многообразия 1-мерных, 2-мерных, ..., $(n-1)$-мерных векторов в $\mathfrak{r}$ дают нам $n-1$ неприводимых представлений $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_{n-1}$. Старший вес и размерность для $\mathfrak{g}_i$ соответственно равны

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i = \mu_i \quad \text{и} \quad \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\ldots i}.$$

Образованное из этих представлений с помощью целых неотрицательных показателей p_i составное представление

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{g}_1^{p_1}\mathfrak{g}_2^{p_2}\ldots\mathfrak{g}_{n-1}^{p_{n-1}}$$

имеет в качестве старшего веса

$$\Lambda = p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots + p_{n-1}\mu_{n-1} = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_{n-1}\lambda_{n-1},$$

причем $m_i = p_i + p_{i+1} + \ldots p_{n-1}$.

С помощью приведения из этого представления можно выделить *неприводимое* представление с тем же старшим весом [16]. Так как, с другой стороны, в силу неравенств (12) любой возможный старший вес какого-либо неприводимого представления может быть аддитивно составлен из весов μ_i при помощи неотрицательных целых коэффициентов p_i и, согласно теореме 2, заданному старшему весу соответствует лишь одно неприводимое представление, *то мы тем самым нашли метод для построения всех неприводимых представлений группы* $\mathfrak{g}$.

При композиции двух неприводимых представления $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ систему величин x_ix_j' (ср. формулу (0)) мы будем рассматривать как произведение вектора (x_i) в пространстве $\mathfrak{R}$ и вектора (x_j') в пространстве $\mathfrak{R}'$. Если в пространстве $\mathfrak{R}$ выбрана координатная система $e_1, e_2, \ldots, e_N$, все векторы которой имеют определенные веса Λ_i, причем, в частности, вектор e_1 имеет старший вес, и если в пространстве $\mathfrak{R}'$ аналогично проделано то же самое, то векторы-произведения e_ie_j' в NN'-мерном пространстве $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ имеют веса $\Lambda_i + \Lambda_j'$ по отношению к представлению $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'$. Э. Картан [9] выделяет из $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'$ неприводимую составную часть со старшим весом $\Lambda_1 + \Lambda_1'$ тем, что рассматривает внутри $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ наименьшее линейное многообразие $\mathfrak{R}^*$, которое содержит все получающиеся из e_1e_1' при помощи преобразований в $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'$ векторы. Неприводимость так возникающей «картановской компоненты» $\mathfrak{S}^*$ отнюдь не является, однако, вопреки мнению Картана, очевидной. С помощью приема, использованного при доказательстве последней леммы, мы убеждаемся прежде всего в следующем: если в выражении

$$e^* = \sum_{i,j} \eta_{ij} e_i e_j'$$

некоторого вектора e^* из $\mathfrak{R}^*$ собрать вместе все члены одного и того же веса, то отдельные слагаемые *разных* весов, на которые при этом разлагается e^*, тоже будут принадлежать пространству $\mathfrak{R}^*$. *Следовательно, в* $\mathfrak{R}^*$ *можно ввести координатную систему* $e_1^* = e_1e_1'$, $e_2^*, \ldots$, *все векторы которой имеют определенный вес. Среди них лишь вектор* e_1^* *имеет старший вес* $\Lambda_1^* = \Lambda_1 + \Lambda_1'$. *Все векторы из* $\mathfrak{R}^*$ *составляются аддитивно из векторов, получающихся из* e_1^* *при помощи группы преобразований* $\mathfrak{S}^*$. Можно ли отсюда сделать вывод о неприводимости $\mathfrak{S}^*$?

Насколько я вижу, этот вывод можно сделать лишь в том случае, если предполагать известным такой результат из следующего параграфа: *каждое приводимое представление распадается* [10]. А именно, легко убедиться в том, что $\mathfrak{R}^*$ не может быть разложено в сумму двух подпространств $\mathfrak{R}_1^* + \mathfrak{R}_2^*$,

[9] *Cartan E.*, II, p. 64.

[10] Таким образом, в данном месте в исследовании Картана имеется существенный пробел. Точно так же ход доказательства в: *Cartan E.*, II, pt 1, 4, p. 58—59, кажется мне неубедительным.

которые при помощи $\mathfrak{S}^*$ преобразуются в себя. В одно из этих пространств, скажем в $\mathfrak{R}_1^*$, должен был бы входить некоторый вектор $\eta_1 e_1^* + \eta_2 e_2^* + \ldots$, у которого компонента $\eta_1 \neq 0$. Тогда при помощи повторного применения преобразования H^* получаем, как и выше, что в пространстве $\mathfrak{R}_1^*$ содержится вектор $\eta_1 e_1^*$ и тем самым e_1^*. Но вместе с e_1^* в $\mathfrak{R}_1^*$ будут входить уже все векторы из $\mathfrak{R}^*$.

Образуем, например, с помощью картановской композиции [17] $\mathfrak{g}_1^2\mathfrak{g}_2$! Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ обозначает координатную систему в пространстве $\mathfrak{r}$. К вектору

$$e_1 e_1 (e_1 \times e_2) \tag{17}$$

должны быть применены все преобразования t группы $\mathfrak{g}$.

Пусть, например, t имеет вид

$$e_1' = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$
$$e_2' = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Преобразование t переводит (17) в

$$\sum \xi_i \xi_k (\xi_l \xi_m - \xi_m \eta_l) e_i e_k e_l e_m. \tag{18}$$

Из выражений вида

$$\xi_i \xi_k \xi_l \eta_m$$

можно составить все тензоры ранга 4, симметричные по первым трем индексам. Они получаются из общего тензора ранга 4 с помощью «смешивания» [18] по первым трем индексам, т. е. с помощью образования суммы всех тензоров, получающихся из него применением 3! перестановок этих индексов. Затем согласно (18) над тензором f_{iklm}, симметричным относительно ikl, нужно еще произвести «альтернацию» по отношению к индексам l и m, т. е. образовать *альтернированную* сумму тензоров, получающихся при перестановке этих индексов:

$$f_{iklm} - f_{ikml}.$$

В полученном таким способом векторном многообразии группа $\mathfrak{g}$ индуцирует неприводимую группу преобразований $\mathfrak{S}$, а именно группу со старшим весом $3\lambda_1 + \lambda_2$.

Для формулировки общего результата мы воспользуемся в соответствии с (1) вместо компонент тензора кратной линейной формой. Речь идет о том, чтобы построить неприводимое представление со старшим весом

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots \qquad (m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots).$$

Обозначим через ν сумму целых неотрицательных чисел $m_1 + m_2 + \ldots$. Разобьем числа от 1 до ν на отрезки длиной $m_1, m_2, \ldots$ и будет представлять себе эти отрезки подписанными друг под другом так, как это указано на схеме $\{m\}$ [19]. Через A будем обозначать

$m_1 = 7$

$m_2 = 5$

$m_3 = 5$

$m_4 = 2$

$m_5 = 0$

Схема $\{m\}$ $(\nu = 19)$

группу тех перестановок A для ν чисел, которые переставляют между собой только числа, стоящие в вертикальных рядах нашей схемы, а через **B** — группу перестановок B, которые переставляют между собой числа, стоящие в одном и том же горизонтальном ряду. Если A пробегает группу **A** и B — группу **B**, то AB пробегает без повторений комплекс **AB**. Для любой перестановки P из ν чисел полагаем $\varepsilon_P = 0$, если P не принадлежит комплексу **AB**; в остальных случаях для $P = AB$ полагаем $\varepsilon_P = +1$ или -1 в зависимости от того, будет ли A четной или нечетной перестановкой. Из общего тензора f ранга ν, применяя оператор

$$\mathbf{e} = \sum_P \varepsilon_{P^{-1}} P, \tag{19}$$

получаем тензор

$$f^* = \sum_P \varepsilon_{P^{-1}} fP. \tag{20}$$

Теорема 3. *Все тензоры f^*, которые получаются из тензоров f ранга ν применением оператора $\mathbf{e}$, принадлежащего схеме $\{m\}$, образуют класс простых величин, и соответствующее представление $\mathfrak{G}$ группы $\mathfrak{g}$ имеет старший вес $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots$ Этим способом получается самое общее неприводимое представление группы $\mathfrak{g}$.*

Если в рассматриваемой схеме не все вертикали имеют длину $\leqslant n$, то f^* тождественно равно нулю. Если же это условие выполнено, то имеют значение лишь *разности* между целыми числами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Поэтому можно было бы добиться того, чтобы $m_n = 0$, но для общего исследования целесообразнее не прибегать к этой нормировке.

Компоненты матрицы T в нашем неприводимом представлении $\mathfrak{G}$, очевидно, являются целыми рациональными функциями степени ν относительно компонент матрицы t. Свободно варьируя последние, получаем, что T будут одновременно образовывать неприводимое представление группы $\tilde{\mathfrak{g}}$ всех (вещественных или комплексных) преобразований с отличным от нуля (или положительным) определителем. То, что приведенные неприводимые представления не являются исчерпывающими для $\tilde{\mathfrak{g}}$, и, вообще, в какой степени $\tilde{\mathfrak{g}}$ ведет себя существенно сложнее, чем $\mathfrak{g}$, будет рассмотрено нами в конце этой главы, в § 8.

§ 5. Теорема о полной приводимости

Доказательство теоремы о том, что любое приводимое представление распадается, я не могу провести инфинитезимальным алгебраическим способом. Поэтому, начиная с этого места, мы будем пользоваться трансцендентным интеграционным методом, который был впервые создан Гурвицем для построения инвариантов [11] и затем был использован, как и в настоящей статье, И. Шуром для получения представлений группы вращений. Во всех случаях, в которых до сих пор удавалось установить полную приводимость, *доказательство основано на построении некоторой инвариантной определенной квадратичной* (*соответственно эрмитовой*) *формы*.

Если имеется группа $\mathfrak{h}$ вещественных однородных линейных преобразований в n-мерном пространстве $\mathfrak{r}$ и положительно-определенная квадратичная форма Q, которая при преобразованиях групп $\mathfrak{h}$ переходит в себя, то пространство $\mathfrak{r}$ при помощи Q превращается в метрическое евклидово пространство. Если $\mathfrak{h}$ оставляет инвариантным подпространство $\mathfrak{r}_1$ размерности n_1, то $\mathfrak{h}$ оставляет инвариантным и пространство $\mathfrak{r}_2$, ортогональное к $\mathfrak{r}_1$, размерности $n_2 = n - n_1$ ($\mathfrak{r}_2$ состоит из всех векторов, ортогональных в смысле метрики Q ко всем векторам из $\mathfrak{r}_1$): $\mathfrak{r}$ распадается на сумму двух инвариантных подпространств $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$. В случае комплексного пространства аналогичную роль играет инвариантная положительно-определенная эрмитова форма. Для группы, состоящей из конечного числа однородных линейных преобразований, такая форма получается с помощью сложения. Исходя из какой-либо фиксированной эрмитовой формы, например единичной формы $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n$ (черта обозначает комплексно-сопряженную величину), образуют сумму всех тех форм, которые получаются из нее применением подстановок рассматриваемой группы. При желании применить тот же прием к непрерывной группе $\mathfrak{G}$, являющейся представлением группы $\mathfrak{g}$, следует вместо сложения воспользоваться интегрированием. Для этого в групповом многообразии нужно иметь инвариантное измерение объемов. Такое измерение объемов осуществимо в $\mathfrak{g}$, как и в любом групповом многообразии [[20]].

Если s, s' — два бесконечно близких элемента r-параметрической непрерывной группы $\mathfrak{H}$, две бесконечно близких «точки» на групповом многообразии $\mathfrak{H}$, то $s's^{-1}$ (композиция производится слева направо) является инфинитезимальным элементом группы $\mathfrak{H}$; этот элемент или систему его компонент относительно какого-либо выбранного базиса в соответствующей инфинитезимальной группе $\mathfrak{H}^0$ мы будем рассматривать как *вектор*, идущий от s к s'. В качестве *объема* некоторого элемента, имеющего форму параллелепипеда и натянутого на r инфинитезимальных векторов, исходящих из s, как обычно, принимается определитель из компонент этих векторов. Если a — некоторая заданная точка из $\mathfrak{H}$, то отображение $s \to sa$ группы $\mathfrak{H}$ на себя будет называться *параллельным переносом*; это тот параллельный перенос, который единичный элемент e переводит в a. При параллельном переносе векторы не меняются (чем и оправдывается название «параллельный перенос»), и поэтому объемные элементы, переходящие друг в друга при параллельном переносе, имеют равные объемы.

---

[11] Götting. Nachr., 1897, S. 71.

Объем объемного элемента в точке t группового многообразия $\mathfrak{g}$ будет обозначаться через $|dt|$. Если $\mathfrak{S}$ — N-мерное представление группы $\mathfrak{g}$ и $(h)\,T$ обозначает эрмитову форму, которая получается из единичной формы

$$(h) = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_N\bar{x}_N$$

в пространстве $\mathfrak{R}$ при помощи преобразования T, соответствующего элементу t, то следует образовать

$$\int (h)\, T\, |dt|, \tag{21}$$

где интегрирование производится по всему многообразию $\mathfrak{g}$.

Однако остается неясным, имеет ли этот интеграл смысл; этот способ сталкивается прежде всего с тем, что $\mathfrak{g}$ не является *компактным* многообразием. Эта трудность существенная, ибо не будь ее, теорема о полной приводимости была бы верной для произвольных непрерывных групп! [21].

Однако в случае группы $\mathfrak{g}$ трудность эта преодолевается с помощью идеи Гурвица о том, что прежде всего следует ограничиться рассмотрением лишь *унитарных* преобразований внутри $\mathfrak{g}$; действительно, группа $\mathfrak{g}_u$ унитарных преобразований с определителем 1 компактна. Ее инфинитезимальные операции (τ_{ik}) характеризуются следующими соотношениями:

$$\tau_{ik} + \bar{\tau}_{ik} = 0, \quad \text{в частности } \tau_{ii} = \lambda_i \text{ чисто мнимое;} \quad \sum_i \lambda_i = 0.$$

Этим операциям в $\mathfrak{S}^0$ соответствует ограничение $\mathfrak{S}_u{}^0$. Но если для представлений группы $\mathfrak{g}_u{}^0$ верно утверждение о том, что в случае их приводимости они распадаются, то то же утверждение верно для всей группы $\mathfrak{g}^0$. Действительно, пусть $\mathfrak{R}_1$ будет инвариантной относительно $\mathfrak{S}^0$ плоскостью в $\mathfrak{R}$. Тогда по предположению $\mathfrak{R}$ можно так разложить в $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$, что $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ будут инвариантны относительно $\mathfrak{S}_u{}^0$. Координатная система в $\mathfrak{R}_1$ вместе с координатной системой в $\mathfrak{R}_2$ дает некоторую координатную систему в $\mathfrak{R}$, по отношению к которой общая матрица из $\mathfrak{S}^0$ имеет указанный ниже вид. Далее, для матриц из $\mathfrak{S}_u{}^0$ обращаются в нуль все элементы, стоящие в прямоугольнике [1 2]. Каждый такой элемент является линейной

$\mathfrak{R}_1$	*	[1 2]
$\mathfrak{R}_2$	0, ...,0	*
	0, ...,0	
	. . . .	
	0, ...,0	

формой от переменных τ_{ik}:

$$\sum_i a_i\lambda_i + \sum_{i\neq k} a_{ik}\tau_{ik}.$$

Но такая линейная форма тождественно равна нулю, если она равна нулю при ограничении

$$\tau_{ik} + \bar{\tau}_{ik} = 0. \tag{22}$$

Тем самым прямоугольник [1 2] тождественно равен нулю в $\mathfrak{G}^0$. В самом деле, если положить сначала все боковые $\tau_{ik} = 0 \; (i \neq k)$, то условие сведется к $\Sigma a_i \lambda_i = 0$ для любых чисто мнимых чисел λ_i, сумма которых равна нулю; отсюда следует, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Выбирая теперь все переменные, кроме τ_{12} и τ_{21}, равными 0 и полагая

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \sqrt{-1} \mid \tau_{12} = -\tau_{21} = 1,$$

получаем, что эти два случая, удовлетворяющие условию (22), приводят к соотношениям

$$a_{12} + a_{21} = 0 \mid a_{12} - a_{21} = 0,$$

из которых следует $a_{12} = a_{21} = 0$.

Из представления инфинитезимальной группы $\mathfrak{g}_u{}^v$ с $n^2 - 1$ вещественными параметрами с помощью интегрирования по Ли [22] получаем соответствующую матрицу T для всех t из $\mathfrak{g}_u$, которые принадлежат какой-то *окрестности* единичного элемента e. Выбирая в этой окрестности некоторое t_0, можем продолжить полученное представление на окрестность элемента t_0, получаемую из первой параллельным переносом, который переводит e в t_0. Очевидно, что так повторяемый *процесс продолжения* никогда не натолкнется на какую-либо границу [23]. Однако T не обязательно однозначно на $\mathfrak{g}_u$; однозначным оно будет лишь на некотором «*накрывающем пространстве*», которое не разветвлено и неограниченно простирается над $\mathfrak{g}_u$ [24]. Я называю пространство *односвязным*, если любая замкнутая непрерывная кривая в нем может быть стянута в точку. Максимальное неразветвленное и неограниченное накрывающее пространство («универсальная накрывающая поверхность», играющая значительную роль в теории униформизации) заданного пространства является односвязным. Это универсальное накрывающее пространство $\mathfrak{g}_u{}^*$ над $\mathfrak{g}_u$ и есть та истинная абстрактная группа, о представлении которой идет речь; $\mathfrak{g}_u$ является лишь *одним* из ее представлений, и притом укороченным, неизоморфным в случае, когда накрывающее пространство многолистно. Для интеграционного метода важно, чтобы компактным было $\mathfrak{g}_u{}^*$, компактность же $\mathfrak{g}_u$ не является достаточной. Простейшие примеры показывают, что наши опасения не напрасны.

Рассмотрим унитарные преобразования от одной переменной:

$$x = \varepsilon \cdot x' \; (|\varepsilon| = 1).$$

Они образуют окружность единичного круга комплексной ε-плоскости; лишь бесконечное число раз пробегаемая окружность будет односвязной, универсальное накрывающее пространство здесь бесконечнолистно и некомпактно [25]. Поэтому в этом случае существуют также и бесконечнозначные представления, например $y = \varepsilon^\gamma \cdot y'$, где γ — заданный вещественный и иррациональный показатель [26]. Для группы вещественных растяжений

$$x = a \cdot x' \; (a > 0)$$

однозначное представление ее $y = a^\gamma \cdot y'$ приводит к указанным выше бесконечнозначным представлениям унитарной группы, если с помощью инфинитезимальных преобразований перейти в комплексную область и затем ограничиться уни-

тарной областью [27]. Для соответствующей инфинитезимальной группы $dx = \lambda x$

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{Vmatrix}$$

является примером двумерного приводимого, но в то же время нераспадающегося представления. Однако если рассмотреть группу не всех унитарных преобразований, а лишь унитарных преобразований с определителем 1, то, к нашему удовлетворению, имеет место

Теорема 4. $\mathfrak{g}_u$ *односвязно* [28]. (Поэтому каждое представление инфинитезимальной группы приводит к однозначному представлению всей группы $\mathfrak{g}_u$).

Доказательство. Каждая матрица t из $\mathfrak{g}_u$ может быть представлена в виде [12]

$$t = u^{-1}(\varepsilon)\, u,$$

где матрицы u и (ε) тоже принадлежат $\mathfrak{g}_u$ и, в частности, (ε) является диагональной матрицей, состоящей из мультипликаторов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ матрицы t, $|\varepsilon_i| = 1$. Без изменения t можно u заменить на $(\varepsilon')\,u$, где матрица (ε') той же природы, что и (ε). Если же, например, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то u можно заменить даже на $s \cdot u$, где s распадается на одну двустрочную и $n - 2$ однострочные матрицы, стоящие по главной диагонали. s зависит от $n + 1$, а не, как (ε'), от $n - 1$ параметра. «*Сингулярные*» t, т. е. те, у которых не все мультипликаторы различны, *образуют потому внутри* $(n^2 - 1)$*-мерного многообразия* $\mathfrak{g}$ *некоторое многообразие на три единицы меньшей размерности*! Следовательно, можно предположить что замкнутая кривая $\mathfrak{C}$ на $\mathfrak{g}_u$, которая должна быть стянута в точку, не проходит через сингулярные элементы.

Для несингулярного t с помощью равенств

$$\varepsilon_k = e^{2\pi i \varphi_k} = e(\varphi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

введем углы вращения φ_k и на вещественной φ-оси отметим *все* значения φ_k. Они образуют некоторую дискретную систему точек W, периодически повторяющуюся с периодом 1. В силу соотношения $\Pi\varepsilon_i = 1$ сумма n идущих друг за другом точек $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ этой системы есть целое число k. Если от «системы представителей» $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ отбросить слева φ_1 и вместо этого добавить справа $\varphi_1 + 1$, то произойдет переход к «следующей» системе представителей, сумма которых на единицу больше. Таким образом, каждому целому числу k соответствует одна и только одна (k-я) система представителей в W, сумма которых равна k. Будем исходить из 0-й системы представителей $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ того t, которое служит началом $\mathfrak{C}$. В то время как t пробегает замкнутую кривую $\mathfrak{C}$, будем следить за *непрерывным* изменением u и значений углов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ в зависимости от параметра μ кривой $\mathfrak{C}$. Для такой непрерывности нужно, чтобы кривая $\mathfrak{C}$ не проходила через сингулярные элементы. При таком условии не будет происходить взаимного слияния точек φ_i на φ-оси. Следовательно, φ_i все время подчинены неравенствам

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < \varphi_1 + 1]$$

[12] То обстоятельство, что здесь не встречаются известные из теории элементарных делителей исключительные случаи, связано опять с топологией, а именно с компактностью многообразия $\mathfrak{g}_u$.

и равенству

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = 0.$$

В конце процесса они перейдут снова в n последовательно идущих точек первоначальной системы W; но так как сумма их осталась равной нулю, то мы опять получим 0-ю систему представителей: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *все возвращаются к своим первоначальным значениям*, причем соответствующие точки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_n$ на единичной окружности совершают лишь некоторые колебания, а не полный оборот [13].

Деформацию кривой $\mathfrak{C}$ можно теперь осуществить с помощью убывающего от 1 до 0 параметра деформации σ так, что u не зависит от σ, в то время как функции $\varphi_i(\mu)$ заменяются на $\sigma \cdot \varphi_i(\mu)$: при этом кривая $\mathfrak{C}$ непрерывно стягивается в единичную точку.

После того как выяснено, что T однозначно на $\mathfrak{g}_u$, получаем, что интеграл (21), распространенный на компактное многообразие $\mathfrak{g}_u$, дает определенную эрмитову форму, инвариантную относительно преобразований группы $\mathfrak{G}_u$; тем самым доказана

Теорема 5. *Каждое представление группы $\mathfrak{g}$ единственным образом распадается на неприводимые представления: каждая линейная величина составляется из независимых друг от друга простых величин.*

Тем самым лишь теперь рассуждение, проведенное в конце предыдущего параграфа, поставлено на твердую почву.

§ 6. Нахождение характеров и размерностей

Для того чтобы явно найти характеры неприводимых представлений, мы должны вычислить объем того куска группового многообразия $\mathfrak{g}_u$, на котором лежат преобразования t с углами в интервалах $(\varphi_i, \varphi_i + d\varphi_i)$. Так как углы φ_i характеризуют *класс* сопряженных элементов, к которому принадлежит элемент t в $\mathfrak{g}_u$, то этот объем показывает, с какой плотностью распределяются элементы по различным классам. Мы проведем сначала наши рассуждения для группы $\mathfrak{u}$ и всех унитарных преобразований, где эти рассуждения выглядят несколько проще.

О всех унитарных преобразованиях, получающихся из некоторого u умножением слева на произвольную унитарную диагональную матрицу (ε), мы будем говорить, что они образуют *прямую* $[u]$ на $\mathfrak{u}$. Бесконечно близкие к u точки на прямой $[u + du]$ имеют вид

$$(e + 2\pi i d\varphi)(u + du) = u + (2\pi i d\varphi \cdot u + du),$$

где e — единичная матрица, $id\varphi$ — инфинитезимальная диагональная матрица с чисто мнимыми элементами. Вектором, ведущим из точки u к точке $u + du$, является инфинитезимальный элемент $du \cdot u^{-1}$ групп $\mathfrak{u}$. Формула

$$du \cdot u^{-1} + 2\pi i d\varphi = \delta u$$

[13] Если отказаться от ограничения, что определитель равен 1, то $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ могут, не сливаясь, обежать полный круг. При этом (ε) опишет замкнутую кривую, которая наверняка не может быть стянута в точку.

задает все векторы, которые ведут от точки u к бесконечно близким точкам прямой $[u + du]$. В этой формуле можно единственным образом определить $d\varphi$ так, чтобы главная диагональ в δu состояла сплошь из нулей: о таком векторе δu я буду говорить, что он осуществляет *ортогональный* переход из точки u от прямой $[u]$ к прямой $[u + du]$. Совершая ортогональный переход из какого-либо другого места $(\varepsilon)\, u$ прямой $[u]$, вместо δu получим вектор

$$(\varepsilon)\, \delta u\, (\varepsilon)^{-1}. \tag{23}$$

Если условиться все точки группы $\mathfrak{u}$, лежащие на одной прямой, с помощью «проекции» отождествлять в одну точку, то из $\mathfrak{u}$ образуется некоторое многообразие $[\mathfrak{u}]$ [29], размерность которого меньше на n. Если, далее, определить величину объемного элемента, имеющего форму параллелепипеда с вершиной $[u]$, как определитель из образующих векторов δu, то из (23) будет следовать, что эта величина не зависит от того, в каком месте прямой $[u]$ строится объемный элемент.

В преобразовании от t к диагональной матрице (ε):

$$t = u^{-1}\, (\varepsilon)\, u \tag{24}$$

преобразование u фигурирует только как представитель прямой $[u]$. Переходя от t к соседней точке $t + dt$, я обозначаю соединяющий вектор $dt \cdot t^{-1}$ через δt; затем я полагаю $du \cdot u^{-1} = \delta' u$. Если φ_i — углы преобразования t, то в $d\, (\varepsilon) \cdot (\varepsilon)^{-1} = 2\pi \sqrt{-1} d\varphi$ диагональная матрица $d\varphi$ состоит из инфинитезимальных приращений $d\varphi_i$. Из (24) или из

$$ut = (\varepsilon)\, u$$

получаем, что

$$du \cdot t + u \cdot dt = d\, (\varepsilon) \cdot u + (\varepsilon) \cdot du;$$

умножая слева на $t^{-1}u^{-1} = u^{-1}\, (\varepsilon)^{-1}$, имеем

$$\delta' u + u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = 2\pi \sqrt{-1} d\varphi + (\varepsilon)\, \delta' u\, (\varepsilon)^{-1}.$$

Равенство

$$u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = \{(\varepsilon) \delta' u (\varepsilon)^{-1} - \delta' u\} + 2\pi \sqrt{-1}\, d\varphi$$

останется верным, если справа в фигурных скобках $\delta' u$ заменить вектором δu, который осуществляет *ортогональный* переход к соседней прямой $[u + du]$, т. е. в $\delta' u$ все элементы главной диагонали заменить нулями. Поэтому имеем

$$u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = \{(\varepsilon)\, \delta u\, (\varepsilon)^{-1} - \delta u\} + 2\pi \sqrt{-1} d\varphi. \tag{25}$$

Стоящая справа матрица имеет компоненты

$$\delta u_{ik}\, (\varepsilon_i / \varepsilon_k - 1) \quad (i \neq k), \qquad 2\pi \sqrt{-1} d\varphi_i \quad (i = k). \tag{26}$$

Теперь переход от матрицы δt к матрице $u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$ осуществляется с помощью *унимодулярной* линейной подстановки над n^2 компонентами матрицы δt, ибо как переход $\delta t \to u \cdot \delta t$, так и переход $\delta t \to \delta t \cdot u$ имеют определитель $(\det u)^n$. В силу этого определитель из n^2 векторов δt равен определителю из соответствующих векторов $u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$ с компонентами (26). Пусть $[u]$ описывает в $[\mathfrak{u}]$ объемный элемент величины $|du|$, а (ε) варьируется в интервалах $(\varphi_i, \varphi_i +$

$+ d\varphi_i$); тогда t описывает соответствующий объемный элемент с величиной $|dt|$, равной [14]

$$|du| \cdot \prod_{i \neq k} \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1 \right) \cdot d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n.$$

Рассматриваемое здесь произведение равно

$$\prod_{i<k} \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1 \right) \left(\frac{\bar{\varepsilon}_i}{\bar{\varepsilon}_k} - 1 \right) = \left| \prod_{i<k} (\varepsilon_i - \varepsilon_k) \right|^2.$$

Таким образом, для искомого объема получаем значение

$$d\Omega = \Delta \bar{\Delta} d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n, \quad \Delta = \prod_{i<k} (\varepsilon_i - \varepsilon_k), \quad \varepsilon_i = e(\varphi_i), \tag{27}$$

причем постоянный множитель, объем всего компактного многообразия $[\mathfrak{u}]$, опущен. Однозначная функция $F(t)$ на $\mathfrak{u}$, значение которой зависит от класса аргумента t, является периодической симметрической функцией от углов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. В силу нашего результата среднее значение такой функции класса вычисляется с помощью формулы

$$\frac{1}{\Omega} \int F(t)\, d\Omega, \qquad \Omega = \int d\Omega.$$

При ограничении группы $\mathfrak{u}$ с помощью условия «определитель равен 1» до $\mathfrak{g}_u$ в качестве незавимых переменных будем употреблять только $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$, полагая $\varphi_n = -(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1})$. Тогда аналогично предыдущему

$$d\Omega = \Delta \bar{\Delta} d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{n-1}. \tag{28}$$

Единственный пункт, на который опять следует обратить внимание, заключается в том, что и теперь переход от произвольной матрицы δt со следом 0 к матрице $u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$, которая также имеет след 0, осуществляется *унимодулярной* подстановкой. В качестве независимых компонент матрицы δt можно взять, например, кроме боковых δt_{ik} $(i \neq k)$, величины $\delta t_{22} - \delta t_{11}, \delta t_{33} - \delta t_{11}, \dots, \delta t_{nn} - \delta t_{11}$. Это очевидно, так как для совершенно произвольной матрицы в качестве компонент можно использовать приведенные выше числа и след $\delta t_{11} + \delta t_{22} + \dots + \delta t_{nn}$, который при рассматриваемой подстановке не меняется.

Точно так же, как для конечных групп, показывается, что характеры $\chi(t)$ неприводимых представлений в $\mathfrak{g}_u$ удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\int_{(\mathfrak{g}_u)} \chi(t) \chi'(t^{-1}) |dt| = 0,$$

если χ, χ' принадлежат двум неэквивалентным представлениям. Так как χ — функция классов, то аргумент t можно заменить на его углы поворота $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

[14] Таблица независимых *вещественных* компонент матрицы δt состоит из $\delta t_{ii}/2\pi \sqrt{-1}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ и вещественной и мнимой частей от δt_{ik} $(i < k,\ i, k = 1, 2, \dots, n)$. Компоненты последних двух видов целесообразно заменить на δt_{ik} и $\delta t_{ki} = -\delta t_{ik}$.

..., φ_n и в результате получить

$$\int \chi(\varphi)\, \chi'(-\varphi)\, d\Omega = 0, \tag{29}$$

а также равенство

$$\frac{1}{\Omega} \int \chi(\varphi)\, \chi(-\varphi)\, d\Omega = 1. \tag{29'}$$

Самым простым способом эти соотношения ортогональности были доказаны И. Шуром[15]; он также первый в случае вещественной группы вращений заметил, что их можно перенести в непрерывную область. Его доказательство основано на следующей алгебраической лемме [[30]].

Л е м м а. *Если T, T'—две квадратные (содержащие переменные) неприводимые матрицы из N, N' строк соответственно, то некоторая постоянная прямоугольная матрица A из N столбцов и N' строк может удовлетворять уравнению*

$$AT = T'A \tag{30}$$

лишь в случае, когда:

либо $N = N'$, $\det A \neq 0$, *так что T эквивалентна T'*;

либо $A = 0$.

Если T, T' обозначают соответственно общие матрицы двух неэквивалентных непроводимых представлений $\mathfrak{S}_u$, $\mathfrak{S}_u'$ группы $\mathfrak{g}_u$, то, следовательно, из (30) следует, что $A = 0$, а из

$$AT = TA$$

получаем, что A должна быть кратна единичной матрице [[31]]. Если X — произвольная матрица из N строк и N' столбцов, то для матрицы

$$A = \int_{(\mathfrak{g}_u)} T^{-1} X T' \, |dt|$$

выполняется соотношение (30). Поэтому в покомпонентной записи

$$\int T_{ij}(t^{-1})\, T'_{hk}(t) |\, dt\,| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i,\ j = 1, 2, \ldots, N \\ h,\ k = 1, 2, \ldots, N' \end{pmatrix}.$$

Положив $i = j$, $h = k$ и просуммировав по j от 1 до N, по k от 1 до N', получим соотношение (29); аналогично получается (29′) с помощью матрицы

$$A = \int T^{-1} X T \, |\, dt\,|.$$

Теперь следует показать, как на основе соотношений ортогональности можно полностью вычислить характеры.

$\chi(\varphi)$ является некоторым конечным симметрическим рядом Фурье от n угловых аргументов. Чтобы удовлетворить условиям ортогональности, положим $\Delta \cdot \chi = \xi$; тогда ξ будет конечным кососимметрическим рядом Фурье. Такой ряд является линейной комбинацией выражений следующего вида:

$$\Sigma \pm e\,(l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n). \tag{31}$$

---

[15] *Schur I.* Neue Begrundung der Theorie der Gruppencharactere.— S.-Ber. Berlin Akad., 1905, S. 406.

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ — расположенные по убыванию целые числа, причем последнее на основании вспомогательного соотношения

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = 0$$

выбирается равным 0:

$$l_1 > l_2 > \ldots > l_n = 0.$$

Сумму (31) следует альтернированно распространить на все $n!$ перестановок аргументов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Каждое такое выражение можно записать также в виде определителя:

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |e(l_1\varphi),\ e(l_2\varphi), \ldots, e(l_n\varphi)| = |\varepsilon^{l'}, \varepsilon^{l_2}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|.$$

Его строки образуются из написанных добавлением индексов $1, 2, \ldots, n$ к аргументам φ, ε соответственно. Согласно ранее установленному упорядочению — теперь в силу унитарного ограничения вместо λ_i появились чисто мнимые величины $2\pi\sqrt{-1}\varphi_i$ — выписанный в (31) член является максимальным во всей сумме; он определяет высоту ξ. Таким образом, при помощи деления мы вычисляем конечный симметрический ряд Фурье

$$\chi^* = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\Delta}. \tag{32}$$

Для любых двух различных таких χ^* выполняется тогда соотношение ортогональности (29). Действительно, среди $(n!)^2$ членов произведения

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) \cdot \bar{\xi}(l_1', l_2', \ldots, l_n')$$

нет ни одного, который равен 1, а потому каждый из них после интегрирования по $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ от 0 до 1 дает значение 0. Далее,

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi^*(\varphi)\chi^*(-\varphi)\,d\Omega = \frac{n!}{\Omega}. \tag{33}$$

Сам Δ является одним из ξ, а именно, самым низшим из всех возможных:

$$\Delta = \xi(r_1, r_2, \ldots, r_n); \qquad r_1 = n-1, r_2 = n-2, \ldots, r_n = 0. \tag{34}$$

Наивысший член в χ^* равен

$$e(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + n_n\varphi_n) = \varepsilon_1^{m_1}\varepsilon_2^{m_2}\ldots\varepsilon_n^{m_n}; \tag{35}$$

$$m_i = l_i - r_i,\ m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n = 0.$$

Так как для $l_i = r_i$ функция χ^* становится равной 1, то не зависящее от l значение интеграла (33) должно быть равно 1, так что $\Omega = n!$ и χ^* удовлетворяет отмеченному в (29) соотношению для χ. Но, как мы знаем, каждому заданному наивысшему весу

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n; \tag{36}$$

$$m_i \text{ — целые числа, } m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n = 0 \tag{36'}$$

соответствует неприводимое представление. Его характер χ_m должен аддитивно получаться из того же m_i, принадлежащего $\chi^* = \chi_m^*$, формул (32) и (35)

и из χ^* более низкой высоты. Но, принимая во внимание то обстоятельство, что χ^* удовлетворяют соотношениям ортогональности, в то время как им должны удовлетворять согласно И. Шуру характеры χ, получаем сразу же рассуждением по индукции, переходя от более низких χ к более высоким, что $\chi_m = \pm\chi_m^*$. Знак определяется тем, что все коэффициенты ряда Фурье χ_m, в частности также коэффициент старшего члена, должны быть положительными целыми числами (кратности входящих весов).

Таким образом, мы приходим, наконец, к следующему наглядному результату:

$$\chi_m = \frac{|e(l_1\varphi), e(l_2, \varphi), \ldots, e(l_n\varphi)|}{|e(r_1\varphi), e(r_2\varphi), \ldots, e(r_n\varphi)|} = \frac{|\varepsilon^{l_1}, \varepsilon^{l_2}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}, \varepsilon^{n-2}, \ldots, \varepsilon^0|} \tag{37}$$

является характером неприводимого представления старшего веса (36). Если возвратиться от $\mathfrak{g}_u$ к полной группе $\mathfrak{g}$, то ε_i будут означать не что иное, как мультипликаторы представляемого элемента t группы $\mathfrak{g}$; и второе из выражений в (37) непосредственно задает характер в виде функции этих мультипликаторов. Результат Картана о том, что заданному старшему весу соответствует лишь *одно* неприводимое представление, тем самым подтверждается другим способом; и одновременно из связи между нормированием с помощью равенства (29) и с помощью теоремы Картана получается, что коэффициент при высшем члене в χ равен 1. Соответствующее число переменных $N = N_m$ будет значением характера в единичном элементе группы $\mathfrak{g}$, т. е. для $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0$. Наиболее удобно провести вычисление, заметив, что

$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ с помощью подстановки $\varphi_i = r_i\varphi$

и

$\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ с помощью подстановки $\varphi_i = l_i\varphi$

переходят в одну и ту же функцию от одной переменной. Таким образом, в силу (34) для $\varphi_i = r_i\varphi$ получаем

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \prod_{i<k} (e(l_i\varphi) - e(l_k\varphi)),$$

и для бесконечно малых φ

$$\sim (2\pi\varphi\sqrt{-1})^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_{i<k} (l_i - l_k).$$

Поэтому [16]

$$N = N_m = \frac{D(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{D(n-1, \ldots, 1, 0)},$$

D обозначает произведение разностей.

---

[16] Из этой формулы можно получить различные высказывания о низших реализующихся размерностях. Я упомяну здесь лишь самое важное: представлениями с самым низким числом переменных, кроме единичного, являются $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_{n-1}$, т. е. сама группа $\mathfrak{g}$ и контрагредиентное представление к ней; для них $N = n$. Ср. по этому поводу: *Weinstein A.*— Math. Ztschr., 1923, Bd. 16, S. 78.

Наконец, можно еще $\chi_m = \chi$ как симметрическую функцию мультипликаторов t выразить в рациональном виде через коэффициенты его характеристического многочлена

$$f(\zeta) = |e - \zeta t| = \prod_i (1 = \varepsilon_i \zeta).$$

Явная формула получается из соотношения Коши для определителей

$$\left| \frac{1}{1 - x_i y_k} \right| = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n) D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\prod\limits_{i,k} (1 - x_i y_k)} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$

Полагая в нем x_i равными мультипликаторам для t и беря за y_k переменные ζ_k, получим

$$\prod_{i,k} (1 - \varepsilon_i \zeta_k) = f(\zeta_1) f(\zeta_2) \ldots f(\zeta_m).$$

Положив

$$\begin{gathered} \frac{1}{f(\zeta)} = p_0 + p_1\zeta + p_2\zeta^2 + \ldots \quad (p_0 = 1) \quad [32], \\ \frac{1}{1 - \varepsilon\zeta} = 1 + \varepsilon\zeta + \varepsilon^2\zeta^2 + \ldots \end{gathered} \tag{39}$$

и разложив левую и правую части соотношения Коши по степеням ζ, из сравнения коэффициентов при $\zeta_1^{l_1} \zeta_2^{l_2} \ldots \zeta_n^{l_n}$ получаем нужное утверждение:

Т е о р е м а 6. *Характер $\chi(t)$ неприводимого представления с высшим весом*

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n$$

вычисляется по формуле

$$\chi(t) = \frac{|\varepsilon^{l_1}, \varepsilon^{l_2}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}, \ldots, \varepsilon^1, \varepsilon^0|} = |p_{l-n+1}, \ldots, p_{l-1}, p_l|. \tag{40}$$

При этом m_i — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n \geqslant 0$$

(от нормировки $m_n = 0$ можно отказаться), *и положено*

$$l_1 = m_1 + (n - 1), \quad l_2 = m_2 + (n - 2), \ldots, \quad l_n = m_n.$$

Соответствующая размерность равняется

$$N = \frac{D(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{D(n - 1, \ldots, 1, 0)}. \tag{41}$$

Определитель из p в (40) состоит из n строк, которые из написанной получаются так, что вместо l последовательно подставляются $l_1, l_2, \ldots, l_n$; элементы p с отрицательными индексами следует считать равными 0. Эти формулы другим способом были получены уже И. Шуром в его диссертации [33].

§ 7. Связь с симметрической группой и ее характерами

К тензору f степени ν можно применить оператор

$$a = \sum_P \alpha_{P^{-1}} P,$$

который уже встречался в конструкции в конце § 4:

$$f^* = fa = \sum_P \alpha_{P^{-1}} fP. \tag{42}$$

P пробегает $\nu!$ перестановок группы $\Sigma_\nu = \Sigma$. Оператор a или система его компонент α_P называется принадлежащим Σ *групповым числом* [34]. Перемножение групповых чисел между собой означает применение операторов одного за другим:

$$fab = \sum_Q \sum_P \beta_{Q^{-1}} \alpha_{P^{-1}} fPQ.$$

Произведение

$$ab = c = \sum_P \gamma_{P^{-1}} P$$

вычисляется, таким образом, по формуле

$$\gamma_{R^{-1}} = \sum_{PQ=R} \alpha_{P^{-1}} \beta_{Q^{-1}}, \quad \text{или} \quad \gamma_R = \sum_{QP=R} \alpha_P \beta_Q.$$

Понимая также систему величин fP и f^*P как групповое число f и соответственно f^*, записываем равенство (42) в виде

$$f^* = f \cdot a.$$

Произвольное условие симметричности для тензора f в этой символике выражается так:

$$f \cdot a = 0,$$

где a — некоторое фиксированное групповое число. Как я доказал в цитированной выше заметке в журнале «Rendiconti», несколько условий симметричности всегда можно заменить на одно-единственное и самый общий тензор f^* какого-либо заданного класса симметричности получается из произвольного тензора f степени ν при помощи оператора рассматриваемого здесь вида:

$$f^* = f \cdot c, \tag{43}$$

который обладает следующим характерным свойством. Если его применить к принадлежащему уже классу симметричности тензору f^*, то снова получим f^*; а именно, имеем

$$c \cdot c = c, \tag{44}$$

или по терминологии Фробениуса c — *характеристическая единица.*

Каждой характеристической единице c принадлежит некоторое представление Δ_c конечной группы $\Sigma_\nu = \Sigma$. А именно, сопоставим групповому числу s линейное преобразование S

$$x = sx'c \tag{45}$$

в $\nu!$-мерном многообразии всех групповых чисел x [35]. Если за ним произвести принадлежащее s' преобразование S':

$$x' = s'x''c,$$

то получим в итоге в силу (44)

$$x = (ss')x''c.$$

Следовательно, преобразование SS' принадлежит произведению $s \cdot s'$. С другой стороны, c принадлежит также некоторый определенный класс симметричности (f_c) тензоров f^*, формула (43), а тем самым согласно § 1 представление $\mathfrak{S}_c$ непрерывной группы $\mathfrak{g}$, которое задает, как преобразуются между собой тензоры такого класса симметричности при действии элементов из $\mathfrak{g}$. Характеристическая единица c, класс тензоров (f_c) называется *примитивным*, если представление Δ_c группы Σ неприводимо. Это означает, что каждое дополнительно добавленное требование симметричности оставляет возможность произвольному тензору класса (f_c) принимать лишь значение 0. С другой стороны, c можно выразить через примитивные характеристические единицы: $c = c_1 + c_2 + \ldots$, из которых каждые две в произведении дают 0; тензоры класса (f_c) можно разложить на независимые составные части, каждая из которых свободно варьируется в некотором примитивном классе симметричности.

Класс тензоров примитивен в точности тогда, когда соответствующее представление группы $\mathfrak{g}$ неприводимо. Следовательно, построенный в конце § 4 с помощью формулы (20) класс тензоров примитивен. Будет ли встречавшийся там и определенный с помощью схемы (m) для чисел от 1 до ν оператор

$$e = \sum_P \varepsilon_{P^{-1}} P,$$

характеристической единицей? По существу, да. Правда, не выполняется равенство (44); но, как легко себе уяснить и как формально в высшей степени элегантно доказано Фробениусом [11, с. 355; там $\varepsilon_{P^{-1}}$ обозначено через $\zeta(P)$], выполняется равенство

$$e \cdot e = \rho e, \text{ или по компонентам: } \sum_Q \varepsilon_{PQ^{-1}} \varepsilon_Q = \rho \cdot \varepsilon_P.$$

В том, что

$$\rho = \sum_Q \varepsilon_{Q^{-1}} \varepsilon_Q$$

отлично от нуля и даже положительно, лучше всего убедиться следующим образом. Линейное отображение E

$$x = x'e$$

удовлетворяет уравнению $E \cdot E = \rho E$ и поэтому

$$\mathrm{Sp}\,(E) = \rho \cdot \text{ранг}\,(E) \quad [36].$$

Но след равен $\nu!\,\varepsilon_J = \nu!$, где J обозначает тождественную перестановку; следовательно,

$$\rho = \nu!/\text{ранг}\,(E).$$

Поэтому $(1/\rho)\,e$ — характеристическая и даже примитивная единица. Тем самым все схемы $\{m\}$ приводят к примитивным классам тензоров, если только предположить, что размерность $n \geqslant \nu$; в таком случае для произвольного тензора f ранга ν величины fP (их $\nu!$) линейно независимы. Возникающие из различных схем единицы $(1/\rho)\,e$ всегда приводят к *неэквивалентным* неприводимым представлениям Δ_e симметрической группы Σ. Действительно, если бы две таких единицы были эквивалентны, то соответствующие представления непрерывной группы $\mathfrak{g}$ также должны были бы быть эквивалентными. Но число различных схем совпадает с числом классов сопряженных элементов в Σ, которое задается различными возможностями разложения перестановок на циклы [37]. Следовательно, таким способом мы находим *полную систему неэквивалентных примитивных характеристических единиц* и тем самым *все* неприводимые представления группы Σ. Одновременно установлено, что *каждая* примитивная характеристическая единица e приводит к неприводимому представлению $\mathfrak{S}_e$ группы $\mathfrak{g}$, а каждый примитивный класс тензоров представляет простую величину. Изложение с помощью единиц восходит к Юнгу и Фробениусу (Фр. II). Здесь следует добавить лишь следующее. Принадлежащее характеристической единице c представление Δ_c группы Σ может, будучи полностью разложенным, содержать различные неэквивалентные неприводимые представления группы Σ степеней g, g', . . . — каждое из которых соответствует какой-либо схеме $\{m\}$ — с кратностями r, r', . . . соответственно. Две такие единицы следует рассматривать как эквивалентные, если для них совпадают числа r, r', . . . Ясно, что эквивалентным c принадлежат эквивалентные представления $\mathfrak{S}_c$ группы $\mathfrak{g}$; но теперь мы можем добавить, что эквивалентность единиц c также необходима для эквивалентности представлений $\mathfrak{S}_c$ — с одним ограничением: при $n < \nu$ следует исключить из рассмотрения числа r, r', . . ., соответствующие схемам, в которых имеются вертикальные штольни длиной $>n$; действительно, такие схемы согласно (20) приводят лишь к $f^* = 0$. Кроме того, две схемы с различными ν всякий раз приводят к эквивалентным представлениям группы $\mathfrak{g}$ (но не группы $\tilde{\mathfrak{g}}$ всех линейных преобразований), когда длины строк одной схемы m_1, m_2, . . ., m_n получаются из длин строк другой прибавлением одного и того же целого положительного числа.

Групповые характеры для Σ по Юнгу—Фробениусу в связи с изложенным получаются теперь сами собой. Доказательство того, что принадлежащее некоторой схеме $\{m\}$ и в конце § 4 построенное групповое число

$$e = \sum_P \varepsilon_{P^{-1}} P$$

или, скорее, $(1/\rho)\,e$ является *примитивной* характеристической единицей вместо нашего окольного пути с трансцендентными вспомогательными средствами, лучше провести непосредственно. След преобразования S (45), если положить

$$c = \sum_P \gamma_{P^{-1}} P, \qquad s = \sum_P \sigma_{P^{-1}} P,$$

равен

$$\sum_{P,\,R} \gamma_{R^{-1}P^{-1}R} \cdot \sigma_P.$$

Следовательно, характером представления Δ_c группы Σ будет

$$\chi^*(P)=\sum_R \gamma_{R^{-1}PR}.$$

Он является комбинацией примитивных характеров $\chi(P)$, χ' $P)$, . . .:

$$\chi^*(P)=r\chi(P)+r'\chi'(P)+\dots$$

На основании соотношений ортогональности для примитивных характеров группы Σ отсюда следует:

$$\frac{1}{\nu!}\sum_P \chi^*(P^{-1})\chi^*(P)=r^2+r'^2+\dots,$$

или

$$\sum_{P,R}\gamma_{R^{-1}PR}\gamma_{P^{-1}}=r^2+r'^2+\dots \tag{46}$$

Характер χ^* поэтому в том и только в том случае примитивен, когда сумма (46) равна 1. Все сводится к тому, чтобы установить, что

$$\sum_{P,R}\varepsilon_{R^{-1}PR}\varepsilon_{P^{-1}}=\rho^2=\Big(\sum_P \varepsilon_P\varepsilon_{P^{-1}}\Big)^2.$$

Это и делается в несколько строк у Фробениуса (II, с. 351 внизу и с. 352 сверху) [17].

Теорема 7. *Формулы*

$$\rho=\frac{\nu!}{g},\qquad \rho\chi(P)=\sum_R \varepsilon_{R^{-1}PR} \tag{48}$$

задают примитивные характеры $\chi(P)$ *симметрической группы* Σ_ν *и соответствующие степени* g. *Полагая для произвольного тензора* f *ранга* ν

$$\sum_P \chi(P^{-1})fP=f_\chi,$$

получим в силу соотношений

$$g\chi(P)+g'\chi'(P)+\dots=\begin{cases}\nu! & \text{для } P=J,\\ 0 & \text{для } P\neq J,\end{cases}$$

разложение в ряд Юнга

$$\nu!\cdot f=g\cdot f_\chi+g'\cdot f_{\chi'}+\dots$$

[1] Согласно Дж. Схоутену (упоминавшаяся книга, с. 255), этот результат позволяет утверждать, что степень g равна числу возможностей так распределить числа от 1 до ν по веру схемы $\{m\}$, чтобы в каждой строке и в каждом столбце они следовали друг за другом в соответствии с их величиной [38]. Это следует из полученной еще И. Шуром (S.-Ber. Berlin Akad., 1908, S. 606) возвратной формулы

$$g_{m_1,m_2,\dots}=g_{m_1-1,m_2,\dots}+g_{m_1,m_2-1,\dots}+\dots, \tag{47}$$

где следует положить $g=0$, если индексы идут не в предписанном порядке величин. Кроме того, Схоутен конструктивно проводит разложение числа $\sum_P \chi(P^{-1})P$ на g примитивных характеристических единиц.

Согласно изложенному выше получение неприводимых представлений группы Σ_ν теснейшим образом связано с проведением в § 2—4 с помощью инфинитезимального метода восстановлением неприводимых представлений группы $\mathfrak{g}$. Точно так же явные формулы для характеров и степеней первых тесным образом связаны с полученными в § 6 формулами для характеров и размерностей последних. Для различения мы используем малую букву χ при обозначении характера группы Σ_ν, но большую букву X для характеров группы $\mathfrak{g}$ (подругому, чем в § 6). Если c — некоторая характеристическая единица, то ей, с одной стороны, принадлежит представление Δ_c группы Σ_ν с характером $\chi(P)$; с другой стороны,— представление $\mathfrak{G}_c$ группы $\mathfrak{g}$ с характером $X(t)$:

$$X(t) = \Sigma r_{k_1k_2\ldots k_n} \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \ldots \varepsilon_n^{k_n}.$$

Во всех членах суммы

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = \nu.$$

Компонента тензора $f_{ikl\ldots}$ под воздействием диагонального преобразования

$$x_i = \varepsilon_i x_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

в пространстве $\mathfrak{x}$ умножается на множитель $\varepsilon_i\varepsilon_k\varepsilon_l \ldots$, а следовательно, на $\varepsilon_1^{k_1}\varepsilon_2^{k_2} \ldots \varepsilon_n^{k_n}$ в том и только в том случае, когда k_1 его индексов равны 1, k_2 индексов равны 2, ..., k_n индексов равны n. Кратность $r_{k_1k_2\ldots k_n}$ веса $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n$ поэтому равняется числу линейно независимых среди компонент для $f \cdot c$, если под f понимать групповое число с компонентами

$$f_{11\ldots 22\ldots n}P.$$

Перестановки P следует применять к индексам, среди которых первые k_1 равны 1, следующие k_2 равны 2, ..., последние k_n равны n. Если под $\Sigma_{k_1k_2\ldots k_n}$ понимать группу всех перестановок, которые представляют между собой первые k_1 чисел, затем следующие за ними k_2, ..., наконец, последние k_n, то это означает: $r_{k_1k_2\ldots k_n}$ равно числу независимых компонент для $y \cdot c$, если y пробегает все групповые числа, компоненты которых удовлетворяют условию $\eta_P = \eta_{PA}$, где A — произвольная перестановка из $\Sigma_{k_1k_2\ldots k_n}$. Мы должны воспользоваться теперь следующей леммой:

Лемма. *Пусть A — некоторая подгруппа в Σ_ν порядка h и y пробегает все групповые числа со свойством: $\eta_P = \eta_Q$, если $P^{-1}Q$ принадлежит A. Число линейно независимых компонент для $y \cdot c$ тогда равно*

$$\frac{1}{h} \cdot \sum_A \chi(P). \tag{49}$$

Сумма распространяется на все перестановки P в A.

Доказательство. Групповое число

$$a = \sum_P \alpha_{P^{-1}} P$$

имеет компоненты

$$\alpha_P = \begin{cases} 1/h, & \text{когда } P \text{ принадлежит } A, \\ 0, & \text{когда } P \text{ не принадлежит } A. \end{cases}$$

Тогда будем иметь

$$a \cdot a = a.$$

Самое общее групповое число y упомянутого в лемме типа получается из совершенно произвольного группового числа x' при помощи соотношения

$$y = a \cdot x'.$$

Следовательно, нужно определить ранг преобразования A:

$$x = a \cdot x' \cdot c.$$

Оно удовлетворяет уравнению $A \cdot A = A$. Поэтому ранг его равен следу. Но A — не что иное, как преобразование, соответствующее групповому числу a при представлении Δ_c, след которого поэтому равен

$$\Sigma \chi (P^{-1}) \alpha_P.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Поэтому

$$r_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \frac{1}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \sum_A \chi(P) \quad \text{для } A = \Sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}.$$

Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс сопряженных элементов в Σ_ν; а именно, тот, перестановки которого состоят из i_1 циклов порядка 1, i_2 циклов порядка 2, . . .,

$$1 i_1 + 2 i_2 + \ldots = \nu$$

и $c_{k_1 k_2 \ldots k_n}(\mathfrak{K})$ — число содержащихся в $\mathfrak{K}$ перестановок из $\Sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. Мы получаем формулу

$$X = \sum_{\mathfrak{K}} \left\{ \chi(\mathfrak{K}) \sum_{(k)} \frac{c_{k_1 k_2 \ldots k_n}(\mathfrak{K})}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \ldots \varepsilon^{k_n} \right\}.$$

Элементарное рассмотрение приводит к выражению для внутренней суммы:

$$\frac{1}{i_1!\, i_2! \ldots} \left(\frac{\sigma_1}{1}\right)^{i_1} \left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^{i_2} \ldots,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ обозначают последовательные суммы степеней переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Написав $\chi(i_1, i_2, \ldots)$ вместо $\chi(\mathfrak{K})$, получим, наконец [18]:

Т е о р е м а 8. *Характер χ, принадлежащего некоторой характеристической единице c представления Δ_c группы Σ_ν и характер X соответствующего представления $\mathfrak{S}_c$ группы $\mathfrak{g}$ связаны друг с другом следующим образом:*

$$X = \sum_{(1 i_1 + 2 i_2 + \ldots = \nu)} \frac{\chi(i_1, i_2, \ldots)}{i_1!\, i_2! \ldots} \left(\frac{\sigma_1}{1}\right)^{i_1} \left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^{i_2} \ldots \quad (50)$$

[18] Ср.: *Schur I.* Dissertation, S. 31, Formel (24).

Применяя эту формулу, в частности, к примитивному характеру (40), получаем примитивные характеры симметрической группы Σ_ν; мы должны лишь просто устроенную симметрическую функцию X аргументов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ выразить через суммы их степеней. Каждое неприводимое представление Δ_e группы Σ_ν, связанное с неприводимым представлением $\mathfrak{g}_e$ группы $\mathfrak{g}$ (соответственно $\tilde{\mathfrak{g}}$) порядка ν, соответствует некоторой схеме $\{m\}$, т. е. системе целых чисел $m_1, m_2, \ldots$, для которых

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \quad m_1 + m_2 + \ldots = \nu.$$

Соответствующие X_m следует положить равным 0, если имеются вертикальные штольни большей чем n длины, т. е. если m_{n+1} еще больше 0. Выписывая все соответствующие схемы $\{m\}$ уравнения (50) и умножая принадлежащее системе чисел $\{m\}$ на χ_m, получим

$$\sigma_1^{i_1}\sigma_2^{i_2}\ldots = \sum_{(m_1, m_2, \ldots)} \chi_m \cdot X_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \sum_{(m_1, \ldots, m_n)} \chi_m \frac{|\varepsilon^{l_1}, \varepsilon^{l_2}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|}{D(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)}. \quad (51)$$

Теорема 9. *Характеры $\chi_m = \chi_m(i_1, i_2, \ldots)$ группы Σ_ν являются коэффициентами разложения выражения*

$$\sigma_1^{i_1}\sigma_2^{i_2}\ldots D(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$$

по степеням переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Желая получить таким образом все примитивные характеры группы Σ_ν, следует выбрать размерность $n \geqslant \nu$.

Это основной результат в Фр. I (Фробениус вместо n, ν использует обозначения m, n). В нем удивляет то, каким образом кроме числа ν переставляемых чисел в него входит еще другое число n. Как я думаю, положение вещей разъясняется лишь рассмотрением связи с группой $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n)}$; то, что там является гениальным искусным приемом, здесь появляется совершенно естественно — хотя, конечно, рассуждение Фробениуса остается все же самым быстрым путем проверки его результата.

$\chi(\nu, 0, 0, \ldots, 0)$ есть степень g характера χ. Из (51), в частности, следует, что

$$\sigma_1^\nu = \sum_{(m)} g_m X_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n). \quad (52)$$

σ_1 — характер представления $\mathfrak{g}$ группы $\mathfrak{g}$, а следовательно, σ_1^ν — характер для произведения Гурвица $\mathfrak{g}^\nu$. В формуле (52) утверждается, что представление $\mathfrak{g}^\nu$, будучи полностью приведенным, содержит каждое неприводимое представление порядка ν и притом с кратностью, задаваемой соответствующей степенью g. Тем самым получено разложение для $\mathfrak{g}^\nu$; кроме того, равенство (52) — или же равенство (50) — дает возможность явно вычислить степени g неприводимых представлений группы Σ_ν[19].

Теорема 10. *$\mathfrak{g}^\nu$, будучи полностью приведенным, содержит каждое неприводимое представление порядка ν группы $\mathfrak{g}$ с кратностью, задаваемой сте-*

[19] Фр. I, с. 522. Далее, из (50) и представления (40) для X в виде некоторого p-определителя легко получается возвратная формула (47); так ее получает И. Шур в диссертации.

пенью g соответствующего неприводимого представления симметрической группы Σ_ν. Имеем

$$g = g_m = \frac{\nu!\, D(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{l_1!\, l_2! \ldots l_n!}. \qquad (53)$$

(Эту формулу для степени следует сопоставить с аналогичной формулой (41) для непрерывной группы $\mathfrak{g}$!)

§ 8. Группа всех линейных преобразований

Если получен уже полный обзор возможных представлений (вещественной или комплексной) группы $\mathfrak{g}$ всех линейных преобразований с определителем 1, то легко рассмотреть также случай группы $\tilde{\mathfrak{g}}$ всех линейных преобразований (с отличным от 0 и положительным определителем). Действительно, каждое представление $\tilde{\mathfrak{S}}$ группы $\tilde{\mathfrak{g}}$ содержит в себе некоторое представление $\mathfrak{g}$ группы $\mathfrak{g}$. Если оно неприводимо, то растяжениям в $\tilde{\mathfrak{g}}$ должны соответствовать преобразования A в $\tilde{\mathfrak{S}}$, которые перестановочны со всеми матрицами T. Согласно лемме Шура на с. 122, отсюда следует, что A будет кратной единичной матрице. В частности, инфинитезимальному растяжению

$$dx_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (54)$$

в $\mathfrak{r}$ соответствует некоторое инфинитезимальное растяжение

$$dy_k = \gamma \cdot y_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

в $\mathfrak{R}$. Тогда представляющей матрицей для t в $\tilde{\mathfrak{S}}$ будет не матрица T порядка ν, а

$$(\det t)^{\gamma - \nu/n} \cdot T.$$

Вместо понятия тензора появляется понятие *тензорной плотности*; однако в том обобщенном смысле, что при переходе к какой-либо новой системе координат в $\mathfrak{r}$ происходит умножение на *произвольную* степень определителя преобразования, показатель которой не обязательно равен 1 и в общем случае не обязательно целочисленный.

Если $\mathfrak{S}$ приводимо и распадается, будучи приведенным, например, в $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$ ($N = 2N_1 + N_2$, $\mathfrak{S}_2$ не эквивалентно $\mathfrak{S}_1$), так что общая матрица в $\mathfrak{S}$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & T_2 \end{Vmatrix},$$

то согласно упомянутой выше лемме матрица в $\tilde{\mathfrak{S}}$, соответствующая растяжению в $\tilde{\mathfrak{g}}$, в частности инфинитезимальному растяжению (54), должна иметь вид

$$\begin{Vmatrix} \gamma_{11}E_1 & \gamma_{12}E_1 & 0 \\ \gamma_{21}E_1 & \gamma_{22}E_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma E_2 \end{Vmatrix}.$$

Здесь γ — числа, а E_1 и E_2 — единичные матрицы порядков N_1 и N_2 соответственно. «В общем случае» [39] можно, пожалуй, побеспокоиться о том, чтобы матрица из двух строк

$$\begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{Vmatrix}$$

приняла нормальный вид

$$\begin{Vmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{Vmatrix}$$

и тогда $\mathfrak{G}$ также будет вполне приводимой. Однако могут встретиться известные из теории элементарных делителей исключительные случаи; *вследствие этого теорема о полной приводимости представлений не остается верной для* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *без исключений* [40].

Глава II

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ И ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

§ 1. Отдельный элемент симплектической группы. Унитарное ограничение

Под *симплектической группой* мы понимаем совокупность $\mathfrak{c}$ всех однородных линейных преобразований, которые не меняют невырожденную кососимметрическую билинейную форму от двух произвольных векторов. Такие формы существуют лишь в пространстве $\mathfrak{r}$ четной размерности $2n$; и если компоненты вектора x обозначаются через $x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n'$, то можно предполагать, что эта форма, «косое произведение» двух произвольных векторов x и y, имеет вид

$$S(x, y) = (x_1y_1' - x_1'y_1) + (x_2y_2' - x_2'y_2) + \ldots + (x_ny_n' - x_n'y_n). \tag{1}$$

Мультипликаторы преобразования t, принадлежащего $\mathfrak{c}$, будут попарно обратными друг другу. Действительно, если при действии t вектор $e_1 \neq 0$ переходит в $\varepsilon \cdot e_1$, то e_1 можно дополнить до *нормальной* системы координат, т. е. такой, в которой косое произведение имеет нормальный вид (1). Если t в этой системе координат записать в виде

$$\begin{aligned}
&e_1 \to \varepsilon e_1,\\
&e_1' \to *e_1 + \varepsilon' e_1' + \ldots,\\
&e_2 \to *e_1 + \alpha_2 e_1' + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&e_n' \to *e_1 + \alpha_n' e_1' + \ldots,
\end{aligned}$$

то требование о том, чтобы равенства

$$S(e_1, e_1') = 1,\ S(e_1, e_2) = 0, \ldots, S(e_1, e_n') = 0$$

при действии t оставались верными, приводит к соотношениям

$$\varepsilon\varepsilon' = 1,\ \alpha_2 = \ldots = \alpha_n' = 0.$$

Из-за обращения в нуль элементов α характеристический многочлен $f(\zeta) = |e - \zeta t|$ содержит множитель

$$(1 - \varepsilon\zeta)(1 - \varepsilon'\zeta) = (1 - \varepsilon\zeta)(1 - \varepsilon^{-1}\zeta).$$

Продолжение проведенного рассуждения приводит к следующей теореме:

Теорема 1. *Мультипликаторы принадлежащего симплектической группе преобразования t попарно обратны друг другу. В подходящей нормальной системе координат матрица для t принимает такой вид*:

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc}
* & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & * & * & * & \cdots & * \\
\hline
 & & & & * & & & \\
 & & & & * & * & & \\
 & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & * & \cdots & \cdots & *
\end{array}\right|$$

Переменные следуют в порядке

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1', x_2', \ldots, x_n' \tag{2}$$

и лишь на местах, отмеченных звездочкой, стоят отличные от 0 члены. На главной диагонали расположены мультипликаторы для t. *Если мультипликаторы все отличны друг от друга, то t будет даже сопряжена внутри $\mathfrak{c}$ с диагональной матрицей* (ε) *ее мультипликаторов.*

Для доказательства последнего утверждения требуется построить матрицу u из $\mathfrak{c}$, которая удовлетворяет уравнению

$$t = u^{-1}(\varepsilon)\, u. \tag{3}$$

Прежде всего, существует система координат, в которой оставляющее на месте форму S отображение t со всеми различными мультипликаторами выражается матрицей (ε). Если в этой системе координат S переходит в кососимметрическую форму S^*, то преобразование (ε), при котором каждая переменная умножается на множитель ε_i, не изменяет форму S^*. Но каждый коэффициент формы S^* при таком преобразовании умножается на произведение двух ε_i, откуда получаем, принимая во внимание сделанное предположение о мультипликаторах, что S^* должна иметь вид

$$s_1(x_1y_1' - x_1'y_1) + s_2(x_2y_2' - x_2'y_2) + \ldots + s_n(x_ny_n' - x_n'y_n), \tag{4}$$

где принадлежащие двум переменным x_i, x_i' мультипликаторы ε_i, ε_i' взаимно обратны друг другу. Форма невырожденная, так что все $s_i \neq 0$. Нормальный вид (ε) отображения t не нарушится, если каждый базисный вектор новой системы координат умножить на произвольную отличную от 0 константу; поэтому можно еще добиться того, что в (4) коэффициенты s_i станут равными 1. В таком случае $S^* = S$, новая система координат, как и старая, нормальна и преобразование u, задающее переход от одной к другой, принадлежит $\mathfrak{C}$.

Группу содержащихся в $\mathfrak{C}$ унитарных преобразований будем обозначать через $\mathfrak{C}_u$. Внутри $\mathfrak{C}_u$ равенство (3) выполняется без исключения.

Теорема 2. *Внутри унитарно ограниченной симплектической группы $\mathfrak{C}_u$ каждый элемент t сопряжен с диагональной матрицей его мультипликаторов.*

Мультипликаторы ε_i, $\varepsilon_i' = 1/\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i$ имеют абсолютное значение 1. Если предположить опять сначала, что все они отличны друг от друга, то, как известно, уравнению (3) можно удовлетворить унитарным преобразованием u. Так как матрица коэффициентов S формы S, умноженная на комплексно-сопряженную, дает в результате отрицательную единичную матрицу — e, то же самое, как нетрудно убедиться, выполняется для S^*; поэтому коэффициенты s_i в (4) имеют абсолютную величину 1. И если, например, новые базисные векторы e_1', e_2', . . ., e_n' умножить на подходящие константы с абсолютной величиной 1, то можно все s_i превратить в 1, не нарушая унитарный характер системы координат. Теорема переносится на *любое* преобразование t, так как для какого-нибудь элемента из $\mathfrak{C}_u$ всегда существует произвольно близкий к нему, все мультипликаторы которого различны, и так как многообразие $\mathfrak{C}_u$, в котором меняется u, замкнуто [41].

Особые случаи можно охватить также и на чисто алгебраическом пути, если воспользоваться следующей леммой:

Лемма. *Кососимметрическая форма S^* тогда и только тогда получается из S при помощи унитарного преобразования координат, когда ее матрица коэффициентов сама унитарна.*

Как и сама S, каждая получающаяся при помощи унитарного преобразования форма S^* должна удовлетворять уравнению $S^*\overline{S^*} = -e$. Обратив внимание на косую симметричность S^*, получаем отсюда, что матрица коэффициентов для S^* унитарна.

Наоборот, пусть S^* — кососимметрическая форма, матрица коэффициентов которой унитарна; нужно убедиться в том, что в какой-либо унитарной системе координат (которая получается из первоначальной при помощи унитарного преобразования) S^* принимает нормальный вид S. Первой строкой матрицы коэффициентов S^* пусть будет

$$s_1 = 0,\ s_2,\ s_2,\ \ldots.$$

Рассмотрим два вектора

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \qquad e_1' = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \ldots).$$

Они унитарно-ортогональны друг другу: сумма квадратов абсолютных величин компонент каждого из этих векторов равна 1, и сумма произведений

$$1 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + \ldots = 0.$$

Поэтому, векторы e_1, e_1' можно дополнить некоторыми векторами e_2, e_3, ... до унитарной системы координат. Так как

$$S^*(e_1, e_1') = s_1\bar{s}_1 + s_2\bar{s}_2 + s_3\bar{s}_3 + \ldots = 1,$$

то в этой системе координат S^* превращается в кососимметрическую форму S^{**}, унитарная матрица коэффициентов которой слева вверху имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как сумма квадратов абсолютных величин в обеих первых строках и столбцах матрицы S^{**} должна быть равна 1, то она необходимо распадается в матрицу указанного в (5) вида. Тем самым доказательство леммы завершается применением полной индукции.

$$\left|\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0\ldots 0 \\ -1 & 0 & 0\ldots 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \end{array}\right| \quad (5) \qquad \begin{array}{c|c} 1\ldots n & 1'\ldots n' \\ \end{array} \left|\begin{array}{c|c} 0\ldots 0 & \\ 0\ldots 0 & * \\ \hline & 0\ldots 0 \\ * & \ldots\ldots \\ & 0\ldots 0 \end{array}\right| \quad (6)$$

Добавление. *Если матрица S^* с самого начала имеет вид* (6), *то можно оставить в покое базисные векторы, обозначенные номерами* 1, 2, ..., n, *и унитарно преобразовать лишь оставшуюся половину с номерами* $1'$, $2'$, ..., n'.

Принадлежащую $\mathfrak{C}_u$ матрицу t можно при всех обстоятельствах при помощи унитарного преобразования u перевести в диагональную матрицу (ε) ее мультипликаторов. В определенной u новой системе координат косое произведение представляется формой S^*. Совокупность равных мультипликаторов будет либо типа

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \text{ [тогда также } \varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \varepsilon_3' \text{ и } \varepsilon_1 \neq \pm 1],$$

либо типа

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = \varepsilon_2 = \varepsilon_2' \ (= \pm 1).$$

В каждом из этих случаев из матрицы S^* выделяется, так как форма S^* инвариантна относительно преобразования (ε), квадрат из шести или четырех строк, принадлежащий координатам 1, 2, 3, $1'$, $2'$, $3'$ или 1, $1'$, 2, $2'$. Его можно на основании леммы и ее следствия при помощи унитарного преобразования векторов e_1', e_2', e_3' или соответственно e_1, e_1', e_2, e_2' привести к нормальному виду. Тем самым показано, что унитарное преобразование u в (3) всегда может быть так нормировано, что оно оставляет S инвариантной.

Диагональная матрица (ε) из $\mathfrak{c}$ состоит, если переменные расположены в порядке (2), из элементов

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n; \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n' \ (\varepsilon_i \varepsilon_i' = 1).$$

Внутри $\mathfrak{c}$ она сопряжена такой диагональной матрице, которая получается из нее перестановкой элементов ε_1 и ε_2 и связанной с этим перестановкой ε_1' и ε_2'; точно так же она остается в своем классе сопряженности, если переставляются ε_1 и ε_1'. То же самое имеет место внутри унитарно ограниченной симплектической группы $\mathfrak{c}_u$. В последнем случае мы полагаем также

$$\varepsilon_i = e(\varphi_i), \quad \varepsilon_i' = e(-\varphi_i)$$

и называем вещественные величины $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ углами поворота отображения t в случае, когда t из $\mathfrak{c}_u$ принадлежит тому же классу сопряженности, что и (ε). Класс не меняется, если углы поворота произвольно переставляются между собой или в одном из них меняется знак.

В равенстве (3) можно u заменить на (ε^*) u, не изменяя t; если речь идет о группе $\mathfrak{c}_u$, то (ε^*) обозначает произвольную диагональную матрицу из $\mathfrak{c}_u$. Как и прежде, мы будем говорить, что все элементы или «точки» в $\mathfrak{c}_u$, которые получаются из одного u таким способом, образуют *прямую* $[u]$ на $\mathfrak{c}_u$; и мы будем с помощью проекции, объединяя все точки из $\mathfrak{c}_u$ на одной и той же прямой в одну-единственную точку, порождать многообразие $[\mathfrak{c}_u]$ вещественной размерности на n меньше. В особом же случае, когда два мультипликатора становятся равными друг другу: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ или $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$, можно u в равенстве (3) без изменения t заменить даже на $s \cdot u$, где s устроена следующим образом:

1. В первом случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon'_2 s$ распадается на два квадрата (12), (12′) размера 2, принадлежащих переменным x_1, x_2 и x_1', x_2' соответственно, и на 2 (n — 2) квадрата размера 1, которые нанизываются вдоль главной диагонали. В (12) стоит некоторая произвольная унитарная матрица из двух строк, в (12′)— к ней контрагредиентная. Так как унитарная матрица от двух переменных зависит от четырех вещественных параметров, то число вещественных параметров для группы элементов s равняется $(n - 2) + 4 = n + 2$, в то время как подгруппа диагональных матриц (ε) в $\mathfrak{c}_u$ лишь n-параметрическая.

2. В случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = \pm 1$ s распадается на один принадлежащий переменным x_1, x_1' квадрат (11′) размера 2 и $2(n - 1)$ квадратов размера 1, которые нанизываются вдоль главной диагонали. В (11′) стоит произвольная унитарная матрица с определителем 1. Так как таковая зависит от трех параметров, то группа элементов s теперь также $(n + 2)$-параметрическая. Следовательно, мы приходим к фундаментальному для топологии многообразий $\mathfrak{c}_u$ результату:

Лемма. *Внутри группы $\mathfrak{c}_u$ сингулярные t, мультипликаторы которых не все отличны друг от друга, образуют многообразие на 3 единицы меньшей размерности, чем у $\mathfrak{c}_u$.*

Число параметров самой группы $\mathfrak{c}_u$, как мы скоро убедимся, равно $n(2n + 1)$.

§ 2. Представления симплектической группы: инфинитезимальная часть

Инфинитезимальное преобразование

$$\begin{aligned} dx_i &= \sum_k \rho_{ik} x_k + \sum_k \rho_{ik}' x_k' \\ dx_i' &= \sum_k \sigma_{ik} x_k + \sum_k \sigma_{ik} x_k' \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

принадлежит $\mathfrak{c}$ в том и только в том случае, когда $\rho_{ik} + \sigma_{ik} = 0$, ρ_{ik}' симметрическая и σ_{ik}' симметрическая. Таким образом, инфинитезимальная симплектическая группа $\mathfrak{c}^0$ является линейным множеством с

$$n^2 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(2n+1)$$

комплексными параметрами. Общая диагональная матрица $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ в $\mathfrak{c}^0$, элементы которой обозначим через

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; \quad -\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n,$$

пробегает n-параметрическую инфинитезимальную абелеву подгруппу в $\mathfrak{c}^0$. Если из h и элемента c, формула (7), образовать коммутатор $[hc] = hc - ch$, то получим инфинитезимальное преобразование с матрицей коэффициентов

$\rho_{ik}(\lambda_i - \lambda_k)$	$\rho_{ik}'(\lambda_i + \lambda_k)$
$-\sigma_{ik}'(\lambda_i + \lambda_k)$	$\sigma_{ik}(-\lambda_i + \lambda_k)$

В качестве корней поэтому появляются $\alpha = \pm\lambda_i \pm \lambda_k$ ($i < k$, все четыре комбинации знаков) и $\alpha = \pm 2\lambda_i$. Из таблицы без труда находим, какие принадлежащие этому корню α элементы e_α будут из $\mathfrak{c}^0$; и аналогично композиционным формулам из § 2 главы I получаем:

$$[hh'] = 0, \quad [he_\alpha] = \alpha \cdot e_\alpha, \qquad [e_\alpha e_{-\alpha}] = h_\alpha.$$

При этом h_α в случае $\alpha = \pm\lambda_i \pm \lambda_k$ ($i < k$) равно тому h, для которого $\lambda_i = \pm 1$, $\lambda_k = \pm 1$, все остальные $\lambda = 0$; в случае же $\alpha = \pm 2\lambda_i$ значения параметров для h_α такие: $\lambda_i = \pm 1$, прочие $\lambda = 0$. Значение какой-либо линейной формы

$$\Lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n \tag{8}$$

для этих значений параметров будет, как в главе I, § 2, обозначаться через Λ_α; нормировка уже выбрана так, что $\alpha_\alpha = 2$. Имеем

$$\begin{aligned} &\text{для } \alpha = \pm\lambda_i \pm \lambda_k: && \Lambda_\alpha = \pm m_i \pm m_k, \\ &\text{для } \quad = \pm 2\lambda_i: && \Lambda_\alpha = \pm m_i. \end{aligned}$$

Как и в упомянутом месте, верно утверждение, что для какого-либо представления $\mathfrak{C}^0$ группы $\mathfrak{c}^0$, кроме Λ, весом всегда будет также $\Lambda' = \Lambda - \Lambda_\alpha \cdot \alpha$

и что Λ_α — всегда целое число. Поэтому должны быть целыми коэффициенты m_i веса Λ. Для корня $\alpha = 2\lambda_i$ переход от Λ к Λ' состоит в том, что переменная λ_i заменяется на $-\lambda_i$, а для корня $\alpha = \lambda_i - \lambda_k$ $(i < k)$ в перестановке λ_i с λ_k. То, что при этих двух операциях из некоторого имеющегося веса всегда опять получается вес, следует из уже упоминавшегося в предыдущем параграфе результата, что класс какой-либо принадлежащей $\mathfrak{c}$ диагональной матрицы (ε) не меняется, если переставляются ε_i с ε_k или ε_i с ε_i'. Для старшего имеющегося веса отсюда получаются неравенства

$$m_i \geqslant 0 \quad \text{и} \quad m_i \geqslant m_k \text{ для } i < k.$$

Учитывая результат из главы I, § 3, можем подвести итог:

Теорема 3. *Все входящие в некоторое представление* $\mathfrak{C}^0$ *группы* $\mathfrak{c}^0$ *веса* (8) *имеют целочисленные коэффициенты* m_i. *При перестановке* λ_i *с* λ_k *или превращении* λ_i *в* $-\lambda_i$ *из некоторого веса всегда опять получается вес. Коэффициенты старшего веса удовлетворяют неравенствам*

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n \geqslant 0. \tag{9}$$

Старшим весом неприводимое представление определяется однозначно.

Сама группа $\mathfrak{c}$ со старшим весом $\mu_1 = \lambda_1$ неприводима, так как имеющиеся веса $\pm\lambda_i$ все между собой различны и из каждых базисных векторов e_i, e_i' нашей системы координат в пространстве $\mathfrak{r}$ все другие могут быть получены при помощи преобразований группы $\mathfrak{c}$ [42]. Среди весов $\pm\lambda_i \pm\lambda_k$ двумерных базисных векторов, которые получаются из любых двух различных e_i, e_i' при помощи внешнего умножения, вес $\mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ будет старшим; но теперь не все имеющиеся веса различны, так как

$$e_1 \times e_1', \quad e_2 \times e_2', \quad \ldots, \quad e_n \times e_n'$$

имеет вес 0. Все же из сказанного следует, что можно выделить некоторое неприводимое представление со старшим весом $\lambda_1 + \lambda_2$. Точно так же доказывается при помощи 3-, . . ., n-мерных векторов в $\mathfrak{r}$ существование некоторых неприводимых представлений со старшими весами

$$\mu_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \ \ldots, \quad \mu_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n;$$

эти представления нетрудно также полностью характеризовать (ср. с. 108). При помощи композиции [43] отсюда получаем некоторое неприводимое представление со старшим весом

$$p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots + p_n\mu_n,$$

где p_i обозначают какие-либо неотрицательные целые числа. Тем самым доказано утверждение: *для каждой линейной формы* Λ *с целочисленными коэффициентами* m_i, *которые удовлетворяют неравенствам* (9), *существует некоторое неприводимое представление группы* $\mathfrak{c}^0$, *старший вес которого равен* Λ.

Согласно описанному в главе I, § 4, методу построения Э. Картана, они должны получаться при помощи минимального линейного многообразия $\mathfrak{R}$, которое содержит «гипервектор»

$$e_1^{p_1}(e_1 \times e_2)^{p_2}(e_1 \times e_2 \times e_3)^{p_3}\ldots$$

и все получающиеся из него при помощи преобразований t группы $\mathfrak{c}$. Конечно, этот метод будет оправдан лишь доказываемым в следующем параграфе на интегральном пути результатом о том, что каждое представление группы $\mathfrak{c}$ распадается на неприводимые представления.

Если t преобразует векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (о $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ нам не нужно беспокоиться) согласно таблице

$$\begin{gathered} e_1 \to \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n + \xi_1' e_1' + \ldots + \xi_n' e_n', \\ e_2 \to \eta_1 e_1 + \ldots + \eta_n e_n + \eta_1' e_1' + \ldots + \eta_n' e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

то условия инвариантности $S(e_i, e_k) = 0$ приводят к соотношениям следующего типа ($i = 1$, $k = 2$):

$$S(\xi, \eta) = (\xi_1\eta_1' - \xi_1'\eta_1) + (\xi_2\eta_2' - \xi_2'\eta_2) + \ldots + (\xi_n\eta_n' - \xi_n'\eta_n) = 0.$$

Других ограничений на коэффициенты нужной нам половины t не накладывается. Состоящая из n чисел схема $\{m\}$, глава I, § 4, имеет длины строк

$$m_i = p_i + p_{i+1} + \ldots + p_n.$$

Пусть опять положено $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \nu$. Если $\{m\}$, например, имеет указанный внизу вид ($\nu = 7$), то следует образовать минимальное линейное многообразие (f) тензоров ранга 7, которое содержит тензоры с компонентами

□	□	□	$\xi_{i_1}\cdot\xi_{i_2}\cdot\xi_{i_3}$
□	□		$\eta_{k_1}\cdot\eta_{k_2}$
□	□		$\zeta_{l_1}\cdot\zeta_{l_2}$

при этом ξ, η, ζ — какие-либо числа, удовлетворяющие условиям

$$S(\eta, \zeta) = 0, \qquad S(\zeta, \xi) = 0, \qquad S(\xi, \eta) = 0.$$

К произвольному вектору f из (f) следует применить тогда альтернацию относительно каждого столбца схемы: многообразие получаемых таким образом тензоров f^* ранга ν является областью $\mathfrak{R}$ искомого неприводимого представления группы $\mathfrak{c}$ со старшим весом $3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3$. Этот результат нуждается в более точном алгебраическом обосновании, а именно, следует задать правило, по которому из совершенно произвольного тензора ранга ν получается общий тензор многообразия (f) [1]; это увело бы нас, однако, слишком далеко в сторону.

Инфинитезимальный элемент (7) из $\mathfrak{c}$ принадлежит унитарно ограниченной группе $\mathfrak{c}_u$, если

$$\rho_{ik} + \overline{\rho_{ki}} = 0 \text{ и вместе с тем также } \sigma_{ik} + \overline{\sigma_{ki}} = 0, \quad \sigma_{ik}' + \overline{\sigma_{ki}'} = 0. \tag{10}$$

---

[1] Ср. по этому поводу: *Schouten J. A.* Der Ricci-Kalkul. B., S. 262.

В частности, $\rho_{ii} = \lambda_i$ становится чисто мнимым. Число вещественных параметров поэтому для $\mathfrak{c}_u = n(2n+1)$. Линейная форма произвольного элемента (7) из $\mathfrak{c}$ может быть одним и только одним способом представлена в виде

$$\sum_{ik} (a_{ik}\rho_{ik} + b_{ik}\sigma_{ik} + a_{ik}'\rho_{ik}' + b_{ik}'\sigma_{ik}'),$$

где коэффициенты удовлетворяют соотношениям, аналогичным соотношениям для переменных:

$$a_{ik} + b_{ik} = 0, \; a_{ik}' \text{ симметрические}, \quad b_{ik}' \text{ симметрические}.$$

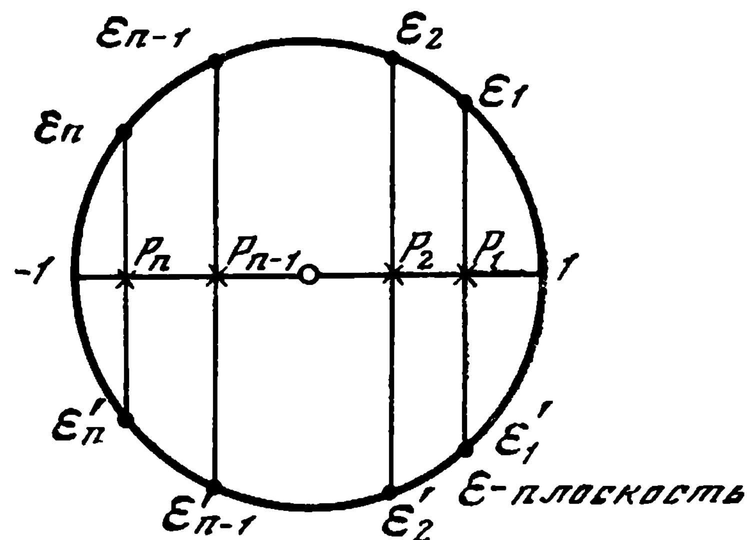
Если какая-нибудь такая форма обращается в нуль тождественно в случае, когда параметры удовлетворяют ограничениям (10), то она обращается в нуль тождественно всюду. Действительно, положив сначала $\rho_{ik}' = \sigma_{ik}' = 0$, получим $a_{ik} = 0$, $b_{ik} = 0$, так как $\Sigma a_{ik}\rho_{ik}$ тождественно равна нулю, если она такова при ограничениях (10). Остающееся условие превращается в

$$\sum_{i,k} a_{ik}'\rho_{ik}' + \sum_{i,k} b_{ik}'\bar{\rho}_{ik}' = 0$$

Чтобы сделат заключение об обращении в нуль обеих частей последней суммы отдельно, следует лишь заменить в ней произвольные симметрические величины ρ_{ik}' на $\sqrt{-1}\cdot\rho_{ik}'$.

§ 3. Представления симплектической группы: интегральная часть

Если верна теорема о полной приводимости представлений унитарно ограниченной инфинитезимальной группы $\mathfrak{c}_u^0$, то она верна также, согласно последнему рассуждению предыдущего параграфа, для полной группы $\mathfrak{c}^0$. Для группы же $\mathfrak{c}_u$ она была доказана при помощи интегрального метода Гурвица—Шура. Необходимо лишь прежде всего убедиться в том, *что* $\mathfrak{c}_u$ *односвязна* [44].



Мультипликаторные точки

Замкнутая кривая $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{c}_u$ не проходит ни через один из сингулярных элементов, которые, согласно последней лемме из § 1, образуют многообразие на три единицы меньшей размерности. Для несингулярного элемента t отметим на единичной окружности мультипликаторные точки ε_i, ε_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и соединим сопряженную пару ε_i, ε_i' вертикальным отрезком, который пересекает вещественную ось ε-плоскости в точке $P_i = \cos 2\pi\varphi_i$. Точки P_i располагаются в порядке, соответствующем их нумерации. Кроме того, ε_i, ε_i' никогда не попадают в точки ± 1. Следовательно, вертикальные отрезки и также соответствующие им точки ε_i, ε_i' на единичной окружности совершают лишь колебательные движения, а углы φ_i при пробегании по кривой $\mathfrak{K}$, непрерывно

изменяясь, возвращаются к своим первоначальным значениям. Отсюда следует, что $\mathfrak{K}$ можно непрерывно стянуть в единичную точку. Из односвязности $\mathfrak{c}_u$ снова получаем, что веса (8) должны иметь целочисленные коэффициенты m_i.

Далее нам следует согласно способу действий в § 8 главы I подсчитать объем $d\Omega$ той части $\mathfrak{c}_u$, на которой лежит элемент t, если его углы поворота меняются в пределах $\varphi_i \ldots \varphi_i + d\varphi_i$. Как и там, из (3) получаем равенство

$$u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = \{\varepsilon \cdot \delta u \cdot (\varepsilon)^{-1} - \delta u\} + 2\pi \sqrt{-1}\, d\varphi. \tag{11}$$

$d\varphi$ есть диагональная матрица, составленная из членов $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_n$; $-d\varphi_1, -d\varphi_2, \ldots, -d\varphi_n$. Для произвольного элемента δt из $\mathfrak{c}_u$, формула (7), в качестве независимых компонент можно взять следующие [2]:

все ρ_{ik} и те ρ_{ik}' и σ_{ik}', для которых $i \leqslant k$.

Нужно убедиться в том, что переход от δt к $\delta^* t = u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$ сводится к некоторой унимодулярной подстановке этих компонент. Для доказательства этого я приведу здесь более удобный способ, чем в главе I. u может быть представлен в виде

$$u = v^{-1}(\varepsilon^*)\, v,$$

где v и (ε^*) опять принадлежат $\mathfrak{c}_u$, причем (ε^*) — диагональная матрица. Имеем

$$(v \cdot \delta^* t \cdot v^{-1}) = (\varepsilon^*)(v \cdot \delta t \cdot v^{-1})(\varepsilon^*)^{-1}.$$

Далее, $\delta t \to \delta^* t$ будет унимодулярной подстановкой, если переход

$$v \cdot \delta t \cdot v^{-1} \to v \cdot \delta^* t \cdot v^{-1}$$

унимодулярен. Все сводится, следовательно, к тому, чтобы показать, что для *диагональной матрицы* (ε) из $\mathfrak{c}_u$ переход

$$\delta t \to (\varepsilon) \cdot \delta t \cdot (\varepsilon)^{-1} \tag{12}$$

является унимодулярной подстановкой. Убедиться в этом необходимо уже для того, чтобы в многообразии $[\mathfrak{c}_u]$ вообще было осуществимо независимое измерение объема. Так как $\varepsilon_i' = 1/\varepsilon_i$, то компоненты для δt при переходе (12) изменяются следующим образом:

$$\rho_{ik} \to \rho_{ik} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k}, \quad \rho_{ik}' \to \rho_{ik}' \cdot \varepsilon_i \varepsilon_k \quad (i \leqslant k),$$

$$\sigma_{ik}' \to \sigma_{ik}' \cdot \frac{1}{\varepsilon_i \varepsilon_k} \quad (i \leqslant k).$$

Произведение добавляемых множителей равно 1, а тем самым утверждение доказано. То же самое вычисление нужно провести для правой части равенства (11) с δu вместо δt: объем $d\Omega$, если опустить не зависящий от углов поворота

[2] Вместо вещественных и мнимых частей для ρ_{12} при этом использованы, например, ρ_{12} и $-\rho_{12} = \rho_{21}$.

множитель, становится равным

$$\prod_{i\neq k}\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k}-1\right)\cdot\prod_{i\leqslant k}(\varepsilon_i\varepsilon_k-1)\left(\frac{1}{\varepsilon_i\varepsilon_k}-1\right)\cdot d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_n. \tag{13}$$

Мы будем пользоваться сокращениями

$$e^{2\pi i\varphi}=e(\varphi);\quad 2\cos 2\pi\varphi=e(\varphi)+e(-\varphi)=c(\varphi),$$
$$2i\sin 2\pi\varphi=e(\varphi)-e(-\varphi)=s(\varphi).$$

Произведение в (13) оказывается равным квадрату абсолютной величины от

$$\prod_i(\varepsilon_i^2-1)\cdot\prod_{i<k}(\varepsilon_i\varepsilon_k-1)\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k}-1\right).$$

Здесь

$$\varepsilon_i^2-1$$

можно при помощи соотношений

$$\varepsilon_i-1/\varepsilon_i=s(\varphi_i),$$
$$(\varepsilon_i\varepsilon_k-1)(\varepsilon_i/\varepsilon_k-1)=\varepsilon_i^2+1-\varepsilon_i(\varepsilon_k+1/\varepsilon_k)$$

заменить на

$$(\varepsilon_i+1/\varepsilon_i)-(\varepsilon_k+1/\varepsilon_k)=c(\varphi_i)-c(\varphi_k).$$

Таким образом, в

$$d\Omega=\Delta\bar{\Delta}d\varphi_1 d\varphi_2\ldots d\varphi_n \tag{14}$$

можно считать

$$\Delta=\prod_i s(\varphi_i)\cdot\prod_{i<k}(c(\varphi_i)-c(\varphi_k)). \tag{15}$$

Второе произведение можно записать в виде определителя

$$|c^{n-1}(\varphi),\ \ldots,\ c^2(\varphi),\ c(\varphi),\ 1|=|\ldots,\ c(2\varphi),\ c(\varphi),\ 1|,$$

а потому также

$$\Delta=|s(n\varphi),\ \ldots,\ s(2\varphi),\ s(\varphi)|.$$

Характер $\chi(t)$ любого неприводимого представления группы C_u зависит лишь от углов поворота $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ элемента t и притом он будет конечным рядом Фурье от них, который не меняется при $2^n\cdot n!$ линейных подстановках конечной группы (S), порождаемой транспозициями вида

$$\varphi_1\to\varphi_2,\ \varphi_2\to\varphi_1,\ \varphi_i\to\varphi_i\qquad(i\neq 1,\ 2)$$

и сменами знака типа

$$\varphi_1\to-\varphi_1,\ \varphi_i\to\varphi_i\qquad(i\neq 1).$$

Примитивные характеры удовлетворяют соотношениям ортогональности с элементом интегрирования (14). Функция $\Delta\cdot\chi=\xi$ является конечным рядом Фурье, ведущим себя альтернированно относительно подстановок группы (S).

Такой ряд будет суммой элементарных рядов следующего вида:

$$\sum_{(S)} \pm e(l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \dots + l_n\varphi_n).$$

l_i — целые числа, для которых

$$l_1 > l_2 > \dots > l_n > 0,$$

и написанная сумма понимается так, что в указанном члене φ подвергаются всем перестановкам группы (S) и получаемые таким образом выражения альтернированно суммируются. В записи через определитель этот элементарный ряд равен

$$\xi(l_1, l_2, \dots, l_n) = |\, s(l_1\varphi), s(l_2\varphi), \dots, s(l_n\varphi)\,|. \tag{16}$$

Δ есть не что иное, как низший $\xi(l)$, который получается, если за l_i выбрать числа

$$r_1 = n,\ r_2 = n-1, \dots, r_n = 1.$$

$$\chi^* = \frac{\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\Delta} = \frac{\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\xi(r_1, r_2 \dots, r_n)} \tag{17}$$

является конечным рядом Фурье с нужными свойствами симметрии. Старшим членом в нем будет

$$e(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \dots + m_n\varphi_n),$$

где

$$m_i = l_i - r_i,$$

так что

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \dots \geqslant m_n \geqslant 0.$$

Различные χ^* ортогональны друг другу относительно элемента интегрирования (14). Далее, имеем

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi^*(\varphi)\,\chi^*(-\varphi)\,d\Omega = \frac{2^n \cdot n!}{\Omega} \tag{18}$$

(интегрирование производится по всем переменным φ_i от 0 до 1). Но так как правая часть не зависит от l и χ^* при $l_i = r_i$ превращается в 1, то должно быть

$$\Omega = \int d\Omega = 2^n \cdot n!$$

и левая часть в (18) вообще равна 1. Обращая теперь внимание на то, что каждому старшему весу, коэффициенты которого удовлетворяют неравенствам (9), фактически соответствует некоторое неприводимое представление, получаем, как в § 6 главы I, что χ^* — принадлежащий ему характер. Тот же самый способ, что и там, позволяет вычислить размерность, т. е. значение характера при $t = e$, или $\varphi_i = 0$.

Возвращаясь ко всей группе $\mathfrak{c}$, получим, что в определителе

$$\xi(l_1, l_2, \dots, l_n) = |\, \varepsilon^{l_1} - \bar\varepsilon^{l_1}, \varepsilon^{l_2} - \bar\varepsilon^{l_2}, \dots, \varepsilon^{l_n} - \bar\varepsilon^{l_n}\,|$$

следует полагать ε равным ряду от мультипликаторов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ элемента t, в то время как одновременно $\varepsilon' = 1/\varepsilon$ пробегает остальные мультипликаторы $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'$. А именно, $\chi((\varepsilon))$ является комбинацией произведений степеней

$$\varepsilon_1^{k_1}\varepsilon_2^{k_2}\ldots\varepsilon^{k_n}$$

с целочисленными, хотя и не всегда положительными показателями k_i. Этот многочлен определяется однозначно рядом Фурье, в который он переходит при подстановке $\varepsilon_i = e(\varphi_i)$. Следовательно, доказываемая формула для характеров, несомненно, верна для всех несингулярных элементов t группы $\mathfrak{c}$. Но из указанной в теореме 1 схемы для нормальной формы всех без исключения преобразований t легко следует, что любой элемент t из группы $\mathfrak{c}$ может быть сколь угодно близко аппроксимирован несингулярными элементами; тем самым эта формула переносится также на сингулярные элементы.

Наконец, можно вместо мультипликаторов ввести в рассмотрение коэффициенты характеристического многочлена $f(\zeta)$. Мы полагаем всегда

$$f(\zeta) = |e - \zeta t|, \qquad 1/f(\zeta) = p_0 + p_1\zeta + p_2\zeta^2 + \ldots. \tag{19}$$

Воспользуемся формулой Коши

$$\left|\frac{1}{x_i - y_k}\right| = \frac{D(x_n, \ldots, x_1)\,D(y_1, \ldots, y_n)}{\prod\limits_{i,k}(x_i - y_k)},$$

в которой положим, если считать ζ_i переменными,

$$x_i = \zeta_i + 1/\zeta_i, \qquad y_i = \varepsilon_i + 1/\varepsilon_i.$$

Имеем теперь

$$\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\zeta}(1 - \varepsilon\zeta)\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\zeta\right),$$

и

$$\frac{\varepsilon^l - \varepsilon^{-l}}{\varepsilon^1 - \varepsilon^{-1}} = \varepsilon^{l-1} + \varepsilon^{l-3} + \ldots + \varepsilon^{-(l-3)} + \varepsilon^{-(l-1)}$$

является коэффициентом при ζ^{l-1} в разложении по степеням функции

$$\frac{1}{(1 - \varepsilon\zeta)(1 - \varepsilon^{-1}\zeta)}.$$

Далее, имеем

$$f(\zeta) = \prod_i (1 - \varepsilon_i\zeta)(1 - \varepsilon_i^{-1}\zeta).$$

В определителе

$$\left|1, \zeta + \frac{1}{\zeta}, \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2, \ldots\right|$$

можно степени $(\zeta + 1/\zeta)^i$ заменить на $\zeta^i + \zeta^{-i}$. В результате получаем

$$\left|\frac{1}{(1 - \varepsilon_k\zeta_i)(1 - \varepsilon^{-1}\zeta_i)}\right| = \frac{|\zeta^{n-1}, \zeta^{n-2} + \zeta^n, \ldots, 1 + \zeta^{2n}| \cdot |\ldots, \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}, \varepsilon + \varepsilon^{-1}, 1|}{f(\zeta_1)f(\zeta_2)\ldots f(\zeta_n)}.$$

Сравнивая с обеих сторон коэффициенты при

$$\zeta_1^{l_1-1}\zeta_2^{l_2-1}\ldots\zeta_n^{l_n-1}\quad(l_1>l_2>\ldots>l_n>0),$$

получаем

$$\frac{|\varepsilon^{l_1}-\varepsilon^{-l_1},\ldots,\varepsilon^{l_n}-\varepsilon^{-l_n}|}{|\ldots,\varepsilon^2+\varepsilon^{-2},\varepsilon+\varepsilon^{-1},1|}\cdot\frac{1}{\prod\limits_i(\varepsilon_i-\varepsilon_i^{-1})}=$$
$$=|p_{l-n},p_{l-n+1}+p_{l-n-1},p_{l-n+2}+p_{l-n-2},\ldots|.\quad(20)$$

Тем самым характер выражен целым рациональным образом через компоненты матрицы t.

Теорема 4. *Каждое представление группы* $\mathfrak{c}$ *распадается на неприводимые. Характер неприводимого представления старшего веса* (8), (9) *вычисляется, если положить* $l_i=m_i+n+1-i$, *следующим образом:*

$$\chi(t)=\frac{|\varepsilon^{l_1}-\varepsilon^{-l_1},\ldots,\varepsilon^{l_n}-\varepsilon^{-l_n}|}{|\varepsilon^n-\varepsilon^{-n},\ldots,\varepsilon-\varepsilon^{-1}|}=|p_{l-n},p_{l-n+1}+p_{l-n-1},p_{l-n+2}+p_{l-n-2},\ldots|;$$

соответствующая размерность равна

$$N=\frac{P(l_1,l_2,\ldots,l_n)}{P(n,n-1,\ldots,1)}$$

с

$$P(l_1,l_2,\ldots,l_n)=\prod_i l_i\cdot\prod_{i<k}(l_i-l_k)(l_i+l_k).\quad(21)$$

Например, для старшего веса $\lambda_1+\lambda_2$ оказывается:

$$N=\frac{(2n+1)(2n-2)}{2},$$

т. е. на 1 меньше, чем

$$\frac{2n(2n-1)}{2}.$$

Областью этого представления будет не совокупность всех кососимметрических тензоров f_{ik} ранга 2, но лишь те, которые удовлетворяют инвариантному относительно $\mathfrak{c}$ соотношению

$$f_{11'}+f_{22'}+\ldots+f_{nn'}=0.$$

Аналогично имеем для представления старшего веса $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_n$:

$$N=\frac{2n(2n+1)(2n-4)}{1\cdot2\cdot3},$$

т. е. на $2n$ меньше, чем

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot2\cdot3},$$

что соответствует инвариантной системе $2n$ соотношений

$$f_{i11'}+f_{i22'}+\ldots+f_{inn'}=0,$$

которые должны быть наложены на произвольный кососимметрический тензор f_{ikl} ранга 3.

§ 4. Представления группы вращений: инфинитезимальная часть

Под *группой вращений* я понимаю здесь совокупность $\mathfrak{d}$ всех однородных линейных преобразований с определителем 1 (но не -1), которые оставляют инвариантной заданную невырожденную квадратичную форму Q. И притом можно рассматривать как все *комплексные* преобразования такого рода, так и *вещественные* преобразования, которые переводят в себя вещественную квадратичную форму Q. В вещественном случае квадратичные формы различаются по индексу инерции; наши результаты относятся не только к определенным формам [3]. Необходимо будет различать случаи четной и нечетной размерностей $2n$, соответственно $2n+1$. В качестве нормального вида для Q мы используем

$$(x_1x_1' + x_2x_2' + \ldots + x_nx_n'), \text{ соотв. } x_0^2 + 2(x_1x_1' + x_2x_2' + \ldots + x_nx_n'). \quad (22)$$

Унитарное ограничение возникает, если взять x_i' сопряженным к x_i (и, кроме того, при нечетной размерности x_0 вещественным) и потребовать, чтобы эти условия сохранялись при преобразовании. Мы не будем здесь более подробно рассматривать отдельные операции из $\mathfrak{d}$; достаточно заметить, что при четной размерности $2n$ их мультипликаторы попарно обратны друг другу, а при нечетной $2n+1$ к n парам взаимно обратных мультипликаторов еще добавляется одиночное $\varepsilon_0 = 1$. Для группы $\mathfrak{d}_u$ тех унитарных преобразований с определителем 1 от $2n$, соответственно $2n+1$ переменных

$$(x_0),\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_n',$$

которые переводят в себя форму Q, хорошо известно, что каждый ее элемент t может быть записан в виде

$$t = u^{-1}(\varepsilon)\,u,$$

где u и диагональная матрица (ε) мультипликаторов

$$(\varepsilon_0 = 1), \quad \varepsilon_i = e(\varphi_i), \quad \varepsilon_i' = \bar{\varepsilon}_i = e(-\varphi_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

точно так же принадлежат $\mathfrak{d}_u$. При нечетной размерности в (ε) сопряжена каждая такая диагональная матрица в $\mathfrak{d}_u$, которая получается из нее при помощи уже упоминавшихся выше $2^n \cdot n!$ подстановок группы (S) для углов вращения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. При четной же размерности нужно ограничиться половиной $(S)'$ элементов из (S), которые являются перестановками углов φ с добавлением однородной смены знака у какого-либо *четного* числа угловых аргументов.

---

[3] Случай определенных форм рассматривал И. Шур в своем втором сообщении: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie.— S.-Ber. Berlin Akad., 1924, S. 297.

Матрица произвольной инфинитезимальной операции из $\mathfrak{D}$ имеет вид (23)

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & \rho_i & \sigma_i \\ \hline -\sigma_i & \rho_{ik} & \rho'_{ik} \\ \hline -\rho_i & \sigma'_{ik} & \sigma_{ik} \\ \hline \end{array} \qquad (23) \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & \rho_i\lambda_i & -\sigma_i\lambda_i \\ \hline \sigma_i\lambda_i & \rho_{ik}(\lambda_i-\lambda_k) & \rho'_{ik}(\lambda_i+\lambda_k) \\ \hline \rho_i\lambda_i & -\sigma'_{ik}(\lambda_i+\lambda_k) & \sigma_{ik}(-\lambda_i+\lambda_k) \\ \hline \end{array} \qquad (24)$$

$\rho_{ik}+\sigma_{ik}=0$, ρ_{ik}' и σ_{ik}' кососимметрические $(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Поле ширины 1 присутствует лишь при нечетной размерности. Пусть опять через $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ обозначаются диагональные матрицы, принадлежащие инфинитезимальной группе $\mathfrak{D}^0$: $\rho_{ii}=\lambda_i$, $\sigma_{ii}=-\lambda_i$. Правая схема (24) описывает, что получается из левой матрицы (23) после коммутаторного умножения на h. Таким образом, корнями будут

$$\alpha=(\pm\lambda_i),\ \pm\lambda_i\pm\lambda_k \quad (i<k,\ \text{все четыре комбинации знаков}).$$

Для какой-либо линейной формы Λ от λ_i с коэффициентами m_i соответственно имеем

$$\Lambda_\alpha=(\pm 2m_i),\ \pm m_i\pm m_k \quad (i<k). \tag{25}$$

Опять мы позаботились о том, чтобы было $\alpha_\alpha=2$. Переход от Λ к $\Lambda'=\Lambda-\Lambda_\alpha\cdot\alpha$ в случае со скобками, который возникает лишь при нечетной размерности, сводится к изменению знака у какого-либо одного λ_i; в случае $\alpha=\lambda_i\pm\lambda_k$ $(i<k)$ — к перестановке λ_i с λ_k, соответственно к этой перестановке, объединенной с одновременной сменой знака у λ_i и λ_k. Под полуцелым числом будем понимать число такого вида: целое число $+1/2$. Из (25) следует: коэффициенты какого-либо имеющегося веса Λ либо все целые, либо все полуцелые числа. Кроме того, для старшего веса всегда

$$m_1\geqslant m_2\geqslant\ldots\geqslant m_n \text{ и } m_i+m_k\geqslant 0 \text{ для } i\neq k.$$

В случае нечетной размерности добавляется неравенство $m_i\geqslant 0$. Следовательно,

$$(\dim.\ 2n+1)\ m_1\geqslant m_2\geqslant\ldots\geqslant m_{n-1}\geqslant m_n\geqslant 0,$$
$$(\dim.\ 2n)\ m_1\geqslant m_2\geqslant\ldots\geqslant m_{n-1}\geqslant |m_n|. \tag{26}$$

Во втором случае m_n может быть также отрицательным.

Реализация. *Каждому возможному старшему весу принадлежит одно и только одно неприводимое представление.*

Размерность $2n+1$. Каждый возможный старший вес составляется при помощи неотрицательных целых коэффициентов p_i из

$$\mu_i=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$
$$\mu_n=\frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}{2}.$$

Как находятся неприводимые представления со старшими весами $\mu_1, \mu_2, \ldots$ $\ldots, \mu_{n-1}$, известно [45]. Для представления, обладающего старшим весом μ_n, все линейные формы

$$\frac{\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\ldots\pm\lambda_n}{2} \tag{27}$$

должны быть весами; таким образом, его число переменных равно по крайней мере 2^n. И если мы найдем некоторое принадлежащее старшему весу μ_n представление размерности 2^n, то оно должно быть неприводимым. Действительно, веса (27) отличны друг от друга, и из одного из них все остальные получаются при помощи повторного применения соответствующего корню $\alpha = \lambda_i$ перехода $\Lambda \to \Lambda'$ [46]. Одно такое представление на самом деле было построено Э. Картаном [4] [47]. 2^n переменных целесообразно обозначить одной буквой x с n индексами, каждый из которых может иметь значение $+$ или $-$. Я укажу операции, которые соответствуют в искомом представлении диагональной матрице h и элементу e_α из $\mathfrak{c}^0$, принадлежащему корню α.

$H = H(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: каждый x переходит в

$$\frac{\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\ldots\pm\lambda_n}{2}\,x,$$

где комбинация знаков в множителе совпадает с последовательностью индексов соответствующей переменной x.

E_α, $\alpha = \lambda_i$. Те x, у которых i-й индекс $+$, переходят в 0. $x = x_-$, у которого i-й индекс $-$, переходит в $\pm x_+$, где x_+ получается из x_-, если i-й индекс меняется с $-$ на $+$; знак у x_+ равен произведению индексов от 1-го до $(i-1)$-го в x_+. Аналогично обстоит дело в случае $\alpha = -\lambda_i$: роли $+$ и $-$ в i-м индексе следует поменять.

E_α, $\alpha = \lambda_i + \lambda_k$ $(i < k)$. Все x за исключением тех, которые на i-м и k-м местах имеют индекс $-$, переходят в 0. Исключенные же, x_{--}, переходят в $\pm x_{++}$ превращением i-го и k-го индексов в $++$, а знак выбирается равным произведению индексов в x, стоящих между i-м и k-м местами. Аналогично обстоит дело для остальных трех содержащихся в формуле $\alpha = \pm\lambda_i \pm \lambda_k$ возможностей.

Из упомянутых неприводимых представлений, принадлежащих старшим весам μ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, с помощью композиции [48] получаем для каждого из возможных старших весов некоторое представление такого вида. Те из них, у которых коэффициенты старшего веса имеют в знаменателе 2, могут быть, разумеется, на образе $\mathfrak{d}$ не однозначными, но должны быть не более чем двузначными [5] [48].

Размерность $2n$. Все возможные старшие веса могут быть скомбинированы при помощи целочисленных неотрицательных коэффициентов из

$$\mu_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

$$\mu_{n-1} = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}-\lambda_n}{2},$$

$$\mu_n = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}+\lambda_n}{2}.$$

[4] *Cartan E.*, II, p. 86, 91.

[5] В исследованиях Шура они были оставлены без рассмотрения.

Все дело лишь в том, чтобы найти оба неприводимых представления, которые принадлежат старшим весам μ_{n-1}, соответственно μ_n[6]; они имеют размерность 2^{n-1}. Всеми весами будут

$$\frac{\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\ldots\pm\lambda_n}{2},$$

причем в первом случае допустимы лишь те комбинации знаков, произведение которых равно —, а во втором случае — те, произведение которых есть +. Определение этих обоих представлений точно то же самое, что и при нечетной размерности, с тем изменением, что в первом случае n индексов переменных подчинены условию: их произведение совпадает с —, а во втором случае — с +, и корни $\alpha = \pm\lambda_i$ вместе с соответствующими E_α опускаются [49].

§ 5. Представления группы вращений: интегральная часть

Теорема 5. *Обычная вещественная группа вращений* $\mathfrak{d}_u$ *не является односвязной, в то же время некоторое определенное двулистное накрытие* $\mathfrak{d}_u^*$ *для* $\mathfrak{d}_u$ *односвязно.* (Верна для $n \geqslant 3$.)

Вещественное пространство, в котором действуют вещественные вращения, характеризуется тем, что (x_0 вещественное) x_i и x_i' сопряжены друг другу. Для размерностей $n = 3$ и $n = 4$ наше утверждение следует из известных кватернионных формул для вращений. Замкнутая кривая на $\mathfrak{d}_u$ — это непрерывное вращение волчка около некоторой фиксированной точки O, которое возвращает волчок в его первоначальное положение; и вопрос состоит в том, могу ли я каждое замкнутое движение непрерывно перевести в покой. Полезно представить себе наглядно в трехмерном пространстве, что однократный поворот волчка вокруг некоторой фиксированной, проходящей через O оси не может быть непрерывно переведен в покой, и лишь двукратный поворот таким свойством обладает. Доказательство в общем случае мы проведем методом, уже применявшимся к $\mathfrak{d}_u$ и $\mathfrak{c}_u$.

Элемент t из $\mathfrak{d}_u$ мы считаем сингулярным, если из его мультипликаторов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$; $\varepsilon_1' = \bar{\varepsilon}_1, \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'$ два с разными индексами равны, например ε_i и ε_k или ε_i и ε_k' $(i \neq k)$ равны друг другу; кроме того, при нечетной размерности добавляется случай, когда один мультипликатор из этой серии, например ε_1 и тем самым также ε_1', равен 1 $(= \varepsilon_0)$. Напротив, не считается сингулярным случай, когда при четной размерности $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = \pm 1$ или при нечетной размерности $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = -1$. Опять легко убедиться в том, что сингулярные элементы t внутри $\mathfrak{d}_u$ образуют многообразие на три единицы меньшей размерности. Мы опять с помощью углов φ_i несингулярного элемента t восстанавливаем рисунок (см. с. 142). Если t пробегает замкнутую кривую $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{d}_u$, которая не проходит через сингулярные точки, то вертикальные хорды не могут обгонять друг друга и каждая должна опять возвращаться в свое первоначальное положение. *При нечетной размерности*, однако, самая левая пара ε_n, ε_n' может проходить через -1, так что при полном пробеге φ_n переходит в $1 - \varphi_n$ через 1/2. Если все φ_i возвращаются к своим первоначальным значе-

[6] *Cartan E.*, II, p. 86, 91.

ниям, то мы можем стянуть $\mathfrak{K}$ непрерывно в единичную точку. Если реализуется другая возможность, то колебания углов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ все еще можно непрерывно стянуть к значению покоя $\varphi = 0$; одновременно дуги, пробегаемые φ_n, перевозятся в однократное пробегание полной окружности от $\varphi = 0$ до $\varphi = 1$; при этом вертикальная начальная хорда передвигается по направлению к 1 в соответствии с прочими вертикальными отрезками. В результате деформационного процесса вместо $\mathfrak{K}$ получаем тогда непрерывно производимый полный поворот вещественной двумерной плоскости, непрерывно варьируемой при помощи параметра кривой μ:

$$e_1 \to \cos\varphi \cdot e_1 - \sin\varphi \cdot e_2, \qquad e_2 \to \sin\varphi \cdot e_1 + \cos\varphi \cdot e_2.$$

«Вещественные» векторы e_1, e_2 и угол поворота φ непрерывно зависят от μ, и φ однократно пробегает шкалу угловых значений от 0 до 1. Этот процесс, очевидно, можно непрерывно перевести в полный поворот $\mathfrak{K}_0$ какой-либо фиксированной вещественной двумерной плоскости. Поэтому каждая замкнутая кривая $\mathfrak{K}$ гомологична [50] либо 0, либо $\mathfrak{K}_0$. Так как очевидно, что $\mathfrak{K}_0$ нельзя непрерывно стянуть в одну точку, то для нечетной размерности теорема доказана.

При четной размерности следует принять во внимание возможность, что самая правая пара $\varepsilon_1, \varepsilon_1'$ может пройти через $+1$ и тем самым φ_1 превратится в $-\varphi_1$ (с переходом через 0). Но если имеется не только одна-единственная пара, т. е. если $n \neq 2$, то первой паре при всех обстоятельствах запрещено совершать переход через -1 (с обгоном всех остальных пар). Упомянутая возможность не дает поэтому никаких последствий, так как деформация, при которой φ_1 заменяется на $\sigma \cdot \varphi_1$ (σ — уменьшающийся от 1 до 0 деформационный параметр), непрерывно переводит пробегаемую φ_1 дугу точно так же, как колебания углов $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, в положение покоя $\varphi = 0$. Остается обсудить лишь другую возможность, при которой n-я, самая левая пара, проходит через -1 и φ_n превращается в $1 - \varphi_n$ (с переходом через $^1/_2$). Результат в таком случае, очевидно, будет совпадать с результатом при нечетной размерности.

Воспроизведенная выше таблица Картана позволяет установить, что действительно имеются такие представления абстрактной группы [51] $\mathfrak{d}_u^*$, которые однозначны только на $\mathfrak{d}_u^*$, но не на $\mathfrak{d}_u$.

Вычисление объема $d\Omega$ производится теперь согласно уже изложенному в главе I ходу мыслей. В качестве компонент некоторого инфинитезимального элемента (23) в $\mathfrak{d}_u$ можно использовать (ρ_i, σ_i), все ρ_{ik} и те ρ_{ik}', σ_{ik}', для которых $i < k$.

В таком случае

$$d\Omega = \left\{\prod_i (\varepsilon_i - 1)\left(\frac{1}{\varepsilon_i} - 1\right)\right\} \cdot \prod_{i \neq k}\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\right) \times \\ \times \prod_{i<k} (\varepsilon_i\varepsilon_k - 1)\left(\frac{1}{\varepsilon_i\varepsilon_k} - 1\right) d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n.$$

Произведение в фигурных скобках присутствует лишь при нечетной размерности. Следовательно, если воспользоваться опять способом записи (14),

получаем

$$\Delta = \prod_i s\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)\cdot\prod_{i<k}(c(\varphi_i)-c(\varphi_k)) \qquad (\dim = 2n+1), \tag{28}$$

$$\Delta = \prod_{i<k}(c(\varphi_i)-c(\varphi_k)) \qquad (\dim = 2n). \tag{28'}$$

Так как мы все время должны различать случаи нечетной и четной размерностей, то первое высказывание всегда относится к первому, второе — ко второму случаю.

Примитивные характеры χ являются конечными рядами Фурье от угловых аргументов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ в некотором немного более общем смысле: это многочлен из слагаемых вида

$$e\,(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n),$$

где m_i — либо все целые, либо все полуцелые числа. Характеры симметричны относительно группы (S), соответственно $(S)'$. $\Delta\cdot\chi = \xi$ будет конечным рядом Фурье, имеющим альтернированный характер относительно (S), соответственно $(S)'$; и поэтому он аддитивно составлен из элементарных сумм

$$\xi\,(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n) = \Sigma \pm e\,(l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n).$$

Для l_i, которые все целые или все полуцелые, выполняются неравенства

$$l_1 > l_2 > \ldots > l_n > 0, \quad \text{соотв.} \quad l_1 > l_2 > \ldots > l_{n-1} > |\,l_n\,|.$$

Альтернированная сумма распространяется на применяемые к аргументам подстановки из (S), соответственно $(S)'$. *В случае нечетной размерности* имеем выражение через определитель:

$$\xi\,(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |\,s\,(l_1\varphi),\ s\,(l_2\varphi),\ \ldots,\ s\,(l_n\varphi)\,|, \tag{29}$$

и Δ — низшее из имеющихся ξ:

$$\Delta = \xi\,(r_1, r_2, \ldots, r_n), \tag{30}$$

$$r_1 = n - {}^1/_2,\ \ldots,\ r_{n-1} = {}^3/_2,\ r_n = {}^1/_2; \tag{31}$$

$$\chi = \frac{\xi\,(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\xi\,(r_1, r_2, \ldots, r_n)} \tag{32}$$

является характером неприводимого представления «веса» $m_i = l_i - r_i$, т. е. того, старший вес которого имеет эти коэффициенты m_i. Полуцелые l_i приводят к однозначным на $\mathfrak{d}_u$, целые l_i — к двузначным представлениям. Выражение (29) появилось уже для группы $\mathfrak{c}$, ср. формулу (16).

Для случая четной размерности имеем

$$2\cdot\xi\,(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n) = |\,c\,(l_1\varphi),\ c\,(l_2\varphi),\ \ldots,\ c\,(l_n\varphi)|, \text{ если } l_n = 0);$$

напротив, при $l_n \neq 0$

$$2\cdot\xi\,(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |\,c\,(l_1\varphi),\ \ldots,\ c\,(l_n\varphi)\,| + |\,s\,(l_1\varphi),\ \ldots,\ s\,(l_n\varphi)\,|. \tag{33}$$

Опять Δ — низшее из имеющихся ξ, (30),

$$r_1 = n - 1, \ldots, r_{n-1} = 1, r_n = 0 \tag{34}$$

и (32) задает характер неприводимого представления веса $m_i = l_i - r_i$. Число переменных

$$N = \frac{P(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{P(n - 1/2, \ldots, 3/2, 1/2)} \qquad (\dim = 2n + 1), \tag{35}$$

соответственно

$$N = \frac{P'(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{P'(n - 1, \ldots, 1, 0)} \qquad (\dim = 2n); \tag{35'}$$

P задается формулой (21),

$$P'(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \prod_{i<k} (l_i - l_k)(l_i + l_k).$$

Переход от элементов группы $\mathfrak{d}_u$ к элементам полной группы $\mathfrak{d}$ совершается сразу же. Рационально через компоненты t могут быть выражены, конечно, только характеры *однозначных* на $\mathfrak{d}$ неприводимых представлений. Кроме коэффициентов разложения p_i для $1/f \cdot (\zeta)$, см. формулу (19), далее встречаются также коэффициенты для

$$\frac{1-\zeta}{f(\zeta)}, \qquad \frac{1+\zeta}{f(\zeta)}, \qquad \frac{1-\zeta^2}{f(\zeta)};$$

они равны соответственно

$$p_i - p_{i-1}, \qquad p_i + p_{i-1}, \qquad p_i - p_{i-2}.$$

Размерность $2n + 1$. Если за l взять все целые числа, то выражение (32) будет отличаться от (17) лишь тем, что в знаменателе вместо (15) стоит (28). Кроме того,

$$\frac{1}{\prod_i (1 - \varepsilon_i\zeta)(1 - \varepsilon_i^{-1}\zeta)} \text{ теперь не равно } \frac{1}{f(\zeta)}, \text{ а равно } \frac{1-\zeta}{f(\zeta)}.$$

Следовательно, $\chi(t)$ получается из задаваемого в (20) p-определителя так, что p_i заменяется на $p_i - p_{i-1}$ и полученное выражение умножается на

$$\delta = \prod_i c\left(\frac{\varphi_i}{2}\right) = \prod_i (\varepsilon_i^{1/2} + \varepsilon_i^{-1/2}).$$

Имеем

$$\delta^2 = \prod_i (2 + c(\varphi_i)).$$

При знаке произведения стоит значение для $\zeta = -1$ от

$$1 + \zeta^2 - c(\varphi_i)\zeta = (1 - \varepsilon_i\zeta)(1 - \varepsilon_i^{-1}\zeta).$$

Поэтому

$$\delta^2 = {}^1/_2 f(-1) = {}^1/_2 \, | e + t |.$$

Для *двузначных представлений* тем самым получаем:

$$\chi(t) = \sqrt{{}^1/_2\,|l+t|}\cdot|p_{l-n}-p_{l-n-1},\ p_{l-n+1}-p_{l-n-2},\ldots,\ p_{l-1}-p_{l-2n}|. \quad (36)$$

[Вес: $l_i + i - n - {}^1/_2$; $l_n > 0$.]

Заменяя l на $l + {}^1/_2$ в формуле для характеров *однозначных представлений*, переходим в результате к целым числам l,

$$\frac{\varepsilon^{l+1/2}-\varepsilon^{-(l+1/2)}}{\varepsilon^{1/2}-\varepsilon^{-1/2}} = \varepsilon^l + \varepsilon^{l-1} + \ldots + \varepsilon^{-(l-1)} + \varepsilon^{-l}$$

является коэффициентом при ζ^l в степенном разложении для

$$\frac{1+\zeta}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)},$$

и мы имеем

$$\prod_k \frac{1+\zeta}{(1-\varepsilon_k\zeta)(1-\varepsilon_k^{-1}\zeta)} = \frac{1-\zeta^2}{f(\zeta)}.$$

Поэтому из уже использованной для вывода (20) формулы Коши

$$\left|\frac{1+\zeta_i}{(1-\varepsilon_k\zeta_i)(1-\varepsilon_k^{-1}\zeta_i)}\right| : |\varepsilon_k^{i-1}+\varepsilon_k^{-(i+1)}| = \prod_i \frac{1-\zeta_i^2}{f(\zeta_i)}\cdot|\zeta^{n-1},\ \zeta^{n-2}+\zeta^n,\ldots,\ 1+\zeta^{2n}|$$

мы опять получаем теперь p-определитель (20), в котором, однако, следует заменить p_i на $p_i - p_{i-2}$, l на $l + 1$:

$$\chi(t) = |p_{l-n+1}-p_{l-n-1},\ p_{l-n+2}-p_{l-n-2},\ldots,\ p_l-p_{l-2n}|. \quad (37)^7$$

[Вес: $l_i + i - n$; $l_n \geqslant 0$.]

Размерность $2n$. Для однозначных представлений (l_i целочисленные) с $l_n = 0$ получаем сразу же, так как $\varepsilon^l + \varepsilon^{-l}$ является коэффициентом при ζ^l ($l \neq 0$) в степенном разложении для

$$\frac{1-\zeta^2}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)} \quad \text{и} \quad \prod_i (1-\varepsilon_i\zeta)(1-\varepsilon_i^{-1}\zeta) = f(\zeta),$$

равенство (37). Если l_i — целые числа и $l_n > 0$, то это выражение пригодно для первого из двух слагаемых, на которые, согласно (33), разлагается χ. Для второй части с синусами имеем выражение

$$\frac{|\varepsilon^{l_1}-\varepsilon^{-l_1},\ldots,\varepsilon^{l_n}-\varepsilon^{-l_n}|}{|\ldots,\varepsilon^2+\varepsilon^{-2},\ \varepsilon+\varepsilon^{-1},\ 1|},$$

т. е. p-определитель (20), умноженный на

$$\delta = \prod_i s(\varphi_i).$$

[7] По поводу этой и других формул см. упомянутую на с. 148 при ссылке статью И. Шура.

Имеем

$$(-1)^n \delta^2 = \prod_i (2 - c(\varphi_i))(2 + c(\varphi_i)) = f(1) f(-1) = |e - t| \cdot |e + t|.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \end{array}\right) \qquad (38)$$

Обозначая матрицу коэффициентов (38) инвариантной квадратичной формы (22) через $\bar{e}$, получим $|\bar{e}| = (-1)^n$. Поэтому имеем после замены $|e - t|$ на транспонированный определитель $|e - t'|$:

$$\delta^2 = |(\bar{e} - t'\bar{e})(e + t)|.$$

Далее, $t'\bar{e}t = \bar{e}$, так что δ^2 равно определителю кососимметрической матрицы $\bar{e}t - t'\bar{e}$. Но определитель кососимметрической матрицы является квадратом целой рациональной функции ее компонент, а именно «пфаффиана». Таким образом, полагая

$$\pi(t) = \text{пфаффиану от } (\bar{e}t - t'\bar{e}),$$

получим[8]

$$2\chi(t) = |p_{l-n+1} - p_{l-n-1}, p_{l-n+2} - p_{l-n-2}, \dots| \pm \\ \pm \pi(t) \cdot |p_{l-n}, p_{l-n+1} - p_{l-n-1}, \dots|. \qquad (39)$$

[Вес: $l_1 - n + 1$, $l_2 - n + 2, \dots, l_{n-1} - 1$, $\pm l_n$ ($l_n \geqslant 0$); для $l_n = 0$ множитель 2 слева следует опустить и справа выкинуть второй член.]

Если l — полуцелые числа, то на этот раз мы вместо l пишем $l - {}^1/_2$.

$$\frac{\varepsilon^{l-1/2} + \varepsilon^{-(l-1/2)}}{\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{-1/2}}, \qquad \frac{\varepsilon^{l-1/2} - \varepsilon^{-(l-1/2)}}{\varepsilon^{1/2} - \varepsilon^{-1/2}}$$

---

[8] И. Шуру еще не удалось провести вычисление этого характера, обозначенного им через η; точно так же, конечно, у него отсутствуют таковые для двузначных представлений. Рекурсивное выражение для η было получено Р. Брауэром (Диссертация. Берлин, 1925) в связи с исследованиями Шура, но без использования интегрального исчисления.

являются коэффициентами при ζ^{l-1} в степенном разложении функций

$$\frac{1-\zeta}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)}, \qquad \frac{1+\zeta}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)}$$

соответственно.

Поэтому в p-определителе (20) p_i заменяется на $p_i - p_{i-1}$, соответственно $p_i + p_{i+1}$; таким образом, оба эти определителя превращаются в те, которые стоят в формуле (40). Кроме того, при возведении в квадрат произведения

$$\prod_i (\varepsilon_i^{1/2} + \varepsilon_i^{-1/2}), \qquad \prod_i (\varepsilon_i^{1/2} - \varepsilon_i^{-1/2})$$

становятся равными

$$f(-1) = |e+t| \text{ и } (-1)^n f(1) = (-1)^n |e-t| = |\bar{e} - t'\bar{e}|.$$

Тем самым теперь находим:

$$2\chi(t) = \sqrt{|e+t|} \cdot |p_{l-n} - p_{l-n-1}, p_{l-n+1} - p_{l-n-2}, \ldots| \pm$$
$$\pm \sqrt{(-1)^n |e-t|} \cdot |p_{l-n} + p_{l-n-1}, p_{l-n+1} + p_{l-n-2}, \ldots|. \quad (40)$$

[Вес: $l_1 - n + 1/2$, $l_2 - n + 3/2$, ..., $l_{n-1} - 3/2$, $\pm(l_n - 1/2)$; $l_n > 0$.]

В формулах (36), (37), (39), (40) $l_1, l_2, \ldots, l_n$ обозначают всегда целые числа, которые удовлетворяют неравенствам $l_1 > l_2 > \ldots > l_n$; кроме того, как это уже отмечалось каждый раз, на l_n наложено ограничение $l_n > 0$ или $l_n \geqslant 0$. Возникающие иррациональности равны

$$\sqrt{(-1)^n |e-t|} \text{ и } \sqrt{|e+t|}.$$

При нечетной размерности первая равна 0; при четной размерности их произведение рационально и равно $\pi(t)$.

Теорема 6. *Каждое представление группы* $\mathfrak{d}$ *разлагается на неприводимые. Размерности неприводимых представлений описываются формулами* (35), (35′). *Выражение характера через мультипликаторы элемента t задается, если учесть равенство* (32), *формулами* (29), (31), *соответственно* (33), (34), *а через саму матрицу t* — в (37), (36), *соответственно* (39), (40).

На рассматриваемой И. Шуром, помимо $\mathfrak{d}$, группе *всех* оставляющих инвариантной форму Q линейных преобразований, которой принадлежат также преобразования с определителем -1, я здесь не останавливаюсь, так как наша точка зрения инфинитезимальная. Также и характеры

$$\chi = \sum_{(k)} r_{k_1 k_2 \ldots k_n} \cdot e(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \ldots + k_n\varphi_n)$$

являются для нас исключительно «производящими функциями», которые объединяют имеющиеся веса $k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \ldots + k_n\varphi_n$ и их кратности $r_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. Получаемые при помощи растяжения из $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ группы могут быть рассмотрены аналогично тому, как это было сделано в § 8 главы I.

Глава III

СТРУКТУРА ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП

Исследование строения полупростых непрерывных групп с конечным числом параметров было начато Киллингом [1]; но лишь Картану в его диссертации (Париж, 1894 г.) удалось дать безупречное изложение всей теории. Результатом этого было полное описание всех абстрактных *простых* групп (произведениями которых являются полупростые группы): помимо трех больших классов групп $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, для которых в предыдущих главах была развита теория представлений, появляются еще пять отдельных групп. Исследование распадается на две части — общую, в которой выясняются основные свойства полупростых групп, и специальную, в которой с помощью этих свойств многочисленные возможные случаи сводятся к немногим конкретным. Здесь я снова возвращаюсь к общей части не только потому, что она допускает существенные упрощения, но и по той причине, что эта общая часть для наших целей должна быть развита дальше, чем это сделано у Картана. Основной целью при этом является правильным образом распространить на все полупростые группы «унитарное ограничение», которое играло до сих пор такую значительную роль.

§ 1. Основные понятия. Разложение по максимальной разрешимой подгруппе

Понятие *инфинитезимальной группы* $\mathfrak{a}$ напоминалось в главе I, § 2. Линейное подмножество $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{a}$ является подгруппой [52], если для любых двух элементов b_1 и b_2 из $\mathfrak{b}$ коммутатор $[b_1, b_2]$ всегда принадлежит $\mathfrak{b}$. Мы имеем *инвариантную* (*нормальную*, *самосопряженную*) *подгруппу*, если вместе с b рассматриваемому многообразию принадлежит и $[b, x]$ при любом элементе x группы $\mathfrak{a}$. В последнем случае $\mathfrak{a}$, взятое по модулю $\mathfrak{b}$ (проекция $\mathfrak{a}$ вдоль $\mathfrak{b}$; в многообразии, получающемся при этом проектировании, два элемента группы $\mathfrak{a}$ считаются равными, если их разность принадлежит $\mathfrak{b}$), тоже есть группа, а именно *фактор-группа*. Элементы вида $[x, y]$ и все те, которые составляются из них аддитивно, образуют *группу коммутаторов*, или *производную группу* $\mathfrak{a}'$; последняя является инвариантной подгруппой в $\mathfrak{a}$. Выполняется более сильное утверждение: производная любой инвариантной подгруппы в $\mathfrak{a}$ снова является инвариантной подгруппой в $\mathfrak{a}$. В силу этого все последовательные производные $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, ... являются инвариантными подгруппами в $\mathfrak{a}$. Если этот ряд обрывается на инфинитезимальной группе 0, то $\mathfrak{a}$ есть *разрешимая* (или «интегрируемая») группа. Это понятие можно еще сформулировать так: группа $\mathfrak{a}$ разрешима, если ее можно построить с помощью ряда

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_r,\ \mathfrak{a}_{r-1}, \ldots, \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_0 = 0,$$

---

[1] Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen.— Math. Ann., 1888, Bd. 31, S. 252; 1889, Bd. 33, S. 1; 1890, Bd. 34, S. 161.

в котором каждое $\mathfrak{a}_{i-1}$ является инвариантной подгруппой в предыдущем $\mathfrak{a}_i$ и число параметров при переходе от одного члена ряда к следующему уменьшается на 1. Если группа не имеет никаких других инвариантных подгрупп, кроме 0 и самой себя, то она называется *простой*; *полупростой* же она называется в случае, когда нет никаких других разрешимых инвариантных подгрупп, кроме 0. Однопараметрические группы являются одновременно абелевыми и простыми; абстрагируясь, однако, от этого тривиального случая, можно сказать, что простая группа всегда является и полупростой.

Произвольной абстрактно заданной группе [53] всегда соответствует группа преобразований, которую Ли назвал *параметрической группой*. В ней элементу T группы отвечает преобразование $X = TX'$ группового многообразия в себя; тем самым она поставлена в изоморфное соответствие с первоначальной группой. Другую гомоморфную группу преобразований, «*присоединенную*» группу, мы получим, если каждому элементу T поставить в соответствие преобразование

$$X = TX'T^{-1}.$$

Это представление, однако, вообще говоря, является «укороченным» [54]; а именно, всем элементам T, которые принадлежат *центру* группы, т. е. перестановочны со всеми элементами X группы, будет соответствовать тождественное преобразование. Несмотря на это присоединенная группа в теории непрерывных групп имеет большее значение, чем параметрическая группа, так как преобразование присоединенной группы переводит каждый *инфинитезимальный* элемент x снова в некоторый инфинитезимальный элемент x':

$$x = Tx'T^{-1}$$

является однородным линейным преобразованием в r-мерном векторном пространстве $\mathfrak{a}$. Таким способом мы получаем представление непрерывной группы с помощью линейных преобразований. Инфинитезимальный элемент t представляется при этом инфинитезимальным линейным преобразованием, которое произвольному вектору x пространства $\mathfrak{a}$ дает приращение $x - x'$, равное

$$dx = [t, x]. \qquad (1)$$

То, что это представление является гомоморфным, и составляет собственно содержание закона умножения:

$$[[s, t], x] = [t, [s, x]] - [s, [t, x]].$$

t принадлежит центру, если $[t, x]$ тождественно по x равно 0. Центр есть инвариантная подгруппа, элементы которой s, t перестановочны между собой: $[s, t] = 0$. Поэтому для полупростой группы $\mathfrak{a}$ центр состоит только из 0, и в этом случае инфинитезимальная группа $\mathfrak{a}$ присоединенных линейных преобразований (1) является *изоморфным* представлением для $\mathfrak{a}$.

Каждое однородное линейное преобразование в m-мерном пространстве $\mathfrak{r}$, которое пробегает переменная x,

$$dx = Tx$$

обладает не зависящим от выбора координатной системы характеристическим многочленом

$$f(\zeta) = |\zeta E - T| \quad (E \text{ — } m\text{-мерная единичная матрица}).$$

Если $\zeta = \alpha$ — корень многочлена f, то существует вектор $e \neq 0$, который при рассматриваемом отображении преобразуется в αe:

$$de = Te = \alpha e.$$

Обозначая *различные* корни многочлена $f(\zeta)$ через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ все пространство $\mathfrak{r}$ можно разложить на подпространства $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots$, каждое из которых инвариантно относительно T и обладает следующим свойством[2]: если α_1 есть ν_1-кратный корень характеристического многочлена, то $\mathfrak{r}_1$ имеет размерность ν_1 и все векторы x, принадлежащие $\mathfrak{r}_1$, удовлетворяют уравнению

$$(T - \alpha_1 E)^{\nu_1} x = (d - \alpha_1)^{\nu_1} x = 0.$$

Обратно, если вектор x удовлетворяет уравнению $(d - \alpha_1)^l x = 0$ со сколь угодно большим положительным показателем l, то x лежит в $\mathfrak{r}_1$. Аналогичное положение вещей имеет место для $\mathfrak{r}_2, \ldots$

Эти результаты применимы к операциям присоединенной группы, к матрице T линейного преобразования

$$dx = [t, x].$$

Воспользовавшись каким-либо базисом $e_1, e_2, \ldots, e_r$ инфинитезимальной группы $\mathfrak{a}$, в котором

$$t = \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2 + \ldots + \tau_r e_r, \tag{2}$$

получим, что рассматриваемая матрица состоит из элементов γ_{ik}, фигурирующих в равенствах

$$[t, e_i] = \sum_k \gamma_{ik} e_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

В своей зависимости от элемента t они являются линейными формами от параметров $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$. Характеристический многочлен

$$f(\zeta; t) = |\zeta E - T| = \zeta^n - \psi_1(t)\zeta^{n-1} + \psi_2(t)\zeta^{n-2} - \ldots \pm \psi_r(t), \tag{3}$$

коэффициенты которого $\psi_i(t)$ суть однородные целые рациональные функции степени i от параметров $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ элемента t, является инвариантом относительно присоединенной группы; другими словами, $df = 0$, если элементу t дать инфинитезимальное приращение $dt = [a, t]$ при любом элементе a группы $\mathfrak{a}$. Последний коэффициент $\psi_r(t)$ тождественно равен нулю. Особенно важным является однородно линейный относительно параметров *след*

$$\psi_1(t) = \sum_i \gamma_{ii}.$$

Если $\mathfrak{b}$ является q-параметрической подгруппой в $\mathfrak{a}$, то характеристический многочлен $g(\zeta; t)$ произвольного элемента t группы $\mathfrak{b}$, составленный для груп-

[2] См., например: *Weyl H.* Mathematische Analyse des Raumproblems. B., 1923, S. 88—95.

пы $\mathfrak{b}$ (он будет степени q), является делителем многочлена $f(\zeta; t)$. В частности, если $\mathfrak{b}$ является инвариантной подгруппой в $\mathfrak{a}$, то для элементов t из $\mathfrak{b}$ выполняется соотношение

$$f(\zeta; t) = \zeta^{r-q} g(\zeta; t). \tag{4}$$

При фиксированном $t = t_0$ мы раскладываем r-мерное линейное пространство $\mathfrak{a}$, в котором действует преобразование

$$T_0 : dx = [t_0, x],$$

на подпространства в соответствии с различными характеристическими корнями преобразования T_0. Про вектор или элемент x, который лежит в подпространстве, соответствующем корню α_0, мы будем для краткости говорить, что он принадлежит α_0.

Лемма. *Если x_α принадлежит корню α_0, x_β — корню β_0, то $[x_\alpha, x_\beta]$ принадлежит корню $\alpha_0 + \beta_0$.* (В частности, $[x_\alpha, x_\beta] = 0$, если $\alpha_0 + \beta_0$ не является корнем характеристического многочлена.)

Доказательство. Если положить $\alpha_0 + \beta_0 = \gamma_0$, $[x_\alpha, x_\beta] = x_\gamma$, то

$$[t_0, [x_\alpha, x_\beta]] = [[t_0, x_\alpha], x_\beta] + [x_\alpha, [t_0, x_\beta]],$$

или

$$T_0 x_\gamma = [T_0 x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, T_0 x_\beta],$$

$$(T_0 - \gamma_0) x_\gamma = [(T_0 - \alpha_0) x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, (T_0 - \beta_0) x_\beta].$$

Повторным применением этого соотношения получаем, что $(T_0 - \gamma_0)^l x_\gamma$ является суммой выражений вида

$$[(T_0 - \alpha_0)^i x_\alpha, (T_0 - \beta_0)^j x_\beta] \text{ с } i + j = l.$$

Следовательно, как только l станет равным по крайней мере сумме кратностей обоих корней α_0 и β_0, то

$$(T_0 - \gamma_0)^l x_\gamma = 0.$$

Согласно этой лемме векторы, принадлежащие корню 0, к которым, в частности, принадлежит и само t_0, образуют не только линейное многообразие, но даже *группу* $\mathfrak{h}$ внутри $\mathfrak{a}$. Если h — элемент группы $\mathfrak{h}$, то отображение $dx = [h, x]$ оставляет инвариантным каждое из подпространств, принадлежащих различным корням α_0 преобразования t_0. Действительно, вместе с x_α тому же корню α_0 всегда принадлежит и $[h, x_\alpha]$.

Пусть теперь, в частности, исходное t_0 выбрано среди регулярных элементов, т. е. таких, у которых характеристический многочлен $f(\zeta; t_0)$ имеет максимальное число различных корней, какое вообще может иметь некоторый элемент в $\mathfrak{a}$[3]. Если среди коэффициентов многочлена (3) последние n тождественно равны нулю, то для рассматриваемого специального t_0 корень 0 многочлена $f(\zeta; t_0)$ имеет в точности кратность n и $\mathfrak{h}$ является n-параметрической группой. Через базис $h_1, h_2, \ldots, h_n$ группы $\mathfrak{h}$ каждый элемент в ней пред-

[3] Если, рассматривая τ как неопределенную величину, выделить из f наибольший общий делитель $f(\zeta)$ и $df/d\zeta$, то условие о регулярности означает, что дискриминант остающегося множителя $f_1(\zeta)$ есть целая рациональная функция от параметров элемента t, не равная тождественно нулю и отличная от нуля при $t = t_0$.

ставляется в виде

$$h = h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_n h_n.$$

В частности,

$$t_0 = h^0 = \lambda_1^0 h_1 + \lambda_2^0 h_2 + \ldots + \lambda_n^0 h_n.$$

Пусть α_0 означает какой-либо корень характеристического уравнения для элемента t_0, а $\mathfrak{r}_\alpha$ — принадлежащее ему подпространство. Так как формула $dx = [h, x]$ определяет отображение подпространства $\mathfrak{r}_\alpha$ на себя, то можно построить характеристический многочлен $f_\alpha(\zeta; h)$ в этом подпространстве. Его степень ν_α равна размерности пространства $\mathfrak{r}_\alpha$. Имеем

$$f(\zeta; h) = \prod_{\alpha_0} f_\alpha(\zeta; h),$$

где произведение распространяется на различные корни α_0. Я утверждаю, что $f_\alpha(\zeta; h)$ при всех значениях параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ должен быть степенью некоторого линейного множителя: $(\zeta - \alpha)^{\nu_\alpha}$. В самом деле, если бы существовали λ-значения, для которых многочлен f_α имел бы различные корни, то максимальное число различных корней многочлена $f(\zeta; t)$ не достигалось бы при $t = t_0$. $\nu_\alpha \cdot \alpha$ есть след преобразования h в пространстве $\mathfrak{r}_\alpha$, а поэтому само α является линейной формой от параметров λ_i; α_0 является значением этой формы при $\lambda_i = \lambda_i^0$. В частности, $f_0(\zeta; h)$, характеристический многочлен элемента h в группе $\mathfrak{h}$, должен быть тождественно равен ζ^n, так как в произведении остальных множителей $f_\alpha(\zeta; h)$ коэффициент при ζ^0 не равен тождественно нулю. В полученном разложении на множители

$$f(\zeta; h) = \Pi(\zeta - \alpha)$$

линейные формы α от параметров λ называются *корнями группы* $\mathfrak{a}$. Начиная с этого места, элемент $t_0 = h^0$ уже не играет никакой роли, и его место занимает вся группа $\mathfrak{h}$.

Группа $\mathfrak{h}$ разрешима. Это вытекает из следующей теоремы Энгеля [4]: *если характеристический многочлен произвольного элемента h в n-параметрической инфинитезимальной группе $\mathfrak{h}$ равен ζ^n, то $\mathfrak{h}$ — разрешимая группа.*

Доказательство этой теоремы основано на фундаментальной теореме Ли об *инфинитезимальных разрешимых группах линейных преобразований.* Если $\mathfrak{H}$ является такой группой, состоящей из линейных преобразований некоторого m-мерного пространства $\mathfrak{r}$:

$$dx = Hx = (\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_n H_n)\, x,$$

где λ_i — параметры, H_i — некоторые фиксированные m-мерные матрицы и x пробегает векторы пространства $\mathfrak{r}$, то в этой теореме утверждается, *что в пространстве $\mathfrak{r}$ существует проходящий через начало координат луч, инвариантный относительно всех преобразований группы* $\mathfrak{H}$. Другими словами: существует такой отличный от нуля вектор e в $\mathfrak{r}$, что

$$He = \Lambda \cdot e, \tag{5}$$

[4] См.: *Umlauf A.* Dissertation. Leipzig, 1891, S. 35; *Cartan E.* Thèse. P., 1894, p. 46; доказательство этой теоремы и теоремы Ли приведено в приложении к настоящей главе.

где Λ — линейная форма от параметров λ_i. В частности, если H принадлежит производной $\mathfrak{H}'$, то $\Lambda = 0$. В самом деле, из (5) следует (в очевидных обозначениях)

$$[H, H^*]e = \Lambda\,(\Lambda^* e) - \Lambda^*\,(\Lambda e) = 0.$$

Теорему Ли можно снова применить к $(m-1)$-мерному пространству, которое получается из $\mathfrak{r}$ с помощью проекции вдоль e; продолжая таким образом, получаем некоторую систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$, которые задают систему координат в $\mathfrak{r}$ и удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} He_1 &\equiv \Lambda_1 e_1, \\ He_2 &\equiv \Lambda_2 e_2 \pmod{e_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ He_m &\equiv \Lambda_m e_m \pmod{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}}, \end{aligned} \tag{6}$$

в которых Λ_i — линейные формы по λ. Согласно этим равенствам характеристический многочлен для H разлагается на линейные множители

$$(\zeta - \Lambda_1)(\zeta - \Lambda_2)\ldots(\zeta - \Lambda_m).$$

Эту теорему, в частности, можно применить к группе линейных преобразований, которая является присоединенной группой для некоторой разрешимой инфинитезимальной группы. Теорема Энгеля является по существу обращением получающейся при этом теоремы о структуре разрешимых групп.

Теорему Ли мы применим здесь к группе отображений $dx = [h, x]$ в подпространстве $\mathfrak{x}_\alpha$, соответствующем корню α; эта группа гомоморфна группе $\mathfrak{h}$. Согласно теореме Ли существует определенный элемент $e_\alpha \neq 0$, для которого при всех h имеет место равенство

$$[h, e_\alpha] = \alpha \cdot e_\alpha. \tag{7}$$

Если размерность подпространства $\mathfrak{r}_\alpha$ больше единицы, то существует, кроме того, линейно независимый по отношению к e_α элемент e_α', для которого

$$[h, e_\alpha'] \equiv \alpha \cdot e_\alpha' \pmod{e_\alpha}, \tag{7'}$$

и т. д. Для любого элемента группы $\mathfrak{h}$ вида $[h_1, h_2]$, а тем самым для всех элементов производной группы $\mathfrak{h}'$, все корни $\alpha = 0$.

Уже эти рассуждения дают возможность убедиться в том, что структурные формулы для групп $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ имеют существенные общие черты.

§ 2. Веса

Пусть имеется представление группы $\mathfrak{a}$ с помощью линейных преобразований. Пусть при этом элементу h соответствует матрица H, а элементу e_α — матрица E_α. Пусть, кроме того, вместе с α также и $-\alpha$ является корнем. Тогда $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$ будет специальной матрицей H. Значение любой линейной формы $\Lambda = \Lambda\,(H)$ от переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ при $H = H_\alpha$ будет обозначаться, как и прежде, через Λ_α. Если для вектора e пространства представления имеет место равенство

$$He = \Lambda \cdot e, \tag{5}$$

где Λ — линейная форма от λ_i, то мы говорим, что e есть вектор *веса* Λ, и в случае $e \neq 0$, что Λ является весом данного представления. Теперь можно дословно повторить приведенное в главе I, § 2 рассуждение: если Λ является весом данного представления, в то время как $\Lambda - \alpha$ уже не обладает этим свойством (мы считаем при этом, что α — отличный от нуля корень), то из вектора $e = e_0 \neq 0$, удовлетворяющего равенству (5), образуем ряд e_0, $E_\alpha e_0 = e_1$, $E_\alpha e_1 = e_2, \ldots$. Если в нем e_{g+1} будет первым элементом, равным нулю, то

$$\Lambda_\alpha = -\frac{g}{2}\alpha_\alpha. \tag{8}$$

Отсюда получаем важные следствия:

1. Если $\alpha_\alpha = 0$, то Λ_α обращается в нуль для любого веса Λ. (Разумеется, это будет верным и тогда, когда $\alpha = 0$.)

2. При противоположном предположении $\alpha_\alpha \neq 0$ вместе с Λ весом будет также и

$$\Lambda' = \Lambda - \frac{2\Lambda_\alpha}{\alpha_\alpha}\alpha; \tag{9}$$

при этом $2\Lambda_\alpha/\alpha_\alpha$ является целым числом.

Из приведенного выше вывода формулы (8) мы еще отметим (для $\alpha \neq 0$) равенство

$$E_{-\alpha}E_\alpha e_i = -e_i\sum_{j=0}^{i}(\Lambda + j\alpha)_\alpha.$$

Множитель справа равен

$$(i+1)\Lambda_\alpha + \frac{i(i+1)}{2}\alpha_\alpha = -\frac{(i+1)(g-i)}{2}\alpha_\alpha.$$

Заменяя $\Lambda + i\alpha$ через Λ, получаем утверждение: если Λ разбивает построенную α-серию весов

$$\Lambda - i\alpha, \ldots, \Lambda - \alpha, \Lambda, \Lambda + \alpha, \ldots, \Lambda + k\alpha$$

так, как это видно из обозначений, то для построенного нами вектора e_Λ $(=e_i)$ веса Λ имеет место равенство

$$E_{-\alpha}E_\alpha e_\Lambda = \frac{(i+1)k}{2}\alpha_\alpha \cdot e_\Lambda. \tag{10}$$

Поэтому преобразование $E_{-\alpha}E_\alpha$ имеет в инвариантном относительно него $(g+1)$-мерном подпространстве, построенном на векторах $e_0, e_1, \ldots, e_g$, такой след:

$$\frac{\alpha_\alpha}{2}\{1\cdot g + 2\cdot(g-1) + \ldots + (g-1)\cdot 2 + g\cdot 1\} = \frac{\alpha_\alpha}{2}\cdot\frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Эта формула может быть обобщена в двух направлениях.

1. Спроектируем представляющее пространство $\mathfrak{r}$ по модулю $e_0, e_1, \ldots, e_g$ и применим те же рассуждения к получающемуся при этом пространству $\mathfrak{r}'$, имеющему на $g+1$ меньшую размерность [55]. Возможно, что в нем снова имеется серия весов вида $\Lambda + i\alpha$ с той же самой линейной формой Λ и соответствующими векторами e_i' вместо e_i. Если эта серия состоит из $g'+1$ чле-

нов, то $[(g+1)+(g'+1)]$-мерное пространство, построенное на первой и второй сериях векторов, будет инвариантно относительно отображения $E_{-\alpha}E_\alpha$ и частичный след этого отображения в рассматриваемом пространстве равен

$$\frac{\alpha_\alpha}{2}\left\{\frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{g'(g'+1)(g'+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right\}.$$

Таким же образом можно продолжить рассуждение дальше. Для полного следа отображения $E_{-\alpha}E_\alpha$ получаем значение

$$\frac{\alpha_\alpha}{2}\sum\frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \tag{11}$$

где сумма распространена на все α-серии, на которые указанным образом может быть разложен ряд весов в обобщенном смысле, а именно характеристические корни $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m$ преобразования H (см. формулу (6)); для каждой α-серии $g+1$ означает ее длину.

Если, в частности, $\alpha_\alpha \neq 0$, то из равенства, аналогичного равенству (8) и выражающего тот факт, что значения весов серии для H_α имеют нуль в качестве центра тяжести, следует, что вторая серия по отношению к первой на обоих концах либо выступает на одинаковое число членов, либо укорочена на одинаковое число членов. Отсюда получаем: если $\alpha_\alpha \neq 0$, то всегда две линейные формы Λ и Λ', связанные формулой (9), являются характеристическими корнями преобразования H *одинаковой кратности*, в то время как лежащие между нами линейные формы из арифметической прогрессии $\Lambda + i\alpha$ являются корнями либо той же, либо большей кратности.

2. Эти результаты остаются верными, если вместо $E_{-\alpha}$ воспользоваться матрицей $T_{-\alpha}$, соответствующей какому-либо принадлежащему корню $-\alpha$ элементу $t_{-\alpha}$ группы $\mathfrak{a}$. Тогда $[E_\alpha, T_{-\alpha}] = H_\alpha{}^*$ снова является некоторой матрицей H, $\Lambda(H_\alpha{}^*)$ полагается равной $\Lambda_\alpha{}^*$. Для следа матрицы $T_{-\alpha}E_\alpha$ получаем аналогично равенству (11) выражение

$$\frac{\alpha_\alpha^*}{2}\sum\frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3}. \tag{11*}$$

§ 3. Критерий Картана для разрешимых и полупростых групп

Из того, что след $\psi_1(t)$ есть инвариант присоединенной группы, следует, что $\psi_1(t) = 0$ для всех элементов t производной группы $\mathfrak{a}'$. В этом убедиться можно также из следующих соображений: если элементам s, t группы $\mathfrak{a}$ в присоединенной группе соответствуют преобразования S, T, то элементу $[s, t]$ соответствует преобразование $ST - TS$. Но два преобразования ST и TS имеют одинаковые следы, а поэтому $ST - TS$ имеет след 0. Если в качестве базиса группы $\mathfrak{a}$ используются произвольный элемент $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ построенной в § 1 максимальной разрешимой подгруппы $\mathfrak{h}$ и принадлежащие различным корням $\alpha \neq 0$ элементы $e_\alpha, e_\alpha{}', \ldots$:

$$t = h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + \sum_{\alpha\neq 0}(\tau_\alpha e_\alpha + \tau_\alpha{}' e_\alpha{}' + \ldots), \tag{12}$$

то $\psi_1(t)$ будет зависеть только от параметров λ_i, а именно оно равно сумме всех корней α (каждого с соответствующей ему кратностью). В самом деле, если t_α принадлежит корню $\alpha \neq 0$, то с помощью отображения $dx = [t_\alpha, x]$ из вектора x, принадлежащего некоторому корню ρ, получается вектор dx, принадлежащий корню $\rho + \alpha \neq \rho$. Таким образом, след этого отображения равен 0. Но частичный след преобразования $dx = [h, x]$ в пространстве $\mathfrak{r}_\alpha$, соответствующем корню α, равен $\nu_\alpha \cdot \alpha$.

Особую важность для нас имеет квадратичная форма [56] $\psi_2(t)$ или след $\varphi(t)$ преобразования T^2; заметим, что $\varphi(t) = \psi_1^2 - 2\psi_2$. След $\varphi(s, t)$ отображения ST

$$dx = [t, [s, x]] \tag{13}$$

является симметрической билинейной формой относительно s и t, $\varphi(t, t) = \varphi(t)$ — соответствующая квадратичная форма.

Последующие рассмотрения опираются на то, что результаты § 2, в частности формула (8), могут быть применены к присоединенной группе; для нее веса совпадают с корнями. При этом формула (8) должна быть обобщена следующим образом. Если t_α, $t_{-\alpha}$ — какие-либо два элемента, принадлежащие противоположным корням α, $-\alpha$, то значение ρ_α^{**} всякого корня ρ для содержащегося в $\mathfrak{h}$ элемента

$$h_\alpha^{**} = [t_\alpha, t_{-\alpha}] \tag{14}$$

будет рациональным кратным α_α^{**}. То, что в случае $\alpha = 0$ для (14) все корни равны нулю, было уже упомянуто в конце § 2. Если же $\alpha \neq 0$, то пусть

$$\rho - i\alpha, \ldots, \rho - \alpha, \rho, \rho + \alpha, \ldots, \rho + k\alpha \tag{15}$$

— серия корней, причем ни $\rho - (i + 1)\alpha$, ни $\rho + (k + 1)\alpha$ не является корнем. Рассмотрим линейное многообразие

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\rho-i\alpha} + \ldots + \mathfrak{r}_{\rho-\alpha} + \mathfrak{r}_\rho + \mathfrak{r}_{\rho+\alpha} + \ldots + \mathfrak{r}_{\rho+k\alpha}.$$

Оно инвариантно относительно преобразований t_α, $t_{-\alpha}$ из присоединенной группы, соответствующих элементам T_α, $T_{-\alpha}$. Так как

$$H_\alpha^{**} = T_\alpha T_{-\alpha} - T_{-\alpha} T_\alpha,$$

то след преобразования H_α^{**} в этом подпространстве равен нулю:

$$\sum_{j=-i}^{k} g_j (\rho + j\alpha)_\alpha^{**} = 0;$$

g_j обозначает здесь размерность подпространства $\mathfrak{r}_{\rho+j\alpha}$.

Если $\mathfrak{a}$ — разрешимая группа, то в силу теоремы Ли для всех элементов t из $\mathfrak{g}'$ имеем

$$f(\zeta; t) = \zeta^r;$$

другими словами, для таких элементов равны нулю все $\psi_i(t)$. Согласно теореме Энгеля — с учетом равенства (4) для $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'$ — это условие является также и достаточным для того, чтобы $\mathfrak{a}'$, а следовательно, и $\mathfrak{a}$, была разреши-

мой группой. Э. Картан усилил этот критерий, показав, что вместо всех коэффициентов можно принимать во внимание только один ψ_2:

Лемма. *Группа $\mathfrak{a}$ разрешима в том и только в том случае, когда для всех элементов t из $\mathfrak{a}'$ выполняется соотношение $\varphi(t) = 0$.*

Доказательство. Из условия леммы следует, в частности, что $\varphi(h_\alpha^{**}) = 0$. Но ρ_α^{**} является рациональным кратным от α_α^{**}. Поэтому обращение в нуль суммы квадратов всех ρ_α^{**} ($\varphi(h)$ как раз и есть сумма квадратов всех корней) имеет следствием то, что α и, следовательно, каждое ρ для $h = h_\alpha^{**}$ равно нулю. Любой элемент производной группы $\mathfrak{a}'$, принадлежащий $\mathfrak{b}$, аддитивно составляется из элементов вида (14). Поэтому все корни равны нулю для любого элемента из $\mathfrak{b}$, принадлежащего производной группе $\mathfrak{a}'$.

Отсюда следует, что $\mathfrak{a}'$ не совпадает со всей группой $\mathfrak{a}$, ибо в противном случае все корни тождественно обращались бы в нуль, т. е. $\mathfrak{a}$ было бы равно $\mathfrak{h}$. Но так как $\mathfrak{h}$ разрешима, то $\mathfrak{h}'$ имеет по крайней мере на один параметр меньше, чем $\mathfrak{h}$.

Следовательно, число параметров в группе $\mathfrak{a}'$ меньше, чем в $\mathfrak{a}$. Но согласно равенству (4) в характеристическом многочлене, соответствующем группе $\mathfrak{a}'$, коэффициенты, аналогичные ψ_1, ψ_2, также равны нулю. Применение полученного результата к $\mathfrak{a}'$ вместо $\mathfrak{a}$ показывает, что $\mathfrak{a}''$ опять имеет по крайней мере на один параметр меньше, чем $\mathfrak{a}'$. Продолжая рассуждение таким образом далее, устанавливаем разрешимость группы $\mathfrak{a}$.

Теорема 1[5]. *Группа $\mathfrak{a}$ полупроста в том и только в том случае, когда квадратичная форма $\varphi(t)$ не вырождена.*

Так как $\varphi(t)$ инвариантна относительно присоединенной группы, то элементы t, параметры которых $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ удовлетворяют линейным уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_2} = \ldots = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_r} = 0, \tag{16}$$

образуют инвариантную подгруппу в $\mathfrak{a}$[6]. Согласно лемме эта подгруппа разрешима. Поэтому в случае, когда $\mathfrak{a}$ — полупростая группа, эти уравнения имеют лишь единственное решение $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_r = 0$; другими словами, $\varphi(t)$ в этом случае должна быть невырожденной квадратичной формой относительно параметров τ.

Обратное утверждение, хотя и не имеет для нас никакого значения, может быть доказано столь же легко. Если группа $\mathfrak{a}$ не полупростая, то в ней существует некоторая отличная от нуля разрешимая инвариантная подгруппа $\mathfrak{b}$. Ряд производных $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \ldots$ обрывается. Последняя в этом ряду отличная от нуля группа $\mathfrak{c}$ является инвариантной абелевой подгруппой в $\mathfrak{a}$. Выбрав в $\mathfrak{a}$ r-членный базис так, чтобы в нем как часть содержался базис группы $\mathfrak{c}$, получим, что параметры, относящиеся к $\mathfrak{c}$, не будут входить в характеристический многочлен $f(\zeta; t)$ и, следовательно, в $\varphi(t)$.

Теорема 1 является первой существенной достигнутой целью в исследовании структуры группы. Для произвольной полупростой группы само собой

---

[5] *Cartan E.* Thèse. P., 1894, p. 52.

[6] Ibid., p. 21, 22.

напрашивается в качестве исходного представления с помощью линейных преобразований взять присоединенную группу. Правда, в главах I и II мы так не поступали; там с самого начала в нашем распоряжении имелось представление в пространстве значительно меньшей размерности по сравнению с числом параметров данной группы. Однако построение невырожденной квадратичной формы $\varphi(t)$, инвариантной относительно преобразований присоединенной группы, открывает путь для использования присоединенной группы аналогично группам линейных преобразований $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{d}$ в двух предыдущих главах.

С помощью рассуждения, аналогичному тому, которое привело к теореме 1, устанавливается, что любая полупростая группа является прямым произведением простых (не однопараметрических) групп; это разложение определено однозначно. Но этот факт, основополагающий в построении всех полупростых групп, здесь нам не понадобится [7].

Начиная с этого места, $\mathfrak{a}$ всегда будет обозначать пополупростую группу и слово *корень* будет употребляться лишь для отличных от 0 корней. Полученное в теореме 1 условие используется в следующей теореме:

Теорема 2. *Если $\mathfrak{a}$ — полупростая группа, то максимальная разрешимая подгруппа $\mathfrak{h}$ является абелевой. Корни α являются простыми* [57] *и попарно взаимно противоположны: α, $-\alpha$. Среди них существуют n линейно независимых. α_α (значение α для $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$) отлично от нуля. Кратные 2α, 3α, . . . корня не являются корнями.*

Доказательство. Мы опять воспользуемся базисным представлением (12). Если s является вторым произвольным элементом группы $\mathfrak{a}$:

$$s = h(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n) + \sum_\alpha (\sigma_\alpha e_\alpha + \sigma_\alpha' e_\alpha' + \ldots), \tag{17}$$

то след отображения (13) имеет вид

$$\varphi(s, t) = Q(\varkappa, \lambda) + \sum_\alpha (\sigma_\alpha \tau_{-\alpha}).$$

Q — симметрическая билинейная форма от параметров $\varkappa$ и λ; соответствующая квадратичная форма $Q(\lambda)$ является суммой квадратов всех корней. Каждое $(\sigma_\alpha \tau_{-\alpha})$ обозначает при этом произведение, состоящее из числового коэффициента, одной из переменных σ_α, σ_α', . . ., соответствующих корню α, и одной из переменных $\tau_{-\alpha}$, $\tau_{-\alpha}'$, . . ., соответствующих корню $-\alpha$.

1. $Q(\lambda)$, сумма квадратов корней, должна быть невырожденной; поэтому среди корней должно быть столько линейно независимых, каково число переменных λ. Кроме того, 0 будет единственным элементом группы $\mathfrak{h}$, для которого все корни обращаются в нуль. Но так как для любого элемента производной группы $\mathfrak{h}'$ все корни на самом деле равны нулю, то $\mathfrak{h}'$ редуцируется к нулю.

2. Если бы α было корнем, а $-\alpha$ нет, то переменная σ_α не входила бы в $\varphi(s, t)$ — вопреки тому, что $\varphi(s, t)$ невырожденна.

3. По той же причине, так как переменная σ_α должна входить в $\varphi(s, t)$, корень α не может обращаться в нуль для любого элемента из $\mathfrak{h}$ вида $h_\alpha^* = [e_\alpha, t_{-\alpha}]$, $t_{-\alpha} = e_{-\alpha}$, или $e_{-\alpha}'$, или $e_{-\alpha}''$, . . .; см. формулу (11*). Пусть неко-

[7] *Cartan E.* Thèse. P., 1894, p. 53.

торый элемент $t = t_{-\alpha}$, принадлежащий корню $-\alpha$, выбран так, что $\alpha_\alpha^* = \alpha(h_\alpha^*) \neq 0$. Предположение о том, что существует вектор $e_\alpha' = e_1 \not\equiv 0 \pmod{e_\alpha}$, удовлетворяющий условию

$$[h, e_1] \equiv \alpha \cdot e_1 \pmod{e_\alpha}, \qquad (18)$$

приводит к противоречию, если воспользоваться рассуждениями в конце § 2. Снова следует образовать ряд

$$e_1,\ E_\alpha e_1 = [e_\alpha, e_1] = e_2,\ E_\alpha e_2 = e_3, \ldots .$$

Для $t = t_{-\alpha}$ получаем

$$Te_2 = [t, e_2] \equiv -\alpha_\alpha^* \cdot e_1 \pmod{e_\alpha}.$$

Действительно,

$$[t, [e_\alpha, e_1]] = [e_\alpha, [t, e_1]] - [[e_\alpha, t], e_1]. \qquad (19)$$

Так как $[t, e_1]$ принадлежит $\mathfrak{h}$, то первый член в правой части этого равенства является кратным вектора e_α, а второй член, согласно (18), $\equiv -\alpha_\alpha^* e_1 \pmod{e_\alpha}$. Далее, при помощи индукции, применяя формулу (19) к векторам $e_2, e_3, \ldots$, вместо e_1, получаем

$$[t, e_3] = -3\alpha_\alpha^* \cdot e_2, \ldots;$$

в общем виде имеем

$$[t, e_{g+1}] = -\frac{g(g+1)}{2}\alpha_\alpha^* \cdot e_g$$

(абсолютно — начиная с $g = 2$, по модулю e_α — при $g = 1$). Так как при достаточно большом индексе e_{g+1} должен быть равен нулю, то, идя в обратном направлении, отсюда получаем, что векторы $e_g, \ldots, e_3, e_2$ равны нулю и, наконец, $e_1 \equiv 0 \pmod{e_\alpha}$, вопреки предположению. Тем самым одновременно доказано, что $\alpha_\alpha \neq 0$. Если $-i \cdot \alpha$ — корень, а $-(i+1)\alpha$ уже не является корнем, то с помощью изложенного метода, исходя из $e_{-i\alpha} = e_{-i}$, получаем ряд элементов

$$e_{-i}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_i, \ldots,$$

в котором каждый элемент получается из предыдущего при помощи отображения E_α. Так как $\alpha_\alpha \neq 0$, то этот ряд должен обрываться как раз на векторе e_i. Вектор e_1, принадлежащий корню α, с необходимостью является кратным вектора e_α, а следовательно, $e_2 = [e_\alpha, e_1] = 0$. Поэтому i не может быть $\geqslant 2$.

Имеется полная аналогия с полученными в первых двух главах структурными формулами.

Теорема 3. *Подгруппа $\mathfrak{h}$ абелева, ее общий элемент h зависит от n параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и каждому корню α соответствует вектор e_α. Элементы h и векторы e_α, соответствующие различным корням, вместе образуют базис для всей группы $\mathfrak{a}$. Выполняются соотношения*

$$[h, h'] = 0; \quad [h, e_\alpha] = \alpha \cdot e_\alpha; \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha;$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha + \beta \neq 0 \text{ не является корнем;} \\ N_{\alpha\beta} \cdot e_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha + \beta \text{ есть корень.} \end{cases}$$

Произвольным при этом является, во-первых, выбор базиса в $\mathfrak{h}$, и, во-вторых, вектор e_α может быть заменен любым (отличным от нуля) кратным самого себя [58]. $\varphi(s, t)$ принимает теперь вид

$$Q(\varkappa, \lambda) + \sum_\alpha N_\alpha \sigma_\alpha \tau_{-\alpha}. \tag{20}$$

Согласно (11) коэффициент

$$N_\alpha = \frac{1}{2} \alpha_\alpha \sum \frac{g(g+1)(g+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \tag{21}$$

сумма распространяется на всевозможные α-серии корней, длины которых обозначаются через $g+1$. К этим сериям следует причислить и трехчленную серию $-\alpha, 0, \alpha$. Если в этой сумме собрать в пары члены, соответствующие противоположным сериям, т. е. таким, которые получаются одна из другой заменой любого члена ρ на $-\rho$ (только серия $-\alpha, 0, \alpha$ переходит при этом в себя), то окажется, что N_α является целочисленным кратным от α_α; целочисленный множитель положителен и $\geqslant 2$.

§ 4. Группа (S)

До сих пор, если не считать некоторых видоизменений и дополнений, нужных для дальнейшего, я в основном следовал диссертации Картана. Начиная с этого места, мы начинаем прокладывать собственный путь.

В λ-пространстве переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ каждому корню α соответствует однородное линейное преобразование S_α, переводящее произвольную линейную форму ξ от λ в

$$\xi' = \xi - \frac{2\xi_\alpha}{\alpha_\alpha} \alpha. \tag{22}$$

В частности, это преобразование переводит α в $-\alpha$. Имеем $S_\alpha = S_{-\alpha}$. Для любого корня ρ, в частности, выражение $2\rho_\alpha/\alpha_\alpha$ является целым числом. Все корни посредством преобразований S_α лишь переставляются между собой. В силу этого S_α порождают некоторую *конечную группу* (S) [59]. Вместо суммы квадратов всех корней Q нам теперь следует рассмотреть аналогично построенную положительно определенную эрмитову форму, которую мы опять будем обозначать через Q:

$$Q = \sum_\alpha \alpha\bar{\alpha}.$$

Она инвариантна относительно S_α и, следовательно, относительно всех операций группы (S). Я буду пользоваться геометрической терминологией, в основе которой лежит метрика, задаваемая в λ-пространстве формой Q. Преобразование S_α вида (22) не может быть не чем иным, как зеркальным отображением относительно плоскости $\alpha = 0$, так как оно оставляет инвариантной форму Q и отлично от тождественного преобразования. Следовательно, S_α обратно самому себе и в обозначениях (22) имеем

$$S_{\rho'} = S_\alpha S_\rho S_\alpha.$$

Если ввести плоскостные координаты, полагая

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x^i \lambda_i, \quad \text{в частности, } \alpha = \sum_{i=1}^{n} a^i \lambda_i,$$

и обозначить через G^* обратную к Q эрмитову форму или соответствующее билинейное выражение

$$G^*(x, \bar{y}) = \sum g_{ik} x^i \bar{y}^k \qquad (g_{ki} = g_{ik}),$$

то будем иметь

$$\xi_\alpha / \alpha_\alpha = G^*(x, \bar{a}) / G^*(a, \bar{a}). \tag{23}$$

Начиная с этого места, я буду писать (скорее, в интересах наборщика, чем читателя) $(\xi\alpha)$ вместо ξ_α. Выбирая n независимых корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и используя их в качестве координат λ, из (23) получаем

$$2(\alpha_k\alpha_i)/(\alpha_i\alpha_i) = 2g_{ki}/g_{ii} = \text{целому числу } a_{ik}.$$

Поэтому определитель из $a_{ik} \neq 0$. Далее, отсюда следует, что для любого корня

$$\rho = r^1\alpha_1 + r^2\alpha_2 + \ldots + r^n\alpha_n$$

коэффициенты r^i являются рациональными числами, которые вычисляются из целочисленных уравнений

$$2(\rho\alpha_i)/(\alpha_i\alpha_i) = \sum_k a_{ik} r^k.$$

Теперь мы можем возвратиться от эрмитовой к квадратичной форме

$$Q = \Sigma\rho^2 \quad (\rho \text{ пробегает все корни}).$$

Она является положительно определенной формой с *рациональными* коэффициентами; то же самое выполняется для обратной формы G^*.

При желании подтвердить геометрически очевидное равенство (23) вычислениями удобнее всего это сделать следующим образом: определенная эрмитова форма приводится к виду

$$Q = c(\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{\lambda}_n)$$

(c — некоторая положительная постоянная), так что $\alpha = \lambda_1$. Выписывая преобразование (22):

$$\lambda_i' = \lambda_i - c_i\alpha\,(2(\xi\alpha)/(\alpha\alpha) = c_1x^1 + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n),$$

из его унитарности тотчас же получаем соотношения

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0.$$

Следовательно,

$$2(\xi\alpha)/(\alpha\alpha) = c_1x^1 = cc_1G^*(x, \bar{a}).$$

Теорема 4. *Параметры λ_i можно выбрать таким образом, чтобы все корни стали линейными формами от λ_i с рациональными коэффициентами. Зеркальные отражения S_α относительно плоскостей $\alpha = 0$ в смысле метрики, задаваемой определенной квадратичной формой Q в λ-пространстве, порождают конечную группу (S), оставляющую инвариантной систему корней.*

Мы уже знаем, как велико значение группы (S) в вопросе о представлениях группы $\mathfrak{a}$. Действительно, в любом представлении вместе с весом Λ всегда встречаются среди весов те линейные формы от λ_i, которые получаются из Λ с помощью операций группы (S): система весов также инварианта относительно (S). Употребляя слово «вес» в широком смысле, как в конце § 2, можно сказать, что «эквивалентные» веса, получающиеся друг из друга с помощью операций группы (S), всегда имеют одинаковую кратность.

Тем самым нами установлены многочисленные результаты (и частично в более простой форме), найденные Киллингом и Картаном при помощи сложных вычислений с определителями. Формула

$$a_{ik} = 2g_{ki}/g_{ii}, \qquad g_{ki} = g_{ik}$$

заменяет с трудом обозреваемые равенства в диссертации Картана, (теорема X, с. 61). Так как g_{ik} суть коэффициенты некоторой определенной квадратичной формы, то

$$0 < \det g_{ik} \leqslant g_{11} \cdot g_{22} \ldots g_{nn}$$

или

$$0 < \det a_{ik} \leqslant 2^n;$$

соответствующие неравенства имеют место для каждого усечения квадратичной формы (см.: *Cartan E.* Dissertation, p. 61). Действительное нахождение всех простых или полупростых непрерывных групп основывается на нахождении соответствующих конечных групп (S), т. е. всех тех конечных групп, образующие которых являются зеркальными отражениями в n-мерном евклидовом пространстве и удовлетворяют некоторым определенным условиям целочисленности [60].

Требованием, сформулированным в теореме 4, координаты λ_i в λ-пространстве определяются с точностью до линейного преобразования с рациональными коэффициентами. Более того, эти координаты можно инвариантно задать с точностью до *целочисленного унимодулярного преобразования*. Линейную форму ξ от переменных λ_i мы будем называть целочисленной, если $2\,(\xi\alpha)/(\alpha\alpha)$ для всех корней α является целым числом. Такими формами будут, в частности, как сами корни, так и веса любого представления группы $\mathfrak{a}$. Целочисленные формы образуют *решетку*, а поэтому среди них можно выбрать n линейно независимых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, из которых все другие могут быть получены как линейные комбинации с целыми коэффициентами. При таком выборе системы координат в λ-пространстве квадратичная форма Q тоже имеет целочисленные коэффициенты.

Так как каждый из векторов e_α и $e_{-\alpha}$ можно умножить на произвольный отличный от нуля множитель, то можно добиться того, чтобы коэффициент N_α в (20) стал равен -1. В таком случае мы будем иметь

$$\varphi(t) = Q(\lambda) - \sum_\rho \tau_\rho \tau_{-\rho}. \tag{24}$$

Из (21) следует важный результат о том, что при этих условиях $(\alpha\alpha)$ становится отрицательным. Теперь мы запишем то, что $\varphi(t)$ является инвариантом присоединенной группы, в частности инвариантом относительно принадлежащих этой группе преобразований $dt = [e_\alpha, t]$: $\varphi(s, t) = 0$ при $s = [e_\alpha, t]$.

В обозначениях (12), (17) компоненты элемента s суть

$$h(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n) = \tau_{-\alpha} h_\alpha,$$
$$\sigma_\alpha = -\alpha,$$
$$\sigma_{\alpha+\rho} = N_{\alpha,\rho}\tau_\rho$$

или

$$\sigma_{-\rho} = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho+\alpha \neq 0 \text{ не является корнем;} \\ N_{\alpha,-\rho-\tau}\cdot\tau_{-\rho-\alpha}, & \text{если } \rho+\alpha \text{ есть корень.} \end{cases}$$

Обращение в нуль получающегося при этом $\varphi(s, t)$ приводит к равенствам

$$-\alpha = \sum_\rho (\rho\alpha)\rho \tag{25}$$

и

$$\sum_\rho N_{\alpha,-\rho-\alpha}\tau_\rho\tau_{-\rho-\alpha} = 0. \tag{26}$$

Суммы берутся по всем корням ρ; во втором равенстве остаются лишь те члены, для которых $\rho+\alpha$ также является корнем.

Мы займемся сначала первым равенством. Для случая, когда β тоже является корнем, из него следует

$$-(\alpha\beta) = \sum_\rho (\rho\alpha)(\rho\beta).$$

Отсюда получаем, что $(\alpha\beta)$ *симметрично* относительно α и β (чем и оправдывается, задним числом, запись $(\alpha\beta)$), и поэтому можно также писать

$$-(\alpha\beta) = \sum_\rho (\alpha\rho)(\beta\rho).$$

В силу этого $-(\alpha\beta)$ является значением симметричной билинейной формы

$$G(\xi, \eta) = \sum_\rho \xi_\rho\eta_\rho \quad \text{для} \quad \xi = \alpha, \quad \eta = \beta. \tag{27}$$

Здесь через ξ, η обозначаются две произвольные линейные формы относительно λ:

$$\xi = \sum_{i=1}^n x^i\lambda_i, \qquad \eta = \sum_{i=1}^n y^i\lambda_i.$$

Квадратичная форма $G(\xi, \xi)$ положительно определенная, ибо ξ_ρ лишь в том случае обращается в нуль при всех корнях ρ, когда ξ тождественно равно 0. Мы снова получаем, что $(\alpha\alpha)$ отрицательно для каждого корня α. Форма G с точностью до постоянного множителя должна совпадать с введенной уже ранее формой G^*. Действительно, из

$$\beta_\alpha = -G(\beta, \alpha)$$

(α и β — корни) сразу же получаем для каждой линейной формы ξ:

$$\xi_\alpha = -G(\xi, \alpha);$$

поэтому согласно определению (27)

$$G(\xi, \eta) = \sum_{\rho} G(\xi, \rho)\, G(\rho, \eta).$$

В матрицах это означает, что

$$G = GQG$$

или, так как определитель матрицы G отличен от нуля, что G обратно по отношению к Q.

Если вместе с α и β форма $\alpha + \beta$ также является корнем, то из равенства $(\xi, \alpha + \beta) = (\xi\alpha) + (\xi\beta)$ следует, что [8]

$$h_{\alpha+\beta} = h_\alpha + h_\beta. \tag{28}$$

§ 5. Унитарное ограничение

Воспользуемся снова тождеством (26):

$$\sum_{\rho,\, \omega}'' N_{\alpha\omega} \tau_\rho \tau_\omega = 0,$$

где сумма берется по всем парам корней ρ, ω, которые удовлетворяют соотношению $\rho + \omega + \alpha = 0$. Для каждой такой пары корней имеем

$$N_{\alpha\rho} + N_{\alpha\omega} = 0.$$

При учете кососимметричности

$$N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta} \tag{29}$$

это означает: для трех корней α, β, γ, образующих «треугольник», т. е. дающих в сумме 0, имеем $N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta}$; при помощи циклической перестановки индексов это равенство может быть немедленно дополнено:

$$N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta}. \tag{30}$$

Поэтому для рассматриваемого числа подходит обозначение $N_{\alpha\beta\gamma}$: $N_{\alpha\beta\gamma}$ не меняется при циклической перестановке корневых индексов, а при нечетной перестановке меняет знак. Если α, β — два корня, сумма которых уже не является корнем, то мы полагаем $N_{\alpha\beta} = 0$. Пусть в дальнейшем α' будет обозначать то же, что и $-\alpha$.

Если α, β, γ — три корня, образующие треугольник, то равенство

$$[e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]] + [e_\beta, [e_\gamma, e_\alpha]] + [e_\gamma, [e_\alpha, e_\beta]] = 0$$

снова приводит к соотношению (28). В другом же случае, когда $\beta + \gamma \neq 0$, имеем

$$[e_\beta, e_\gamma] = N_{\beta\gamma} e_{\beta+\gamma},$$

$$[e_\alpha, [e\ , e_\gamma]] = N_{\alpha,\, \beta+\gamma} N_{\beta\gamma} e_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

[8] Это соотношение более простое и более общее, чем теорема VII в диссертации Э. Картана (с. 57).

Поэтому, если α, β, γ, δ — четыре корня, образующие четырехугольник

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

то, так как согласно (30) $N_{\alpha, \beta+\gamma}$ может быть заменено на $N_{\delta\alpha}$, выполняются соотношения:

$$N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta} + N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta} = 0$$
$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0;\ \beta + \gamma,\ \gamma + \alpha,\ \alpha + \beta \neq 0). \tag{31}$$

Наконец, последнее вспомогательное рассмотрение. Если β принадлежит следующей α-серии корней:

$$\beta - i\alpha, \ldots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta + k\alpha,$$

то согласно равенству (10), примененному к присоединенной группе, имеем

$$[e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_\beta]] = \frac{(i+1)k}{2} \alpha_\alpha \cdot e_\beta. \tag{32}$$

Если $\beta + \alpha$ является еще корнем ($k \geqslant 1$), то множитель

$$-\frac{(i+1)k}{2}\alpha_\alpha = R_{\alpha\beta} \tag{33}$$

будет положительным числом. Равенство (32) дает

$$N_{\alpha', \alpha+\beta}N_{\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta}.$$

Но согласно (30) имеем

$$N_{\alpha', \alpha+\beta} = N_{\beta'\alpha'} = -N_{\alpha'\beta'}.$$

Таким образом, получается, что

$$N_{\alpha\beta}N_{\alpha'\beta'} = R_{\alpha\beta} \tag{34}$$

есть положительное рациональное число, если вместе с α и β также и $\alpha + \beta$ является корнем. Отсюда, в частности, следует, что при последнем предположении $N_{\alpha\beta}$ всегда не равно 0; кроме того, оказывается, что число (33) симметрично зависит от обоих корней α и β.

Не нарушая достигнутой нормировки для $h_\alpha = [e_\alpha, e_{\alpha'}]$, мы можем вектор e_α умножить на любое отличное от нуля число μ, заменив одновременно $e_{\alpha'}$ на $(1/\mu)\ e_{\alpha'}$.

Лемма. *Векторы e_α с сохранением равенства* (24) *можно нормировать так, чтобы для двух корней α и β всегда имело место равенство $N_{\alpha\beta} = N_{\alpha'\beta'}$. Число $N_{\alpha\beta}$ является в таком случае вещественным.*

Мы воспользуемся введенным в предыдущей главе упорядочением по рангу: линейная форма от переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ с рациональными коэффициентами называется положительной, если у нее первый отличный от нуля коэффициент положителен; корень β старше корня α (в обозначениях $\beta > \alpha$ или $\alpha < \beta$), если $\beta - \alpha$ положительно. Пусть ρ — какой-либо положительный корень и Σ_ρ — совокупность тех корней α, для которых $\rho' < \alpha < \rho$. Пусть уже доказано, что

$$N_{\alpha\beta\gamma} = N_{\alpha'\beta'\gamma'} \tag{35}$$

для всех корней α, β, γ, которые образуют треугольник и принадлежат системе Σ_ρ. Мы хотим распространить равенство (35) на тот случай, когда к системе Σ_ρ добавляется два корня ρ' и ρ, т. е. на систему Σ_{ρ^*}, определяемую ближайшим старшим корнем ρ^*.

Для этого мы воспользуемся соотношением (31). Если между корнями α, β, ρ имеет место соотношение $\alpha + \beta = \rho$ и α, β принадлежит системе Σ_ρ, то

$$0 < \alpha < \rho, \quad 0 < \beta < \rho. \tag{36}$$

Аналогичное положение имеет место, если корни γ и δ принадлежат Σ_ρ и $\gamma + \delta = \rho$. С помощью соотношения (31), в котором следует заменить γ, δ на γ', δ', $N_{\alpha\beta\rho'}N_{\gamma'\delta'\rho}$ представляется в виде суммы двух произведений, из которых каждое при трехиндексном обозначении (35) содержит только те корни, которые принадлежат системе Σ_ρ. В самом деле, имеем, например,

$$N_{\beta\gamma'}N_{\alpha\delta'} = N_{\beta,\gamma',\gamma-\beta}N_{\alpha,\delta',\delta-\alpha}.$$

В силу (36) и $0 < \gamma < \rho$, $0 < \delta < \rho$ все имеющиеся здесь шесть индексов

$$\beta, -\gamma, \gamma - \beta, \alpha, -\delta, \delta - \alpha$$

принадлежат системе Σ_ρ. Преобразовав произведение $N_{\alpha'\beta'\rho}N_{\gamma\delta\rho'}$ аналогичным образом, при помощи нашего предположения о том, что равенство (35) выполняется для системы Σ_ρ, получаем, что

$$N_{\alpha\beta\rho'}N_{\gamma'\delta'\rho} = N_{\alpha'\beta'\rho}N_{\gamma\delta\rho'},$$

или

$$N_{\alpha\beta}/N_{\alpha'\beta'} = N_{\gamma\delta}/N_{\gamma'\delta'}. \tag{37}$$

Другими словами: если положительный корень ρ двумя способами представлен в виде суммы корней, принадлежащих системе Σ_ρ: $\alpha + \beta$, $\gamma + \delta$ соответственно, то выполняется равенство (37); *следовательно, для всех разложений подобного рода корня* ρ *частное* $N_{\alpha\beta}/N_{\alpha'\beta'}$ *имеет одно и то же значение* μ_ρ^2.

Возможность применения равенства (31) в видоизмененных обозначениях связана с тем, что ни α, ни β не равно γ, т. е. разложение $\rho = \gamma + \delta$ отлично от разложения $\rho = \alpha + \beta$ $(= \beta + \alpha)$. Если же в обоих случаях речь идет об одном и том же разложении, то равенство (37) очевидно. Из доказательства одновременно следует, что самый младший положительный корень ρ, который может быть представлен в виде суммы $\alpha + \beta$ двух лежащих между ρ' и ρ корней, допускает лишь *одно* такое разложение.

В самом деле, для двух различных разложений $\rho = \alpha + \beta = \gamma + \delta$ наш метод приводит к невозможному равенству

$$N_{\alpha\beta\rho'}N_{\gamma'\delta'\rho} = 0.$$

Если заменить e_ρ, $e_{\rho'}$ на $\mu_\rho e_\rho$, $(1/\mu_\rho)\, e_{\rho'}$ соответственно, то $N_{\alpha\beta\rho'}$ превратится в $(1/\mu_\rho)\, N_{\alpha\beta\rho'}$, $N_{\alpha'\beta'\rho}$ в $\mu_\rho N_{\alpha'\beta'\rho}$ и $N_{\alpha\beta}/N_{\alpha'\beta'}$ в 1. Так как порядок индексов не играет здесь никакого значения, то равенство (35) выполняется внутри системы Σ_{ρ^*}, непосредственно следующей по старшинству за Σ_ρ. Тем самым показано, как, поднимаясь от младших к старшим корням, можно достигнуть такой

нормировки векторов e_α, при которой всегда выполняется равенство

$$N_{\alpha\beta} = N_{\alpha'\beta'}.$$

В силу равенства (34) $N_{\alpha\beta}{}^2$ будет тогда положительным рациональным числом и поэтому само $N_{\alpha\beta}$ вещественно.

Теорема 5. *При соответствующей нормировке принадлежащих корням α базисных элементов e_α выполняются следующие равенства*:

$$h_{\alpha+\beta} = h_\alpha + h_\beta;$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha}$$

для трех корней α, β, γ, сумма которых равна 0;

$$N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta} + N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta} = 0$$

для четырех корней α, β, γ, δ, сумма которых равна 0 *и среди которых нет двух противоположных. $N_{\alpha\beta}$ вещественно и*

$$N_{-\alpha,\,-\beta} = N_{\alpha\beta}.$$

Если вместе с α и β также $\alpha + \beta$ является корнем, то $N_{\alpha\beta}$ не равно нулю.

После того как мы нормировали в § 4 параметры λ_i, а теперь параметры τ_α, *рассмотрим в группе $\mathfrak{a}$ лишь те элементы t, у которых параметры λ_i чисто мнимые, а параметры τ_α, $\tau_{-\alpha}$ для каждой пары корней α, $-\alpha$ принимают комплексно-сопряженные значения* (*аналог унитарного ограничения*). Эти t образуют некоторую инфинитезимальную *группу $\mathfrak{a}_u$*, имеющую r вещественных параметров. Действительно, в прежних обозначениях имеем

$$[s, t] = \sum_\alpha \{\alpha(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n)\cdot\tau_\alpha - \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\cdot\sigma_\alpha\} e_\alpha + \\ + \sum_\alpha \sigma_\alpha\tau_{-\alpha}h_\alpha + \sum_\rho \Big(\sum_{\alpha+\beta=\rho} N_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\tau_\beta\Big) e_\rho, \quad (38)$$

где $\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ является линейной формой от λ_i с рациональными коэффициентами; поэтому при чисто мнимых λ имеем $\bar{\alpha} = -\alpha$. Вторая сумма в правой части (38) равна

$$\sum_{\alpha>0} (\sigma_\alpha\tau_{\alpha'} - \sigma_{\alpha'}\tau_\alpha)\cdot h_\alpha.$$

Так как для всех корней ρ числа $\rho(h_\alpha) = \rho_\alpha$ рациональны, то же самое имеет место для значений параметров λ, соответствующих $h = h_\alpha$. Наконец, согласно последней лемме

$$N_{\alpha'\beta'} = \bar{N}_{\alpha\beta}.$$

Из всего этого в совокупности следует, что вместе с s, t линейному многообразию $\mathfrak{a}_u$ принадлежит также коммутатор $[s, t]$. Кроме того, форма для элементов t группы $\mathfrak{a}_u$

$$-\varphi(t) = -Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + \sum_\rho \tau_\rho\bar{\tau}_\rho,$$

являющаяся инвариантом присоединенной группы, будет положительно-определенной.

Теорема 6. *Из инфинитезимальной полупростой группы $\mathfrak{a}$ с r комплексными параметрами можно с помощью условий вещественности выделить подгруппу $\mathfrak{a}_u$ с r вещественными параметрами, присоединенная группа которой оставляет инвариантной некоторую вещественную положительно-определенную квадратичную форму.*

Тем самым заложено основание для построения теории представлений группы $\mathfrak{a}$ аналогично тому, как это было сделано в первых двух главах для специальных полупростых групп $\mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{c}^0$, $\mathfrak{d}^0$.

Приложение

Доказательство теоремы Ли. Построенное на каких-либо элементах (векторах или матрицах) $e_1, e_2, \ldots, e_g$ линейное семейство, состоящее из всех элементов вида $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_g e_g$, мы будем всегда обозначать через $(e_1, e_2, \ldots, e_g)$. В разрешимой инфинитезимальной группе $\mathfrak{H}$ линейных преобразований можно так определить базис $H_1, H_2, \ldots, H_n$, чтобы

$$(H_1, H_2, \ldots, H_{i-1}) = \mathfrak{H}_{i-1}$$

было инвариантной подгруппой в группе $\mathfrak{H}_i$. Обозначим теперь произвольную матрицу $\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_{i-1} H_{i-1}$ группы $\mathfrak{H}_{i-1}$ через H и положим $H_i = C$. Чтобы доказать теорему Ли последовательно для групп $\mathfrak{H}_0 = 0, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$, нужно показать, что если теорема верна для $\mathfrak{H}_{i-1}$, то она будет верна и для $\mathfrak{H}_i$. Итак, пусть e — отличный от 0 вектор в пространстве $\mathfrak{r}$ для которого выполняется равенство

$$He = \Lambda \cdot e$$

($\Lambda = \gamma_1 \lambda_1 + \ldots + \gamma_{i-1} \lambda_{i-1}$ — линейная форма от параметров матрицы H); вектор e нужно определить так, чтобы он удовлетворял, кроме того, и уравнению

$$Ce = \gamma \cdot e.$$

Образуем

$$e_0 = e,\ Ce_0 = e_1,\ Ce_1 = e_2, \ldots$$

Среди этих векторов пусть e_g будет первым, который линейно зависит от предыдущих. Имеем

$$f(C)\, e = 0, \tag{*}$$

где

$$f(\zeta) = \zeta^g + \beta_1 \zeta^{g-1} + \ldots + \beta_g$$

— многочлен степени g.

Вместе с H группе $\mathfrak{H}_{i-1}$ принадлежит и матрица $H' = [H, C]$. Значение формы Λ для матрицы H' обозначим через Λ'. Получаем тогда

$$He_0 = \Lambda \cdot e_0, \qquad [0]$$

$$He_1 = HCe_0 = H'e_0 + CHe_0$$

и отсюда с помощью равенства [0], примененного к H и H':

$$He_1 = \Lambda' e_0 + \Lambda \cdot e_1; \quad [1]$$
$$He_2 = HCe_1 = H'e_1 + CHe_1,$$

а отсюда с помощью равенства [1], примененного к H и H',

$$He_2 = (\Lambda'' e_0 + \Lambda' e_1) + (\Lambda' e_1 + \Lambda e_2) = \Lambda'' e_0 + 2\Lambda' e_1 + \Lambda e_2. \quad [2]$$

. . . .

Линейное векторное многообразие $\mathfrak{e} = (e_0, e_1, \ldots, e_{g-1})$ инвариантно как относительно каждого H, так и относительно C. След матрицы H в этом многообразии равен $g \cdot \Lambda$, а поэтому след H' равен $g \cdot \Lambda'$. Но H' составлено из двух отображений этого многообразия H и C согласно формуле $H' = HC - CH$. Поэтому след матрицы H' равен нулю, и мы получаем $\Lambda' = 0$,

$$He_i = \Lambda \cdot e_i \quad (i = 0, 1, \ldots, g-1). \quad (**)$$

Если γ — какой-либо корень многочлена $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = (\zeta - \gamma) f^*(\zeta),$$

то отличный от нуля вектор $f^*(C)$ согласно (*) и (**) обладает нужными свойствами.

Доказательство теоремы Энгеля. Построим идущую *снизу* цепочку

$$\mathfrak{h}_0 = 0, \quad \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_n = \mathfrak{h},$$

в которой каждый член $\mathfrak{h}_{i-1}$ является инвариантной подгруппой следующего за ним члена $\mathfrak{h}_i$ и число параметров возрастает от члена к члену на единицу. Таким образом, нужно показать: если $\mathfrak{h}_{i-1}$ — разрешимая подгруппа группы $\mathfrak{h}$, то можно найти такой элемент e, что: 1) $(\mathfrak{h}_{i-1}, e) = \mathfrak{h}_i$ снова является подгруппой и 2) для каждого элемента h группы $\mathfrak{h}_{i-1}$ произведение $[e, h]$ опять принадлежит $\mathfrak{h}_{i-1}$. Часть 1) получается применением теоремы Ли к группе линейных преобразований $dx = [h, x]$, где x пробегает векторное пространство $\mathfrak{h}$ по модулю $\mathfrak{h}_{i-1}$. Действительно, при отображении, соответствующем произвольному элементу h группы $\mathfrak{h}_{i-1}$, два сравнимые по модулю $\mathfrak{h}_{i-1}$ вектора x переходят в векторы dx, сравнимые по модулю $\mathfrak{h}_{i-1}$. Так как эта гомоморфная $\mathfrak{h}_{i-1}$ группа преобразований по предложению разрешима, то существует элемент $e \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{h}_{i-1}}$, для которого

$$[h, e] = \gamma \cdot e \pmod{\mathfrak{h}_{i-1}},$$

где γ является линейной формой от параметров h. В таком случае $(\mathfrak{h}_{i-1}, e) = \mathfrak{h}_i$ действительно будет группой. Характеристический многочлен для h внутри $\mathfrak{h}_i$, а поэтому также внутри $\mathfrak{h}$, $f(\zeta; h)$, содержит множитель $(\zeta - \gamma)$. Воспользовавшись теперь предположением $f(\zeta; h) = \zeta^n$, получим $\gamma = 0$, чем и устанавливается справедливость утверждения 2).

Глава IV

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВСЕХ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП

§ 1. Отдельный элемент группы

Пусть $\mathfrak{a}^0$ обозначает инфинитезимальную полупростую r-параметрическую группу, а $\mathfrak{a}_u{}^0$ — ту инфинитезимальную группу, которая получается из $\mathfrak{a}^0$ с помощью «унитарного ограничения», описанного в конце предыдущей главы. Инфинитезимальные преобразования $dx = [a, x]$, соответствующие элементам a этих групп, порождают непрерывные группы линейных преобразований $\mathfrak{a}$ и $\tilde{\mathfrak{a}}_u$. Так как согласно теореме 6 главы III группе $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ соответствует инвариантная определенная квадратичная форма, то $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ является *компактом*. Инфинитезимальный элемент $h = h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ присоединенной группы придает произвольному элементу

$$x = h(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n) + \sum_{\alpha} \tau_\alpha e_\alpha$$

из $\mathfrak{a}^0$ с «главными» параметрами $\varkappa_i$ и «побочными» параметрами τ_α некоторое приращение $dx = [h, x]$, задаваемое по формулам

$$d\varkappa_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad d\tau_\alpha = \alpha \cdot \tau_\alpha.$$

Получающееся отсюда с помощью итерации конечное преобразование (ε) группы $\tilde{\mathfrak{a}}$:

$$x' = (\varepsilon)\, x\, (\varepsilon)^{-1}, \tag{1}$$

которое естественно обозначить через e^h, в выражении через параметры имеет вид

$$\varkappa_i' = \varkappa_i, \ \tau_\alpha' = e^\alpha \cdot \tau_\alpha. \tag{2}$$

«Главные» элементы (ε) образуют n-параметрическую абелеву подгруппу в $\tilde{\mathfrak{a}}$. Если (ε) принадлежит $\tilde{\mathfrak{a}}_u$, то параметры λ_i будут чисто мнимыми; в таком случае мы пишем $\lambda_i = 2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_i$ и $2\pi\sqrt{-1}\,\alpha$ вместо α. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Каждый элемент t группы $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ может быть представлен в виде*

$$t = u^{-1}(\varepsilon)\, u, \tag{3}$$

где u, как и главный элемент (ε), также принадлежит $\tilde{\mathfrak{a}}_u$.

В частных случаях, рассмотренных в главах I и II, эта теорема совпадала с известными алгебраическими фактами. Здесь мы установим эту теорему в общем виде с помощью соображений о непрерывности, опираясь на те самые вычисления, которыми мы раньше уже пользовались для определения объема.

А именно, будем переходить от элемента t, представленного в виде (3), к бесконечно близкому элементу $t + dt$ и попытаемся так варьировать (ε) и u, чтобы сохранялось равенство (3). Отклонение инфинитезимального элемента $(t + dt)\,t^{-1}$ от единичного обозначим через δt; аналогично положим $du \cdot u^{-1} = \delta u$.

Соответствующим образом переносятся сюда понятия, введенные в главе I, § 6. Аналогично установленному там равенству (25) получаем:

$$u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = h\,(2\pi i d\varphi_1, \ldots, 2\pi d\varphi_n) + \{(\varepsilon)\,\delta u\,(\varepsilon)^{-1} - \delta u\}. \qquad (4)$$

Если δu_α — побочные параметры для δu, то главные и побочные параметры для $u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$ будут, таким образом, равны

$$2\pi\sqrt{-1}d\varphi_i,\ (e\,(\alpha) - 1)\,\delta u_\alpha \qquad (5)$$

соответственно. При заданном приращении dt отсюда однозначно определяются 1) изменения «углов» φ_i элемента t или изменение главного элемента (ε) и 2) δu и вместе с ним вариации параметров элемента u, если мы примем главные параметры для δu равными нулю, т. е. положим, что переход от u к $u + du$ должен совершаться «перпендикулярно» к «прямой» $[u]$. При этом только следует предположить, что (ε) *не сингулярно*, т. е. что ни для одного из корней α выражение $e\,(\alpha)$ не равно 1 и никакой из $r - n$ корневых углов α не дает полного оборота.

Пусть u пробегает все многообразие $\mathfrak{a}_u$ или, соответственно, многообразие $[\mathfrak{a}_u]$, имеющее на n единиц меньшую размерность, чем $\mathfrak{a}_u$, и получающееся из последнего с помощью «проектирования», т. е. многообразие, элементами которого являются «прямые» в $\mathfrak{a}_u$, а (ε) пусть пробегает все несингулярные главные элементы на $\mathfrak{a}_u$. При этих обстоятельствах $t = u^{-1}\,(\varepsilon)\,u$ опишет некоторую *область* $\mathfrak{T}$ на $\mathfrak{a}_u$. В самом деле, согласно нашему подсчету функциональный определитель не обращается в нуль, и поэтому многообразие $\mathfrak{T}$ вместе с t всегда содержит в себе и некоторую окрестность этого элемента. В силу компактности $\mathfrak{a}_u$, где варьируются u и (ε), каждый граничный элемент t_0 области $\mathfrak{T}$ также представим в виде (3), но только здесь по крайней мере одно из $e\,(\alpha)$ будет равно 1. *Сингулярные элементы* t, которые получаются из (3), когда u пробегает все $\mathfrak{a}_u$, а (ε) — только те главные элементы, для которых один из корней $\alpha = 0$, образуют некоторый континуум $\mathfrak{t}$. Как уже выяснено, $\mathfrak{T}$ является одной из областей, определяемой континуумом $\mathfrak{t}$ на $\mathfrak{a}_u$. Доказательство теоремы 1 будет завершено, если мы установим, что континуум $\mathfrak{t}$ имеет на *три* единицы меньшую размерность, чем $\mathfrak{a}_u$, и потому t не разбивает многообразия $\mathfrak{a}_u$.

Если (ε) — некоторый сингулярный главный элемент, для которого корень $\alpha = 0$, то можно, не меняя t, u в (3) заменить на любой элемент вида $s \cdot u$, где s пробегает $(n + 2)$-параметрическую группу $\mathfrak{s}$, инфинитезимальные элементы которой линейно выражаются через главные элементы h и e_α, $e_{-\alpha}$. Действительно, согласно равенствам (2) инфинитезимальный элемент s^0 группы $\mathfrak{s}$ совпадает с $(\varepsilon)\,s^0\,(\varepsilon)^{-1}$; перестановочность же с (ε) переносится с инфинитезимальных элементов на все элементы группы. Таким образом, при каком-либо фиксированном (ε) элементы вида $u^{-1}\,(\varepsilon)\,u$ образуют лишь $(r - n - 2)$-мерное многообразие, а сами главные сингулярные элементы — $(n - 1)$-мерное многообразие.

Согласно (3), $r - n$ величин $e\,(\alpha)$ вместе с n-кратной единицей являются характеристическими числами, мультипликаторами линейного преобразования t группы $\mathfrak{a}_u$ (или $\mathfrak{a}$), а поэтому числа $e\,(\alpha)$ с точностью до порядка однозначно определяются элементом t.

При желании провести аналогичные рассуждения для всей группы $\mathfrak{a}$, а не только для унитарно ограниченной $\mathfrak{a}_u$, следует исключить как сингулярные те

преобразования t, которые имеют не только n, но и $n+1$ характеристических чисел, равных 1. Эти сингулярные элементы образуют континуум $\mathfrak{t}$, имеющий на одну единицу меньше *комплексную* размерность, чем $\tilde{\mathfrak{a}}$. Следовательно, $\mathfrak{t}$ не разбивает $\tilde{\mathfrak{a}}$, и аналогично предыдущему здесь определяется область $\mathfrak{T}$, граничные точки которой принадлежат континууму $\mathfrak{t}$. Поэтому и здесь оказывается, что каждый несингулярный элемент t из $\tilde{\mathfrak{a}}$ представляется в виде (3) с помощью некоторого u и некоторого главного элемента (ε) группы $\tilde{\mathfrak{a}}$. Однако это представление не распространяется на принадлежащие $\mathfrak{t}$ сингулярные элементы, так как в противном случае $\mathfrak{t}$ имело бы не на 1, а на 3 меньшую комплексную размерность, чем $\tilde{\mathfrak{a}}$. В этом месте появляются осложнения, подобные тем, которые известны из теории элементарных делителей.

Исходным пунктом построения полупростой группы в § 1 предыдущей главы было то, что произвольный несингулярный (инфинитезимальный) элемент принимался за главный элемент. Теперь мы понимаем, почему результаты не зависят от того, на какой несингулярный элемент t_0 упал наш выбор. Действительно, так как каждое t_0 можно всегда получить из главного элемента преобразованием вида (3) с помощью некоторого u из $\tilde{\mathfrak{a}}$, то другой выбор t_0 сводится к тому, что все элементы группы преобразуются с помощью некоторого фиксированного u, т. е. элементы x инфинитезимальной группы $\mathfrak{a}^0$ подвергаются некоторому автоморфизму $x' = u^{-1}xu$.

§ 2. Топология. Определение объема. Полная приводимость

Хотя в предыдущих параграфах речь шла о чисто структурных вопросах, в основу наших рассмотрений мы положили присоединенную группу. Это было сделано для того, чтобы рассматриваемая группа была вполне определена в отношении своей связности. Группа $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ не обязательно односвязна, однако мы утверждаем, что имеет место

Теорема 2. *Некоторое конечнолистное накрытие группы $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ односвязно.*

Эту универсальную накрывающую группу $\mathfrak{a}_u$ и следует рассматривать как ту истинную абстрактную группу [51], представление которой линейными преобразованиями является нашей задачей. Каждое представление инфинитезимальной группы $\mathfrak{a}^0$ дает *однозначное* представление группы $\mathfrak{a}_u$.

Пусть элемент t описывает на $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ какую-либо замкнутую кривую $\mathfrak{K}$, которая не пересекает $(r-3)$-параметрического континуума $\mathfrak{t}$ сингулярных элементов. Будем следить за непрерывным изменением углов φ_i элемента t при пробегании им кривой $\mathfrak{K}$ и за связанным с этим изменением корней

$$\alpha = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_n\varphi_n$$

и величин $e(\alpha)$. Я утверждаю: если все $e(\alpha)$ возвращаются к своим первоначальным значениям, то кривую $\mathfrak{K}$ на $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ можно непрерывно стянуть в единичную точку. В самом деле, если $e(\alpha)$ возвращаются к своим первоначальным значениям, то то же самое будет верным и для самих корней α, так как $e(\alpha)$ нигде не проходит через значение 1, α никогда не становится равным полному обороту. В формуле (3) как u, так и состоящая из n единиц и величин $e(\alpha)$ диагональная матрица (ε) непрерывно зависят от параметра кривой. Требуемую деформацию

мы производим так, что u не зависит от параметра деформации σ, в то время как φ_i заменяются на $\sigma \cdot \varphi_i$; σ непрерывно убывает от 1 до 0 [1].

Так как при продолжении вдоль замкнутой кривой $\mathfrak{K}$ на $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ величины $e(\alpha)$ могут испытывать только некоторую перестановку, то тем самым теорема доказана; односвязное накрытие может иметь самое большее $(r-n)!$ листов.

Так как $\mathfrak{a}_u$ компактна, то основная теорема § 1 имеет место как для $\mathfrak{a}_u$, так и для $\tilde{\mathfrak{a}}_u$.

Объем $d\Omega$ той части $\mathfrak{a}_u$, элементы которой t имеют углы φ_i, попадающие в интервалы $(\varphi_i, \varphi_i + d\varphi_i)$, вычисляется на основании формул (4), (5). Измерение объемов на многообразии $[\mathfrak{a}_u]$, которое получается из $\mathfrak{a}_u$ «проектированием», возможно в силу того, что переход от произвольного элемента δu инфинитезимальной группы $\mathfrak{a}^0$ к

$$\delta u' = (\varepsilon)\, \delta u\, (\varepsilon)^{-1},$$

где главное преобразование (ε) принадлежит $\tilde{\mathfrak{a}}_u$, не изменяет объемов. Действительно, при таком переходе побочные параметры δu_α элемента δu умножаются на $e(\alpha)$; а так как корни α попарно взаимно противоположны, то произведение этих множителей равно 1. Согласно замечанию, сделанному в § 3 главы II, этого факта достаточно для того, чтобы сделать вывод об унимодулярности перехода

$$\delta t \rightarrow u \cdot \delta t \cdot u^{-1}.$$

Таким образом, мы получаем, опуская при этом постоянный не зависящий от углов φ_i множитель, что

$$d\Omega = \prod_\alpha (e(\alpha) - 1)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n$$

или

$$d\Omega = \Delta\bar{\Delta}\, d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_n, \tag{6}$$

$$\Delta = \prod_\alpha^+ s(\alpha/2). \tag{7}$$

Последнее произведение распространяется лишь на *положительные* корни [2].

Два следующие результата:

1) $\mathfrak{a}_u$ компактна;

2) линейная форма от главных и побочных параметров λ_i, τ_α произвольного элемента из $\mathfrak{a}^0$ равна нулю тождественно, если она равна нулю при унитарном ограничении

$$\lambda_i \text{ чисто мнимое, } \tau_{-\alpha} = \bar{\tau}_\alpha, \tag{8}$$

уже известным путем приводят к такой теореме:

[1] Если за начальную точку обхода замкнутой кривой $\mathfrak{K}$ мы выберем некоторый главный элемент t_0, у которого $e(\alpha)$ не только отличны от 1, но все различны между собой, и если за исходное значение для u взята единичная матрица, то после обхода кривой $\mathfrak{K}$ конечное значение матрицы u будет перестановочно с t_0; следовательно, это конечное значение матрицы u распадается на один n-строчный квадрат и $r-n$ однострочных квадратов, расположенных по главной диагонали. В силу этого при описанной деформации $\mathfrak{K}$ остается *замкнутой* кривой. Аналогичное замечание следовало бы сделать уже при топологическом исследовании группы вращений в главе II.

[2] Через $s(\alpha)$ обозначено $e(\alpha) - e(-\alpha)$.— *Примеч. пер.*

Теорема 3. *Каждое представление группы $\mathfrak{a}^0$ при помощи линейных преобразований однозначным образом разлагается на неприводимые представления.*

§ 3. Нахождение размерности и характера неприводимого представления с заданным старшим весом

Пусть главные параметры λ_i выбраны так (этим они определяются с точностью до целочисленного унимодулярного преобразования), что линейная форма Θ от них в том и только в том случае имеет целые коэффициенты, когда $2\Theta_\alpha/\alpha_\alpha$ для всякого корня α будет целым числом («целочисленная форма», глава III, § 4). Сами корни α являются целочисленными формами. Будем называть линейные формы от λ_i, которые получаются из одной из них (Λ) при помощи подстановок S конечной группы (S) (глава III, § 4), *эквивалентными* форме Λ. Еще в предыдущей главе был получен следующий результат:

Теорема 4. *Веса, встречающиеся в неприводимом представлении для $\mathfrak{a}^0$, суть целочисленные формы. Если какая-либо форма является весом, то все эквивалентные ей формы также являются весами и притом той же кратности. Старший вес поэтому является целочисленной линейной формой, которую не превосходит никакая эквивалентная ей форма. Не существует двух неэквивалентных неприводимых представлений с одним и тем же старшим весом.*

Последнее утверждение доказывается по Картану так же, как в главе I § 3.

При ограничении на $\mathfrak{a}_u$ мы заменяем параметры λ_i на угловые переменные φ_i ($\lambda_i = 2\pi\sqrt{-1}\varphi_i$). Если

$$\Lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n$$

пробегает все имеющиеся веса с подходящими кратностями, то соответствующим представлению *примитивным характером* будет

$$\chi = \sum_\Lambda e^\Lambda = \sum e(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n).$$

Конечный ряд Фурье χ инвариантен относительно подстановок группы (S). Согласно И. Шуру при использовании интегрального элемента (6) имеем

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi(\varphi)\,\chi(-\varphi)\,d\Omega = 1 \quad \text{с} \quad \Omega = \int d\Omega \tag{9}$$

и для характеров χ, χ' двух неэквивалентных неприводимых представлений

$$\int \chi(\varphi)\,\chi'(-\varphi)\,d\Omega = 0. \tag{10}$$

Чтобы на основании этих соотношений ортогональности вычислить характеры, целесообразно ввести произведение

$$\chi\cdot\Delta = \xi. \tag{11}$$

Это конечный ряд Фурье, который относительно группы (S) ведет себя не симметрично, как χ, а *альтернированно*.

Прежде всего отметим, что Δ — *ряд Фурье*, т. е. конечная линейная комбинация членов вида e (Φ), где Φ обозначает *целочисленную* линейную форму уг-

лов поворота φ_i. Чтобы убедиться в этом, мы должны показать, что не только сумма $\Sigma^+\rho$ положительных корней, но уже половина от нее является целочисленной формой

$$\Phi^0 = r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + \ldots + r_n\varphi_n,$$

или что для каждого корня α

$$\sum_{\rho}{}^{+} \frac{\rho_\alpha}{\alpha_\alpha} \tag{12}$$

будет целым числом. Докажем это. Каждому положительному корню ρ соответствует получающийся из него при помощи подстановки S_α корень

$$\rho' = \rho - \frac{2\rho_\alpha}{\alpha_\alpha}\alpha \quad \text{с} \quad \rho_\alpha' = -\rho_\alpha.$$

Та же подстановка превращает ρ' в ρ. В (12) помимо ρ входит корень $\tilde\rho = +\rho'$ или $-\rho'$ соответственно тому, будет ли ρ' положительным или отрицательным. *В первом случае* вклад пары ρ, $\tilde\rho$ в сумму (12) нулевой. Если в виде исключения $\tilde\rho$, т. е. $\rho' = \rho$, так что $\rho_\alpha = 0$, то верно то же самое; вклад *одного* корня ρ тогда тоже равен 0. Во втором случае, если предположить $\tilde\rho \neq \rho$, вкладом пары корней ρ, $\tilde\rho$ будет целое число

$$\rho_\alpha/\alpha_\alpha + \tilde\rho_\alpha/\alpha_\alpha = 2\rho_\alpha/\alpha_\alpha.$$

$\tilde\rho$ может здесь лишь в том случае равен ρ, когда ρ кратен α, а следовательно [3], $\rho = \pm\alpha$; вклад этого члена в сумму (12) ± 1.

Δ не только является рядом Фурье, но переходит при подстановке S_α в $-\Delta$. Корень α можно предположить положительным. В произведении (7) один из множителей $s(\alpha/2)$ при действии S_α превращается в $s(-\alpha/2) = -s(\alpha/2)$. Если $\rho \neq \alpha$ и ρ' отрицательный, то положительная пара ρ, $\tilde\rho$ дает в произведении вклад $s(\rho/2)\, s(-\rho'/2)$, что при действии S_α переходит в $s(\rho'/2)\, s(-\rho/2)$, т. е. остается неизменным. Напротив, если ρ' положительный, то такой вклад равен

$$s\left(\frac{\rho}{2}\right) s\left(\frac{\rho'}{2}\right), \quad \text{соответственно} \quad s\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

в зависимости от того, будет ли $\rho \neq \rho'$ или $\rho = \rho'$; он опять инвариантен относительно S_α.

Подстановка группы (S) называется *четной* или *нечетной* в зависимости от того, переводит ли она Δ в $+\Delta$ или в $-\Delta$. Произведение четного числа образующих S_α четно, произведение нечетного их числа нечетно. Вместе с Δ также (11)

---

[3] Ибо кроме $\pm\alpha$ никакая другая кратность $c\alpha$ для α не может быть тоже корнем. Действительно, в противном случае выписываем тот α-ряд корней, которому принадлежит $c\alpha$:

$$\ldots, (c-1)\alpha, \ c\alpha, \ (c+1)\alpha, \ldots \tag{*}$$

Известное рассуждение приводит к тому, что центр тяжести числового ряда $\ldots, c-1, c, c+1, \ldots$ лежит в нулевой точке. Таким образом, c — либо целое число, либо полуцелое. То, что исключается первый случай, показано в главе III, теорема 4. Если c полуцелое, то в ряд (*) входит $\alpha/2$. Но это невозможно, так как вместе с $\alpha/2$ тогда корнем был бы также $\alpha = 2\cdot\alpha/2$.

будет *альтернированным рядом Фурье*, т. е. таким, который при четных подстановках группы (S) остается неизменным, а при нечетных меняет свой знак. Каждый альтернированный ряд Фурье является некоторой линейной комбинацией *элементарных сумм*

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \sum_S \pm e(\Phi S); \quad \Phi = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n. \tag{13}$$

Здесь Φ обозначает какую-либо целочисленную форму, расположенную выше всех эквивалентных ей форм [61]. (Они в таком случае все отличны друг от друга.) Сумма альтернированно распространяется на все подстановки S группы (S).

Каждый альтернированный ряд Фурье, в частности каждая элементарная сумма $\xi(l)$, делится на Δ в том смысле, что частное опять будет конечным — относительно (S) симметрическим — рядом Фурье. Доказательство основывается на следующей лемме:

Лемма. *Ряд Фурье в том и только в том случае делится на* $e(\alpha) - 1$, *когда он обращается в нуль при всех значениях аргументов* φ_i, *которые превращают* α *в полный угол.*

Каждый член $e(\Phi)$ ряда Фурье η при подстановке S_α приобретает множитель $e(g\alpha)$, $g = -2\Phi_\alpha/\alpha_\alpha$ равно целому числу. Таким образом, $\eta S_\alpha = \eta$, если α — полный угол поворота. Кроме того, если η альтернированный, то при всех аргументах имеем $\eta S_\alpha = -\eta$. Следовательно, в этом случае для всех значений аргументов, превращающих α в полный угол, должно быть $\eta = 0$. Согласно лемме можно поэтому положить

$$\eta = (e(\alpha) - 1)\,\eta^*, \qquad \eta^* = \text{ряду Фурье}.$$

Если β — другой, отличный от α, корень, то в силу того, что плоскости $\beta = 0$ и $\alpha = 0$ в n-мерном пространстве угловых переменных φ_i не совпадают, η^* вместе с η обращается в нуль на всех плоскостях β = целому числу. Поэтому η^* имеет делителем $e(\beta) - 1$. В результате оказывается, что η делится на произведение

$$\prod_\alpha^+ (e(\alpha) - 1) \quad \text{и тем самым на } \Delta.$$

В лемме α обозначает какую-либо целочисленную форму. Если g — общий наибольший делитель ее коэффициентов, то можно предположить, что $\varphi_1 = \alpha/g$, так как этого всегда можно добиться с помощью унимодулярного преобразования. η является многочленом [4] от $z = e(\varphi_1)$, коэффициенты которого будут рядами Фурье от аргументов $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$. По предположению этот многочлен обращается в нуль при значениях z, равных корням степени g из единицы, которые удовлетворяют уравнению $z^g = 1$, и имеет поэтому делителем $z^g - 1$, или $e(\alpha) - 1$.

Таким образом, для каждой элементарной суммы (13) можно построить симметрический относительно (S) ряд Фурье

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_m)/\Delta = \chi(m_1, m_2, \ldots, m_n). \tag{14}$$

---

[4] В несколько обобщенном смысле: линейная комбинация конечного числа целочисленных не обязательно положительных степеней от z.

Так как $e(\Phi)$,

$$\Phi = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n, \qquad (15)$$

— старший член в $\xi(l)$ и $e(\Phi^0)$,

$$\Phi^0 = r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + \ldots + r_n\varphi_n,$$

— старший член в Δ, то старший член $e(\Psi)$,

$$\Psi = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n, \qquad (16)$$

для $\chi(m)$ задается в виде

$$\Psi = \Phi - \Phi^0, \qquad m_i = l_i - r_i.$$

Так как $\chi(m)$ симметрично, то Ψ не может быть расположена ниже, чем какие-либо эквивалентные формы ΨS.

Для произвольной линейной формы Θ сумма всех ΘS равна 0. Действительно, эта сумма является линейной формой $\boldsymbol{H}$, которая инвариантна относительно всех подстановок S_α, т. е. при каждом корне α выполняется равенство $\boldsymbol{H}_\alpha = 0$. Поэтому согласно проведенному в § 4 предыдущей главы доказательству в самом деле $\boldsymbol{H} = 0$. Таким образом, если Θ не превосходит по высоте никакую из эквивалентных ей форму ΘS, то Θ обязательно либо равна 0, либо положительна.

Следовательно, форма (16) не отрицательна. Если упорядочить различные ряды Фурье по высоте их высших членов, то никакая элементарная сумма $\xi(l)$ не будет, таким образом, ниже, чем Δ. Но Δ как альтернированный ряд Фурье равен $\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ плюс более низкие элементарные суммы. Так как таких более низких элементарных сумм не существует, то оказывается, что Δ сама должна быть этой элементарной суммой,

$$\Delta = \xi(r_1, r_2, \ldots, r_n).$$

Наоборот, если (16) — заданная целочисленная форма, которую не превосходит по высоте никакая эквивалентная ей форма, то $\Phi = \Psi + \Phi^0$ будет выше, чем все прочие эквивалентные ей формы. Поэтому с помощью (14) можно построить такую $\chi(m)$, высший член которой совпадает с заданным $e(\Psi)$.

Для произведения двух различных элементарных сумм получаем *соотношение ортогональности*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)\, \bar{\xi}(l_1', l_2', \ldots, l_n')\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n = 0. \qquad (17)$$

Действительно, в любом члене произведения

$$e(\Phi S)\cdot e(-\Phi' S') = e(\Phi S - \Phi' S')$$

целочисленная форма $\Phi S - \Phi' S' \neq 0$, так как какая-либо ΦS не может совпадать с какой-либо $\Phi' S'$ без того, чтобы *вся* совокупность эквивалентных форм ΦS совпадала со всей совокупностью $\Phi' S$ и поэтому также чтобы в них совпада-

ли высшие формы Φ, Φ'. Подобно этому значением интеграла

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \xi(l_1, l_2, \ldots, l_k)\, \bar{\xi}(l_1, l_2, \ldots, l_n)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n \tag{18}$$

оказывается порядок группы (S).

Применяя последнее равенство, в частности, к низшей элементарной сумме, $l_i = r_i$, получаем, что полный объем $\Omega = \int d\Omega$ совпадает с этим порядком. Поэтому можно вместо (18) написать также

$$\frac{1}{\Omega} \int \chi(m)\, \bar{\chi}(m)\, d\Omega = 1, \tag{19}$$

в то время как (17) равнозначно равенству

$$\int \chi(m)\, \bar{\chi}(m')\, d\Omega = 0 \quad (m \neq m'): \tag{20}$$

величины $\chi(m)$ удовлетворяют тем же самым соотношениям ортогональности, которые имеют место согласно (9), (10) для характеров неприводимых представлений.

Исходя отсюда, нужно доказать, что эти примитивные характеры совпадают с $\chi(m)$. «Возможным старшим весом» является каждая целочисленная линейная форма (16), которую не превосходит никакая эквивалентная ей форма. Если (16) есть старший вес примитивного характера χ, то альтернированный ряд Фурье $\xi = \chi \cdot \Delta$ аддитивно составлен из элементарных сумм (13), высшие из которых соответствуют числам $l_i = m_i + r_i$. Следовательно, выполняется равенство

$$\chi = c\chi(m) + c'\chi(m') + \ldots, \tag{21}$$

где первый коэффициент $c \neq 0$ и следующие члены $\chi(m'), \ldots$ расположены ниже, чем $\chi(m)$. В рассмотренных ранее особых случаях из соотношений ортогональности (9), (10) и соответствующих соотношений для величин $\chi(m)$ с помощью индуктивного перехода от низших весов к старшим при данной ситуации был сделан вывод о том, что $\chi = \chi(m)$; при этом используется установленный Э. Картаном результат о том, что каждому возможному старшему весу действительно соответствует неприводимое представление. Тем самым нахождение характера *одного* неприводимого представления оказывается связанным с существованием и некоторым исследованием *всех*. Более непосредственно мы приходим к цели на основании арифметического замечания о том, что коэффициенты $c, c', \ldots$ в (21) суть целые числа. Действительно, ряд Фурье ξ имеет целочисленные коэффициенты, как и каждая элементарная сумма $\xi(l)$. Кроме того, коэффициент старшего члена в $\xi(l)$ равен 1. Отсюда и получаем последовательно целочисленность чисел $c, c', \ldots$ Но соотношение (9), если воспользоваться соотношениями ортогональности для $\chi(m)$, приводит к равенству

$$1 = c^2 + c'^2 + \ldots.$$

Поэтому должно быть

$$c = \pm 1, \; c' = 0, \ldots.$$

Так как все коэффициенты в χ, в частности при высшем члене, являются положительными целыми числами, то необходимо $c = +1$, $\chi = \chi(m)$. Тем самым снова доказана теорема Картана о том, что старший вес в неприводимом представлении имеет кратность 1 и что может существовать лишь *одно* неприводимое представление с заданным старшим весом. Действительно, коэффициент старшего члена в $\chi(m)$ есть 1; и если бы имелось два неэквивалентных неприводимых представления со старшим весом (16), то в силу нашего результата их характеры χ и χ' должны были бы оба равны $\chi(m)$, что противоречило бы соотношению (10) (или теореме Бернсайда).

Из формулы для характеров $\chi = \chi(m)$ получаем выражение для *размерности*, беря все углы поворота $\varphi_i = 0$. Это вычисление мы проведем следующим образом. В главе III, § 4, мы познакомились с положительно-определенной, инвариантной относительно подстановок группы (S) квадратичной формой

$$G(x) = \sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k \qquad (g_{ki} = g_{ik})$$

на совокупности произвольных линейных форм $x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_n\varphi_n$. Одновременно с ней была введена обратная форма

$$Q(\varphi) = \sum_{i,k} q_{ik} \varphi_i \varphi_k \qquad \left(= \sum_{\rho} \rho^2\right).$$

Мы полагаем вообще

$$x_i' = \sum_k g_{ik} x_k, \qquad x_i = \sum_k q_{ik} x_k'$$

и при использовании одной-единственной переменной φ в $\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ производим подстановку $\varphi_i - r_i'\varphi$. Старшим членом в $\xi(l)$ будет тогда

$$e\left(\varphi \sum_i l_i r_i'\right) = e\left(\varphi \sum_{i,k} q_{ik} r_i' l_k'\right).$$

В силу инвариантного характера формы Q

$$\sum_{i,k} q_{ik} r_i' l_k'$$

при действии принадлежащего (S) преобразования S на величины r_i' получает то же самое выражение, что и при действии обратного преобразования S^{-1} на l_i'. Поэтому альтернированная сумма

$$\sum_S \pm e\left(\varphi \sum_{i,k} q_{ik} r_i' l_k'\right) S$$

будет иметь одинаковые значения, применять ли операции S к величинам r_i' или к величинам l_i'. Другими словами, элементарная сумма $\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ переходит при подстановке $\varphi_i = r_i'\varphi$ в ту же самую функцию от φ, что и $\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ при подстановке $\varphi_i = l_i'\varphi$. Но так как

$$\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \prod_{\alpha}^{+} s\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

при $\varphi_i = r_i'\varphi$ получаем:

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \prod_\alpha^+ s\left(\frac{\varphi}{2} G(l, a)\right),$$

где произведение справа распространяется на все системы целых чисел $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$, которым соответствуют положительные корни

$$\alpha = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n.$$

При бесконечно малых $\varphi_i = r_i'\varphi$ имеем поэтому

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) \sim (2\pi i\varphi)^{\frac{r-n}{2}} \cdot \prod_\alpha^+ G(l, a).$$

Отсюда в качестве значения для

$$\chi(m) = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)}$$

при обращающихся в нуль углах поворота φ_i получаем

$$N_m = \frac{\prod_\alpha^+ G(l, a)}{\prod_\alpha G(r, a)}.$$

Теорема 5. *Характером неприводимого представления со старшим весом*

$$m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n$$

является

$$\chi = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\Delta} = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)}.$$

$\xi(l)$ *обозначает распространенную альтернированно по всем подстановкам S группы (S) элементарную сумму*

$$\sum_S \pm e(\Phi S), \qquad \Phi = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n.$$

$\Delta = \xi(r)$ — *низшая из этих элементарных сумм,*

$$\Phi^0 = r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + \ldots + r_n\varphi_n$$

(равная полусумме всех положительных корней) — низшая целочисленная форма, которая расположена выше всех эквивалентных ей форм. Целые числа l_i следует взять равными $m_i + r_i$. Размерность такого представления есть

$$N = \prod_\alpha \frac{G(l, a)}{G(r, a)} = \prod_\alpha \frac{\Phi_\alpha}{\Phi_\alpha^0},$$

где произведение берется по всем корням

$$\alpha = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n$$

таким образом, что каждая пара противоположных корней α, $-\alpha$ входит лишь в один множитель.

§ 4. О построении всех неприводимых представлений

Мы докажем, наконец, следующую теорему:

Теорема 6. *Каждой целочисленной линейной форме Ψ, которую не превосходит никакая эквивалентная ей форма, соответствует некоторое неприводимое представление, старший вес которого есть Ψ.*

Эта теорема была доказана уже Э. Картаном [5]. Но его конструкция основана на явном перечислении всех простых групп и должна проводиться для каждой группы отдельно. В каждом из случаев он показывает, что среди возможных старших весов можно задать такие n: $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$, из которых каждый получается линейно с помощью целых, неотрицательных коэффициентов p_i:

$$p_1\Psi_1 + p_2\Psi_2 + \ldots + p_n\Psi_n \quad (p_i \geqslant 0). \tag{22}$$

Ему удается разыскать такие неприводимые представления, которые соответствуют этим старшим весам $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$. Как мы знаем, отсюда с помощью композиции получается представление со старшим весом (22), а из него уже отщепляется неприводимое представление с тем же самым старшим весом. Таким образом, метод Э. Картана сводится к прямой алгебраической конструкции; представления получаются из упомянутых выше с помощью композиции. Полупростые группы составляются из простых.

Можно выбрать другой путь, состоящий в том, чтобы воспользоваться известными с самого начала представлениями. В качестве исходной точки напрашивается следующее: опять рассмотреть присоединенную группу $\tilde{\mathfrak{a}}$ и с помощью редукции этого представления и его степеней построить неприводимые представления. В более общем виде вместо степеней можно применить любое представление полной линейной группы $\mathfrak{g}_{(r)}$ размерности r, ибо такое представление всегда естественно задает также представление содержащейся в $\mathfrak{g}_{(r)}$ подгруппы $\tilde{\mathfrak{a}}$. Но таким способом получаются лишь те неприводимые представления, которые однозначны на $\tilde{\mathfrak{a}}$.

Правильная исходная идея состоит, однако, в рассмотрении не присоединенной группы, а так называемого *регулярного представления*, которое было применено Фробениусом в теории конечных групп с аналогичной целью. С помощью редукции из него сразу получаются все неприводимые представления. Само собой разумеется, что областью действия этого представления поэтому не может быть пространство конечной размерности; оно является группой линейных преобразований в «пространстве» всех однозначных непрерывных функций $\eta(s)$, аргумент s которых пробегает замкнутое односвязное групповое многообразие $\mathfrak{a}_u$. А именно, элементу s_0 из $\mathfrak{a}_u$ соответствует преобразование $T(s_0)$: $\eta \to \eta'$ пространства функций, которое задается равенством

$$\eta(s) = \eta'(s_0^{-1}s).$$

Сразу же убеждаемся в том, что для каких-либо двух элементов s_0, t_0 имеем

$$T(s_0)\, T(t_0) = T(s_0 t_0).$$

[5] *Cartan E.*, II.

С помощью редукции этого регулярного представления, действуя аналогично тому, как это было проделано в теории групповых характеров Фробениуса, получаем следующий результат:

Теорема 6а. *Примитивные характеры образуют (соответствующую интегральному элементу $d\Omega$) полную ортогональную систему для множества однозначных функций классов на $\mathfrak{a}_u$.*

Хотя и трансцендентный, изложенный метод является естественным и не опирается на рассмотрение отдельных случаев. Учитывая неизвестные свойства примитивных характеров, из полученного результата получаем:

1. Два главных элемента (ε), (ε'), для которых (определенные с точностью до унимодулярного преобразования) нормированные угловые переменные имеют равные значения по модулю 1:

$$\varphi_i \equiv \varphi_i' \pmod 1,$$

совпадают на $\mathfrak{a}_u$.

2. Два главных элемента (ε), (ε') сопряжены внутри $\mathfrak{a}_u$, если один из них получается из другого с помощью применения к угловым переменным подстановки S группы (S), т. е. если для каждой такой S имеется элемент u_S из $\mathfrak{a}_u$, для которого

$$(\varepsilon)\, S = u_S^{-1}\, (\varepsilon)\, u_S.$$

Если от теорем 6 и 6а перейти к их обращениям, то полученные в результате утверждения будут согласоваться между собой. Я отказываюсь пока от точного изложения всего этого метода, так как это при настоящем состоянии исследования привело бы нас к слишком большим усилиям для достижения цели, уже достигнутой другим способом. Однако я надеюсь, что положение дел вскоре изменится; явными указаниями в этом отношении являются начинания Э. Картана, примыкающие к настоящей работе и о которых автор имеет письменное сообщение.

§ 5. Связь с теорией инвариантов

Пусть $\mathfrak{a}$ — заданная группа однородных линейных преобразований в пространстве размерности m. Если имеется одна или несколько произвольных форм определенной степени m-членного ряда переменных $x, y, \ldots$, то под *инвариантом* этих форм относительно группы $\mathfrak{a}$ понимается, как известно, целая рациональная функция коэффициентов этих форм, которая однородна по коэффициентам каждой отдельной формы и не меняется, если формы заменить на получающиеся из них формы при применении произвольного, когредиентно действующего на ряд переменных $x, y, \ldots$ преобразования s группы $\mathfrak{a}$. Но, например, коэффициенты произвольной кубической формы от x под воздействием преобразований переменных претерпевают группу линейных преобразований, которая изоморфно связана с $\mathfrak{a}$. Понимая так нашу задачу, мы можем сразу ее обобщить. Пусть имеется некоторое количество представлений $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ абстрактно заданной группы $\mathfrak{a}$ с помощью линейных преобразований. Пусть элементу s из $\mathfrak{a}$ соответствует линейное преобразование S из $\mathfrak{A}$ произвольного m-мерного вектора x, в $\mathfrak{B}$ — линейное преобразование T произвольного n-мерного вектора $y, \ldots$ Целая рациональная функция $J(x, y, \ldots)$: однородная по компонентам

каждого из векторов $x, y, \ldots$, называется соответствующим *инвариантом*, если она при одновременных преобразованиях $S, T, \ldots$, индуцируемых произвольным элементом s из $\mathfrak{a}$ на их аргументах, не меняется. Доказательство Гильберта *основной теоремы о том, что все соответствующие заданным представлениям* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ *инварианты могут быть построены из конечного их числа рациональным образом*, требует использования метода, который дает возможность из каждой однородной по отдельным векторам целой рациональной функции $f(x, y, \ldots)$ получить инвариант J_f, совпадающий, в частности, с f (с точностью до постоянного отличного от 0 множителя), если f уже сама является инвариантом. Для этого Гурвиц придумал *метод интегрирования*. Мы знаем теперь силу этого метода: он *приводит к цели* не только для проективной и ортогональной групп, к которым Гурвиц его единственно применил, но и *для всех полупростых групп*. Тем самым этот метод показывает свое значительное превосходство над чисто алгебраическими методами, которые используют дифференциальные процессы типа Ω-процессов Кэли. *Тем самым впервые естественным образом в теории инвариантов получена теоретико-групповая граница ее применимости.*

Рассмотрим унитарное ограничение и образуем распространяемый на замкнутое многообразие $\mathfrak{a}_u$ интеграл

$$\int_{\mathfrak{a}_u} f(xS, yT, \ldots)\,|ds| = J_f(x, y, \ldots).$$

$J_f(x, y, \ldots)$, конечно, является инвариантом относительно $\mathfrak{A}_u$. То, что от унитарного ограничения здесь опять можно избавиться, показывается наиболее удобно при помощи перехода к инфинитезимальным операциям. Изменение dJ_f инварианта J_f при некоторой инфинитезимальной операции из $\mathfrak{a}$ является линейной формой его параметров. Форма обращается в нуль, если на эти параметры наложено унитарное ограничение (8). Таким образом, она обращается в нуль тождественно. Следовательно, интеграл J_f инвариантен относительно инфинитезимальных операций из $\mathfrak{a}$, как и относительно всех операций из $\mathfrak{a}$.

Рассматривая лишь те инварианты, которые относительно каждого векторного аргумента $x, y, \ldots$ имеют *определенную степень*, получим более простую задачу о линейной независимости между инвариантами определенной таким образом конечной *совокупности*. Например, если по x предписана степень 3, по y — степень, 2, . . ., то совокупность инвариантов можно рассматривать как совокупность линейных форм от переменных

$$x_i x_k x_l y_r y_s, \ldots,$$

которые, со своей стороны, задают область действия определенным образом составленного представления $\underline{\mathfrak{A}}$ из представлений $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ Таким образом, в измененных обозначениях задача сводится к следующему: в x-пространстве представления $\underline{\mathfrak{A}}$ группы $\mathfrak{a}$ надо отыскать все линейные формы $J = J(x)$, которые не меняются при линейных преобразованиях группы $\mathfrak{A}$. Как очевидно, число линейно независимых инвариантов J задает, сколько раз в разложении $\mathfrak{A}$ на неприводимые представления встречается $J' = J$ [62]. Если $\mathfrak{A}$ содержит неприводимое представление со старшим весом (16) и характером χ_m при пол-

ном приведении g_m раз, то для характера ζ представления $\mathfrak{A}$ имеем

$$\zeta(\varphi) = \Sigma g_m \chi_m(\varphi).$$

Отсюда при помощи соотношений ортогональности для χ_m получаем

$$g_m = \frac{1}{\Omega} \int \zeta(\varphi) \chi_m(-\varphi) \, d\Omega. \tag{23}$$

В частности, число линейно независимых инвариантов

$$g_0 = \frac{1}{\Omega} \int \zeta(\varphi) \, d\Omega. \tag{24}$$

Эта формула была обнаружена И. Шуром в случае ортогональных групп [6] и была использована для получения интересных следствий.

Но и общая формула (23) представляет интерес. Если J — инвариант для нескольких форм, то равенство $J = 0$ является инвариантным соотношением между этими формами. Но имеются также инвариантные соотношения между формами, которые выражаются не с помощью одного, а нескольких, например с помощью двух равенств $J_1 = 0$, $J_2 = 0$. В таком случае J_1, J_2 под воздействием подстановок группы переходят в линейную комбинацию этих двух функций. Если не каждая из двух функций в отдельности инвариантна, то J_1 должна быть по компонентам каждой формы той же самой степени, что и J_2. Рассматривая опять лишь те пары (J_1, J_2), для которых эти степени заранее заданы, можем поставленную задачу сформулировать следующим образом: найти все пары (J_1, J_2) линейных форм в x-пространстве, которые под воздействием элементов группы $\mathfrak{a}$ претерпевают некоторые заданные изоморфно поставленные им в соответствие линейные преобразования:

$$J_1' = t_{11}J_1 + t_{12}J_2,$$
$$J_2' = t_{21}J_1 + t_{22}J_2.$$

Последние должны образовывать неприводимое представление группы $\mathfrak{a}$. Если при полном приведении группы преобразований $\mathfrak{A}$ переменных x это неприводимое представление входит в $\mathfrak{A}$ с кратностью g, то я утверждаю, что имеется g таких пар

$$(J_1', J_2'), \ (J_1'', J_2''), \ldots,$$

из которых все могут быть получены линейным образом с помощью постоянных коэффициентов:

$$J_1 = \alpha' J_1' + \alpha'' J_1'' + \ldots,$$
$$J_2 = \alpha' J_2' + \alpha'' J_2'' + \ldots$$

В самом деле, если элементу из $\mathfrak{a}$ в N-мерном пространстве представления $\mathfrak{A}$ соответствует матрица T, а в заданном двумерном неприводимом представлении — матрица t, то требование о том, что пара

$$J_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N,$$
$$J_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N$$

[6] *Schur I.*— S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., 1924, S. 189—208, 346—355.

подвергается преобразованию t, когда x трансформируется с помощью T, для прямоугольной матрицы A коэффициентов a сводится к равенству

$$tA = AT.$$

Если общая матрица T, записанная в полностью приведенном виде, содержит по главной диагонали g раз матрицу t, а в остальных местах всюду неэквивалентные t неприводимые матрицы, то в соответствии с этим разбиением распадаются на блоки ряд переменных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и тем самым матрица A. Для каждого из первых g квадратных блоков A в A имеем равенство

$$tA = At,$$

а для остальных прямоугольных блоков B — равенства

$$tB = Bt',$$

в которых t' неприводимо и неэквивалентно t. Согласно упомянутой в главе I, 6, теореме И. Шура, отсюда следует, что блоки A являются двумерными единичными матрицами, а блоки B обращаются в нулевые. Но это есть в точности сформулированное утверждение о том, что (J_1, J_2) линейно составляется из пар

$$(x_1, x_2), (x_3, x_4), \ldots, (x_{2q-1}, x_{2q}),$$

на каждой из которых T индуцирует t. В результате получаем: при двух представлениях заданной полупростой группы, из которых второе неприводимо, пусть произвольному групповому элементу соответствуют линейные преобразования или матрицы T, t соответственно. Первое представление, область действия которого есть x-пространство, пусть будет N-мерным, а второе — n-мерным. Существует система $J_1, J_2, \ldots, J_n$ из n линейных форм от N переменных x, которые между собой преобразуются в соответствии с t, когда переменные x подвергаются преобразованию T. Число линейно независимых из этих «инвариантных систем», если ζ и χ_m — характеры обоих представлений, задается формулой (23).

Дополнение[7]

Рассуждения, которые в § 3 главы IV привели к нахождению примитивных характеров всех полупростых групп, в одном месте нуждаются в добавлении. На с. 186, строка 3, сказано: «Каждый альтернированный ряд Фурье является линейной комбинацией элементарных сумм» и при объяснении элементарных сумм обозначенная через Φ линейная форма без дальнейших пояснений считается старше, чем все эквивалентные ей формы (за исключением самой Φ). Но относительно старшего члена $e(\Phi)$ некоторого альтернированного ряда Фурье можно лишь утверждать, что

$$\Phi \geqslant \Phi S \quad \text{для всех подстановок } S \text{ и}$$

$$\Phi > \Phi S \quad \text{для всех } \textit{нечетных } S, \text{ в частности, для образующих } S_\alpha. \qquad [1]$$

[7] Math. Ztschr., 1926, Bd. 24, S. 789—791.

Для исключительных случаев в главах I—III отсюда следовало в силу строения группы (S), причем об этом явно не было упомянуто, что неравенство $\Phi > \Phi S$ выполняется для всех отличных от единичной подстановок S. Следуя ходу рассуждений на с. 186—189, таким способом достигаем цели в общем случае [63].

Целочисленная линейная форма Φ с коэффициентами l удовлетворяет условию [1]. Пусть $(S)_l$ — группа тех (четных) подстановок S, для которых $\Phi S = \Phi$, h_l — ее порядок. Тогда в соответствующей элементарной сумме $\xi(l)$, формула (13), в соответствии с разложением группы (S) на смежные классы по $(S)_l$ по h_l штук членов совпадают; не ряд Фурье $\xi(l)$, а

$$\frac{1}{h_l}\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \xi^*\ \ (l_1, l_2, \ldots, l_n)$$

имеет целочисленные коэффициенты, равные ± 1. Следовательно, вместо (18) получаем

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \xi^*(l_1, l_2, \ldots, l_n)\bar{\xi}^*(l_1, l_2, \ldots, l_n)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n = |(S)|/h_l, \qquad [2]$$

Рассуждение из предпоследнего абзаца на с. 187 приводит к окончательному равенству

$$\Delta = \xi^*\ (r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

и, следовательно, согласно [2] имеем

$$\Omega = |(S)|\,/h_r.$$

Отщепляя от Φ половинную сумму положительных корней $\Phi^0 = r_1\varphi_1 + \ldots + r_n\varphi_n$: $\Phi = \Psi + \Phi^0$, получим $\Psi S \leqslant \Psi$, $\Phi^0 S \leqslant \Phi^0$ для всех подстановок S группы (S). Поэтому лишь в том случае может быть $\Phi S = \Phi$, когда в обоих написанных выше неравенствах реализуется знак равенства. Другими словами, $(S)_l$ является подгруппой в $(S)_r$. Обозначая подстановки из $(S)_r$ через S_0, получаем, что $(S)_l$ состоит в точности из тех подстановок S_0, которые оставляют инвариантной Ψ. h_l будет делителем h_r, h_r/h_l — целое положительное число. Подстановки S_0 характеризуются тем, что они переводят все положительные корни опять в положительные.

Для характера χ неприводимого представления или еще лучше для соответствующей ему функции $\xi = \Delta\cdot\chi$ получаем аналогично (21)

$$\xi = c\cdot\xi^*\ (l) + c'\cdot\xi^*\ (l') + \ldots$$

с целочисленными коэффициентами $c, c', \ldots$ Образуя после этого среднюю величину

$$\frac{1}{\Omega}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \xi\bar{\xi}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n,$$

которая согласно И. Шуру равна 1, получаем

$$1 = c^2\frac{h_r}{h_l} + c'^2\frac{h_r}{h_{l'}} + \ldots$$

В силу уже полученных результатов отсюда следует

$$c = 1,\ c' = 0,\ \ldots\ \text{и}\ h_l = h_r,\ (S)_l = (S)_r.$$

Таким образом,

$$\chi = \frac{\xi^*(l)}{\Delta} = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)} \qquad [3]$$

и старший вес $\Psi = m_1\varphi_1 + \ldots + m_n\varphi_n$ неприводимого представления инвариантен относительно всех подстановок S_0.

Тем самым основная формула [3] доказана независимо от опротестованного предположения. Но теперь дополнительно легко получается, что $(S)_r$ может состоять лишь из единицы. В получаемом следствии утверждается, что старший вес каждого неприводимого представления и тем самым вообще каждого представления инвариантен относительно подстановок S_0. Однако для встречающихся старших весов такого рода ограничивающих *соотношений* нет. В присоединенном представлении $\tilde{a}$, областью действия которого является r-мерное векторное пространство самой инфинитезимальной группы и тех групп, согласно которым в этом пространстве преобразуются 2-мерные, 3-мерные, ..., $(r-n)/2$-мерные векторы под воздействием $\tilde{a}$, мы имеем $(r-n)/2$ представлений, старшие веса которых являются частичными суммами возрастающих упорядоченных положительных корней $\rho_1, \rho_2, \ldots$:

$$\rho_1,\ \rho_1 + \rho_2,\ \rho_1 + \rho_2 + \rho_3,\ \ldots,\ \Sigma^+\rho.$$

Подстановка S_0 должна их все (а не только последний $2\Phi^0$) переводить в себя. Поэтому все корни под воздействием S_0 переходят в себя и S_0 есть единица. Тем самым дополнительно доказано, что старший член $e(\Phi)$ какого-либо альтернированного ряда Фурье под воздействием отличной от единичной подстановки S переходит в ниже стоящий.

ЭЛЕКТРОН И ГРАВИТАЦИЯ*

ВВЕДЕНИЕ

В этой работе излагается в более полном виде теория, охватывающая гравитацию, электричество и материю; краткий набросок теории появился в «Proc. Nat. Acad.» (апрель 1929 г.). Различными авторами была замечена связь между эйнштейновской теорией дальнего параллелизма и спиновой теорией электронов [1]. Несмотря на некоторые формальные совпадения мой подход радикальным образом отличается тем, что я отказываюсь от дальнего параллелизма и придерживаюсь классической релятивистской теории гравитации Эйнштейна.

Две причины дают возможность считать, что *согласование теории Паули — Дирака электрона со спином с общей теорией относительности* приведет к плодотворным с физической точки зрения результатам.

1. Теория Дирака, в которой волновое поле электрона описывается с помощью потенциала ψ с четырьмя компонентами, приводит к вдвойне увеличенному количеству энергетических уровней; нужно поэтому суметь, не отказываясь от релятивистской инвариантности, возвратиться к двухкомпонентной теории Паули. Этому препятствует член *дираковского* действия, содержащий массу m электрона в качестве множителя. *Но масса является гравитационным эффектом*; таким образом, возникает надежда найти для этого члена замену в теории гравитации, которая привела бы к требуемому изменению.

2. Уравнения Дирака для поля ψ вместе с уравнениями Максвелла для четырех потенциалов электромагнитного поля обладают одним свойством инвариантности, которое с формальной точки зрения совпадает с тем свойством, которое я в 1918 г. в моей теории гравитации и электричества назвал *калибровочной инвариантностью*. Уравнения не меняются, если одновременно заменить

$$\psi \text{ на } e^{i\lambda}\cdot\psi \text{ и } f_p \text{ на } f_p - \partial\lambda/\partial x_p,$$

где λ — некоторая произвольная функция точки четырехмерного мира. При этом в f_p включен множитель e/ch ($-e$ — заряд электрона, c — скорость света, $h/2\pi$ — квант действия). Кроме того, остается незатронутой связь этой «калибровочной инвариантности» с законом сохранения электричества. Имеется, однако, одно существенное и важное для опыта различие, состоящее в том, что показатель степени множителя, приписываемого при этом ψ, является не вещественным, а чисто мнимым. Потенциал ψ играет теперь ту роль, которая в старой теории *Эйнштейна* была возложена на ds. Мне поэтому кажется уместным указать на новый, возникающий из опыта, а не умозрительно, принцип калибровочной инвариантности: *электрическое поле является необходимым сопутствующим явлением не гравитационного поля, а материально-волнового поля, представляемого потенциалом* ψ. Так как калибровочная инвариантность вклю-

---

* Electron und Gravitation.— Ztschr. Phys., 1929, Bd. 56, S. 330—352. Перевод С. П. Демушкина.

[1] *Wigner E.*— Ztschr. Phys., 1929, Bd. 53, S. 562, и др. работы.

чает в себя произвольную функцию λ, то она имеет характер «общей» относительности и может быть понята естественно лишь в рамках последней.

В теории *дальнего параллелизма* я сомневаюсь по многим причинам. Во-первых, мои математические эмоции противятся тому, чтобы допустить столь искусственную геометрию; мне трудно вообразить себе силу, которая объединяет в некоторую жесткую общность произвольно искривленные системы координат различных мировых точек. Как я думаю, для этого имеются две важные физические причины. Как раз в тот момент, когда теряется связь между локальными системами координат, калибровочный множитель $e^{i\lambda}$, остающийся неопределенным в выражении для ψ, превращается с необходимостью из константы в функцию точки; другими словами, лишь при наличии такого допущения может быть понята существующая на самом деле калибровочная инвариантность. И, во-вторых, возможность вращения независимо друг от друга осей координат в различных точках, как мы убедимся в дальнейшем, равнозначна *симметричности тензора энергии-импульса* или выполнимости закона сохранения момента импульса.

При любой попытке установления квантово-теоретических уравнений поля следует иметь в виду то, что последние не могут быть проверены опытом непосредственно; лишь *после их квантования* опытные данные дадут статистические высказывания о поведении материальных частиц и световых квантов. Теория Дирака—Максвелла в существовавшем до сих пор виде содержит лишь электромагнитные потенциалы f_p и волновое поле ψ *электрона*. Без сомнения должно быть добавлено также волновое поле ψ' протона. А так как в уравнениях поля ψ, ψ' и f_p являются функциями *тех же самых* четырех пространственно-временных координат, то перед квантованием нет необходимости требовать, что ψ есть функция мировой точки (t, xyz) и ψ' есть функция не зависящей от нее мировой точки $(t', x'y'z')$. Естественно ожидать, что из двух пар компонент для величин Дирака одна принадлежит электрону, а другая — протону. Далее, должны выполняться два закона сохранения электричества, которые после квантования сводятся к тому, что число электронов, как и число протонов, остается постоянным. Им соответствует двукратная калибровочная инвариантность, включающая в себя две произвольные функции.

Прежде всего мы исследуем в рамках специальной теории относительности вопрос о том, насколько необходимо повышение числа компонент функции ψ от двух до четырех в свете формальных требований теории групп, полностью отвлекаясь при этом от согласующихся с опытом динамических дифференциальных уравнений. Как мы убедимся, можно обойтись двумя компонентами, если отказаться от *симметричности левого и правого*.

ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Закон преобразования для ψ

Вводя в пространстве с декартовыми координатами x, y, z однородные проективные координаты x_α:

$$x = x_1/x_0, \quad y = x_2/x_0, \quad z = x_3/x_0,$$

получим, что уравнением единичной сферы будет

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{1}$$

Проектируя эту сферу из южного полюса на плоскость экватора $z = 0$ и рассматривая последнюю в качестве носителя комплексной переменной

$$x + iy = \zeta = \psi_2/\psi_1,$$

получим, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} x_0 &= \bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2, & x_1 &= \bar{\psi}_1\psi_2 + \bar{\psi}_2\psi_1, \\ x_2 &= i(-\bar{\psi}_1\psi_2 + \bar{\psi}_2\psi_1), & x_3 &= \bar{\psi}_1\psi_1 - \bar{\psi}_2\psi_2. \end{aligned} \tag{2}$$

x_α являются эрмитовыми формами от ψ_1, ψ_2. Существенную роль здесь играют лишь *отношения* как переменных ψ_1, ψ_2, так и координат x_α. Однородное линейное преобразование (с комплексными коэффициентами) переменных ψ_1, ψ_2 приводит к линейному, вещественному преобразованию координат x_α: оно представляет собой коллинеацию, которая переводит в себя единичную сферу и сохраняет на ней направление вращения. Легко показать (и это хорошо известно), что этим способом каждая коллинеация такого вида получается один и только один раз.

Переходя от однородной точки зрения к неоднородной, будем интерпретировать теперь x_α как координаты в четырехмерном мире и равенство (1) как уравнение «светового конуса»; ограничимся линейными преобразованиями U переменных ψ_1, ψ_2, определитель которых имеет абсолютную величину 1. U задает относительно переменных x_α некоторое *преобразование Лоренца*, т. е. вещественное однородное линейное преобразование, переводящее в себя форму

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Из формулы для x_0 и нашего замечания о сохранении направления вращения на сфере сразу же следует, что из всех преобразований Лоренца мы выделяем при этом однозначно определенный замкнутый в себе континуум преобразований Λ, которые 1) не переставляют прошлое и будущее и 2) имеют определитель $+1$, но не -1; и, конечно, все такие преобразования без исключения. Посредством Λ линейное преобразование U для ψ определено неоднозначно, в нашем распоряжении остается еще произвольный постоянный множитель $e^{i\lambda}$ с абсолютным значением 1. Преобразование U можно нормализировать требованием, чтобы его определитель равнялся 1, но даже в этом случае остается некоторая двузначность. Ограничения 1) следует придерживаться строго; одной из подающих надежду сторон ψ-теории является то, что в ней может быть учтена *существенная разница между прошлым и будущим*. Ограничение 2) ликвидирует равноправие правого и левого. Лишь имеющаяся на самом деле в природе симметрия правого и левого заставит нас ввести дополнительную пару ψ-компонент.

Матрица, *эрмито-сопряженная* к некоторой матрице $A = \| a_{ik} \|$, будет обозначаться через A^*:

$$a_{ik}^* = \bar{a}_{ki}.$$

Пусть S_α — матрица коэффициентов *эрмитовой* формы от переменных ψ_1, ψ_2, которая представляет в (2) координаты x_α:

$$x_\alpha = \psi^* S_\alpha \psi; \tag{3}$$

здесь ψ обозначает *столбец* из ψ_1, ψ_2. Тогда S_0 — единичная матрица и выполняются равенства

$$S_1^2 = 1,\ S_2 S_3 = iS_1 \tag{4}$$

и равенства, получающиеся из них циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

С формальной точки зрения удобнее заменить вещественную временную координату x_0 на мнимую ix_0. Преобразования Лоренца являются тогда ортогональными преобразованиями четырех величин

$$x(0) = ix_0, \quad x(\alpha) = x_\alpha \quad [\alpha = 1,\ 2,\ 3].$$

Вместо (3) пишем

$$x(\alpha) = \psi^* S(\alpha)\,\psi. \tag{5}$$

Закон преобразования ψ-компонент состоит в том, что под воздействием некоторого преобразования Λ на мировые координаты $x(\alpha)$ они изменяются так, что величины (5) подвергаются преобразованию Λ. Величина подобного рода представляет, как следует из существования спина, волновое поле некоторой материальной частицы. $x(\alpha)$ является координатами в некоторой «нормальной системе координат» $\mathbf{e}(\alpha)$; $\mathbf{e}(1)$, $\mathbf{e}(2)$, $\mathbf{e}(3)$ являются вещественными пространственноподобными векторами, которые образуют левую декартову систему координат, $\mathbf{e}(0)/i$ — вещественный времяподобный мировой вектор, направленный в будущее. Преобразование Λ описывает переход от одной такой нормальной системы координат к некоторой другой, равноправной; это преобразование будет называться в дальнейшем кратко вращением осей координат. Мы получим одни и те же коэффициенты $c(\alpha\beta)$, если будем выражать преобразование Λ через базисные векторы системы координат или через сами координаты:

$$\mathbf{x} = \sum_\alpha x(\alpha)\,\mathbf{e}(\alpha) = \sum_\alpha x'(\alpha)\,\mathbf{e}'(\alpha),$$

$$\mathbf{e}'(\alpha) = \sum_\beta c(\alpha\beta)\,\mathbf{e}(\beta), \qquad x'(\alpha) = \sum_\beta c(\alpha\beta)\,x(\beta);$$

это следует из ортогональности преобразования Λ.

Для дальнейшего необходимо произвести подсчет инфинитезимального преобразования

$$d\psi = dE\cdot\psi, \tag{6}$$

которое соответствует произвольному инфинитезимальному вращению $d\mathbf{\Omega}$:

$$dx(\alpha) = \sum_\beta do(\alpha\beta)\cdot x(\beta).$$

Величины $do(\alpha\beta)$ образуют кососимметрическую матрицу.

Преобразование (6) нормируем таким образом, чтобы след матрицы dE равнялся 0. Матрица dE линейно и однородно зависит от величин $do(\alpha\beta)$. Напишем

поэтому

$$dE = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} do\,(\alpha\beta) \cdot A\,(\alpha\beta) = \sum' do\,(\alpha\beta) \cdot A\,(\alpha\beta).$$

Последняя сумма должна быть распространена лишь на пары

$$(\alpha\beta) = (0\ 1),\ (0\ 2),\ (0\ 3);\ (2\ 3),\ (3,\ 1),\ (1\ 2).$$

$A\,(\alpha\beta)$, конечно, кососимметрично зависит от α и β. Не следует забывать, что коэффициенты $do\,(\alpha\beta)$ для первых двух пар $(\alpha\beta)$ чисто мнимые, для последних трех пар вещественные, а для остальных — произвольные. Находим, что выполняются равенства

$$A\,(2\,3) = -\frac{1}{2i} S\,(1), \quad A\,(0\ 1) = \frac{1}{2i} S\,(1) \tag{7}$$

и две аналогичные пары равенств, которые получаются из них циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Для подтверждения этого следует лишь подсчитать, что инфинитезимальные преобразования

$$d\psi = \frac{1}{2i} S\,(1)\,\psi \quad \text{и} \quad d\psi = \frac{1}{2} S\,(1)\,\psi$$

порождают инфинитезимальные вращения

$$dx\,(0) = 0, \quad dx\,(1) = 0, \quad dx\,(2) = -x\,(3), \quad dx\,(3) = x\,(2)$$

и

$$dx\,(0) = ix\,(1), \quad dx\,(1) = -ix\,(0), \quad dx\,(2) = 0, \quad dx\,(3) = 0$$

соответственно.

§ 2. Метрика и параллельный перенос

Мы переходим теперь к общей теории относительности. Метрику в некоторой мировой точке P мы описываем с помощью задания какого-либо ортонормированного репера $\mathbf{e}\,(\alpha)$. Каждая метрика определяет лишь класс реперов, которые связаны между собой посредством группы вращений Λ; с помощью акта выбора из этого класса выделяется некоторый индивидуальный представитель. Поэтому все законы инвариантны относительно произвольных вращений реперов; при этом вращение репера в отличной от P точке P' не зависит от вращения в P. Пусть $\psi_1\,(P)$, $\psi_2\,(P)$ — компоненты материального потенциала в точке P относительно выбранного в ней репера $\mathbf{e}\,(\alpha)$. Некоторый вектор $\mathbf{t}$ в точке P может быть записан в виде

$$\mathbf{t} = \sum_{\alpha} t\,(\alpha)\,\mathbf{e}\,(\alpha);$$

числа $t\,(\alpha)$ являются его компонентами в заданном репере.

Для аналитического представления нам понадобится, далее, некоторая координатная система x_p; x_p являются такими четырьмя непрерывными функциями в мире, значения которых позволяют отличить друг от друга различные мировые точки. Действующие законы поэтому инвариантны относительно произвольных преобразований координат. Пусть $e^p\,(\alpha)$ будет компонентами вектора

e (α) относительно системы координат; эти $4 \cdot 4$ величин e^p (α) описывают гравитационное поле. Контравариантные компоненты t^p некоторого вектора **t** в системе координат связаны с его компонентами t (α) относительно репера равенствами

$$t^p = \sum_\alpha t(\alpha) \cdot e^p(\alpha).$$

С другой стороны, t (α) выражаются через его ковариантные компоненты t_p в системе координат при помощи формул

$$t(\alpha) = \sum_p t_p \cdot e^p(\alpha).$$

Эти равенства регулируют преобразование индексов. Греческие индексы, относящиеся к реперу, я записал как аргументы, ибо здесь нет необходимости различать верхнее и нижнее положение индексов. Преобразование в обратную сторону производится при помощи обратной к $\| e^p(\alpha) \|$ матрицы $\| e_p(\alpha) \|$:

$$\sum_\alpha e_p(\alpha)\, e^q(\alpha) = \delta_p{}^q \quad \text{и} \quad \sum_p e_p(\alpha)\, e^p(\beta) = \delta(\alpha, \beta).$$

Здесь δ равно 1 или 0 в зависимости от того, совпадают индексы или нет. Правило пропуска знака суммирования будет применяться впредь как для латинских, так и для греческих индексов. Пусть ε обозначает абсолютное значение определителя $| e^p(\alpha) |$. Частное от деления некоторой величины, обозначенной латинской буквой, на ε будет обозначаться, как обычно, соответствующей готической буквой, например,

$$\mathfrak{e}^p(\alpha) = e^p(\alpha)/\varepsilon.$$

Вектор или тензор можно описать как с помощью компонент относительно заданной системы координат, так и с помощью компонент относительно репера. Что же касается величины ψ, речь может идти лишь о компонентах относительно репера. В самом деле, закон преобразования компонент этой величины задается некоторым представлением группы вращений, которое не может быть продолжено на группу всех линейных преобразований. Поэтому и возникает необходимость представлять гравитационное поле в теории материи тем способом, который был здесь описан, а не аналитически с помощью метрической фундаментальной формы [2]

$$\sum_{p,q} g_{pq}\, dx_p\, dx_q.$$

Впрочем, имеем

$$g_{pq} = e_p(\alpha)\, e_q(\alpha).$$

Теории гравитации следует придать теперь эту новую аналитическую форму. Я начну с формул для определяемого метрикой инфинитезимального параллельного переноса. Вектор e (α) в точке P переходит при этом в вектор e$'$ (α) в бесконечно близкой точке P'. e$'$ (α) образуют в P' ортонормированный репер,

[2] С формальной точки зрения это совпадает с новыми работами Эйнштейна о гравитации и электричестве (S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., 1928, S. 217, 224; 1929, S. 2). Эйнштейн употребляет букву h вместо e.

который получается из репера $\mathbf{e}(\alpha) = \mathbf{e}(\alpha; P')$ с помощью инфинитезимального вращения $d\Omega$:

$$\delta\mathbf{e}(\beta) = \sum_{\gamma} do(\beta\gamma)\cdot\mathbf{e}(\gamma), \qquad \delta\mathbf{e}(\beta) = \mathbf{e}'(\beta) - \mathbf{e}(\beta; P'). \tag{8}$$

$d\Omega$ линейно зависит от переноса PP' или его компонент

$$dx_p = (dx)^p = v^p = e^p(\alpha)\, v(\alpha).$$

Мы пишем поэтому

$$d\Omega = \Omega_p (dx)^p, \qquad do(\beta\gamma) = o_p(\beta\gamma)(dx)^p = o(\alpha; \beta\gamma)\, v(\alpha). \tag{9}$$

Параллельный перенос вектора $\mathbf{t}$ с компонентами t^p описывается, как известно, одним уравнением:

$$d\mathbf{t} = -d\boldsymbol{\Gamma}\cdot\mathbf{t}, \quad \text{т. е.} \quad dt^p = -d\Gamma_r{}^p\cdot t^r, \qquad d\Gamma_r{}^p = \Gamma_{rq}{}^p (dx)^q,$$

в котором не зависящие как от $\mathbf{t}$, так и от переноса dx величины Γ^p_{rq} симметричны по r и q. Таким образом, мы имеем

$$\mathbf{e}'(\beta) - \mathbf{e}(\beta) = -d\boldsymbol{\Gamma}\cdot\mathbf{e}(\beta).$$

Наряду с этим выполняется равенство (8). Вычитание обеих разностей слева дает в итоге дифференциал $d\mathbf{e}(\beta) = \mathbf{e}(\beta; P') - \mathbf{e}(\beta; P)$:

$$de^p(\beta) + d\Gamma^p_r e^r(\beta) = -do(\beta\gamma)\cdot e^p(\gamma),$$

$$\frac{\partial e^p(\beta)}{\partial x_q} e^q(\alpha) + \Gamma^p_{rq} e^r(\beta)\, e^q(\alpha) = -o(\alpha; \beta\gamma)\, e^p(\gamma).$$

Здесь можно исключить o и получить известные уравнения для величин Γ, если воспользоваться тем, что $o(\alpha; \beta\gamma)$ кососимметрично относительно β и γ. Если же воспользоваться тем, что величины Γ^p_{rq} симметричны относительно r и q, или тем, что

$$\Gamma^p(\beta, \alpha) = \Gamma^p_{rq} e^r(\beta)\, e^q(\alpha)$$

симметрично по α и β, то можно исключить Γ и вычислить o:

$$\frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_q}\cdot e^q(\beta) - \frac{\partial e^p(\beta)}{\partial x_q}\cdot e^q(\alpha) = \{o(\alpha; \beta\gamma) - o(\beta; \alpha\gamma)\}\, e^p(\gamma). \tag{10}$$

Левая часть составлена из компонент инвариантного относительно преобразований координат «коммутаторного произведения» двух векторных полей $\mathbf{e}(\alpha)$, $\mathbf{e}(\beta)$, которое играет решающую роль в теории Ли инфинитезимальных преобразований; это произведение будет обозначаться через $[\mathbf{e}(\alpha), \mathbf{e}(\beta)]$. Так как $o(\beta; \alpha\gamma)$ кососимметрично по α и γ, то получаем

$$[\mathbf{e}(\alpha), \mathbf{e}(\beta)]^p = \{o(\alpha; \beta\gamma) + o(\beta; \gamma\alpha)\}\, e^p(\gamma),$$

или

$$o(\alpha; \beta\gamma) + o(\beta; \gamma\alpha) = [\mathbf{e}(\alpha), \mathbf{e}(\beta)](\gamma). \tag{11}$$

Беря в этом равенстве три циклические перестановки символов $\alpha\beta\gamma$ и складывая получающиеся равенства со знаками $+-+$, получаем

$$2o(\alpha; \beta\gamma) = [\mathbf{e}(\alpha), \mathbf{e}(\beta)](\gamma) - [\mathbf{e}(\beta), \mathbf{e}(\gamma)](\alpha) + [\mathbf{e}(\gamma), \mathbf{e}(\alpha)](\beta).$$

Таким образом, величины $o\,(\alpha;\ \beta\gamma)$ определены действительно однозначно. Найденное выражение удовлетворяет всем условиям, так как оно, очевидно, кососимметрично по β и γ.

Для дальнейшего нам понадобится, в частности, сокращение

$$o\,(\rho, \rho\alpha) = [\mathbf{e}\,(\alpha), \mathbf{e}\,(\rho)]\,(\rho) = \frac{\partial e^p\,(\alpha)}{\partial x_p} - \frac{\partial e^p\,(\rho)}{\partial x_q}\cdot e^q\,(\alpha)\,e_p\,(\rho).$$

Так как

$$-\varepsilon\cdot\delta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = e_q\,(\rho)\cdot\delta e^q\,(\rho),$$

то

$$o\,(\rho, \rho\alpha) = \varepsilon\cdot\frac{\partial e^p\,(\alpha)}{\partial x^p}\,. \tag{12}$$

§ 3. Действие материи

С помощью параллельного переноса могут быть вычислены не только ковариантные производные векторных или тензорных полей, но и таковая для ψ-поля. Пусть $\psi_a\,(P)$, $\psi_a\,(P')$ $[a = 1, 2]$ — компоненты относительно репера $\mathbf{e}\,(\alpha)$ соответственно в точках P, P'. Разность $\psi_a\,(P') - \psi_a\,(P) = d\psi_a$ является обычным дифференциалом. С другой стороны, с помощью параллельного переноса сдвинем репер $\mathbf{e}\,(\alpha)$ из P в P': $\mathbf{e}'\,(\alpha)$; пусть $\psi_a{}'$ будут компонентами ψ в P' относительно репера $\mathbf{e}'\,(\alpha)$. Как ψ_a, так и $\psi_a{}'$ зависят лишь от выбора репера осей $\mathbf{e}\,(\alpha)$ в точке P; они не имеют ничего общего с выбранным репером в P'. При вращении репера в точке P величины $\psi_a{}'$ преобразуются точно так же, как ψ_a; то же самое относится к разности $\delta\psi_a = \psi_a{}' - \psi_a$. Последние величины являются компонентами *ковариантного дифференциала* $\delta\psi$ для ψ. $\mathbf{e}'\,(\alpha)$ получается из репера $\mathbf{e}\,(\alpha) = \mathbf{e}\,(\alpha;\ P')$ в P' с помощью определенного в § 2 инфинитезимального вращения $d\Omega$. Соответствующее инфинитезимальное преобразование

$$dE = {}^1/_2 do\,(\beta\gamma)\,A\,(\beta\gamma)$$

переводит $\psi_a\,(P')$ в $\psi_a{}'$, т. е. $\psi' - \psi\,(P') = dE\cdot\psi$. Прибавляя сюда $d\psi = \psi(P') - \psi\,(P)$, получаем

$$\delta\psi = d\psi + dE\cdot\psi. \tag{13}$$

Все входящие сюда величины линейно зависят от переноса PP'. Можно написать

$$\delta\psi = \psi_p\,(dx)^p = \psi\,(\alpha)\,v\,(\alpha), \qquad dE = E_p\,(dx)^p = E\,(\alpha)\,v\,(\alpha).$$

Имеем

$$\psi_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_p} + E_p\right)\psi \quad \textbf{или} \quad \psi\,(\alpha) = \left(e^p\,(\alpha)\,\frac{\partial}{\partial x_p} + E\,(\alpha)\right)\psi.$$

Здесь

$$E\,(\alpha) = {}^1/_2 o\,(\alpha;\ \beta\gamma)\,A\,(\beta\gamma).$$

Если ψ' есть некоторая величина с тем же самым законом преобразования, что и ψ, то

$$\psi^* S\,(\alpha)\,\psi'$$

являются компонентами некоторого вектора относительно репера. Поэтому

$$v'(\alpha) = \psi^* S(\alpha)\,\delta\psi = \psi^* S(\alpha)\,\psi(\beta)\cdot v(\beta)$$

будет не зависящим от репера линейным отображением $v \to v'$ векторных полей в P. След

$$\psi^* S(\alpha)\psi(\alpha)$$

этого отображения является, следовательно, скаляром и равенство

$$i\varepsilon\mathfrak{m} = \psi^* S(\alpha)\psi(\alpha) \tag{14}$$

определяет некоторую скалярную плотность $\mathfrak{m}$, интеграл которой

$$\int \mathfrak{m}\,dx \quad (dx = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3)$$

можно использовать в качестве величины действия.

Для получения явного выражения для $\mathfrak{m}$ мы должны вычислить

$$S(\alpha)\,E(\alpha) = {}^1/_2 S(\alpha)\,A(\beta\gamma)\cdot o(\alpha;\ \beta\gamma). \tag{15}$$

Из (7) и (4) получаем, что

$$S(\beta)\,A(\beta\alpha) = {}^1/_2 S(\alpha) \qquad [\alpha \neq \beta,\ \text{не суммировать по } \beta!]$$

и

$$S(\beta)\,A(\gamma\delta) = {}^1/_2\, S(\alpha),$$

где $\alpha\beta\gamma\delta$ является четной перестановкой индексов 0 1 2 3.

Члены первого и второго типа приводят поэтому в дополнение к (15) к следующим кратным $S(\alpha)$:

$$\frac{1}{2}\,o(\rho;\ \rho\alpha) = \frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_p}$$

и соответственно

$$o(\beta;\ \gamma\delta) + o(\gamma;\ \delta\beta) + o(\delta;\ \beta\gamma) = \frac{i}{2}\,\varphi(\alpha).$$

Согласно (11), если $\alpha\beta\gamma\delta$ является четной перестановкой 0 1 2 3, имеем

$$i\varphi(\alpha) = [\mathrm{e}(\beta), \mathrm{e}(\gamma)](\delta) + (\text{циклические перестановки индексов } \beta\gamma\delta) =$$

$$= \sum \pm \frac{\partial e^p(\beta)}{\partial x_q}\, e^q(\gamma)\, e_p(\delta). \tag{16}$$

Последняя сумма берется альтернированно по шести перестановкам индексов $\beta\gamma\delta$ (а кроме того, конечно, по p и q). С этими обозначениями получаем

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{i}\left(\psi^* e^p(\alpha)\,S(\alpha)\,\frac{\partial\psi}{\partial x_p} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_p}\cdot\psi^* S(\alpha)\,\psi\right) + \frac{1}{4\varepsilon}\cdot\varphi(\alpha)\,S(\alpha). \tag{17}$$

Вторая часть равна

$$\frac{1}{4i\varepsilon}\left| e_p(\alpha),\ e^q(\alpha),\ \frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_q},\ s(\alpha)\right|$$

(суммировать по p и q); каждый член является определителем из четырех строк, которые получаются из написанной строки, если последовательно положить

$\alpha = 0, 1, 2, 3;$

$$s(\alpha) = \psi^* S(\alpha)\psi. \tag{18}$$

Для законов природы имеет значение не сам интеграл действия

$$\int \mathfrak{h} dx, \tag{19}$$

а лишь его вариация. Поэтому нет необходимости, чтобы $\mathfrak{h}$ было вещественным, а достаточно, чтобы разность $\bar{\mathfrak{h}} - \mathfrak{h}$ являлась дивергенцией. В таком случае мы будем говорить, что $\mathfrak{h}$ практически вещественно. Мы должны исследовать, как обстоит дело в этом отношении с $\mathfrak{m}$. Величина $e^p(\alpha)$ вещественна при $\alpha = 1, 2, 3$ и чисто мнима при $\alpha = 0$. Следовательно, $e^p(\alpha)\, S(\alpha)$ будет эрмитовой матрицей. Равным образом $\varphi(\alpha)$ вещественно при $\alpha = 1, 2, 3$ и чисто мнимо при $\alpha = 0$; таким образом, матрица $\varphi(\alpha)\, S(\alpha)$ тоже эрмитова. Следовательно,

$$\bar{\mathfrak{m}} = -\frac{1}{i}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x_p} S^p\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_p}\psi^* S(\alpha)\psi\right) + \frac{1}{4\varepsilon}\cdot\varphi(\alpha)\, s(\alpha),$$

$$i(\mathfrak{m} - \bar{\mathfrak{m}}) = \psi^*\mathfrak{S}^p\frac{\partial\psi}{\partial x_p} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x_p}\mathfrak{S}^p\psi + \frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_p}\cdot\psi^* S(\alpha)\psi = \frac{\partial}{\partial x_p}(\psi^*\mathfrak{S}^p\psi) = \frac{\partial\mathfrak{s}_q}{\partial x_p}.$$

Таким образом, $\mathfrak{m}$ действительно практически вещественно.

К специальной теории относительности мы возвратимся, если положим

$$e^0(0) = -i, \quad e^1(1) = e^2(2) = e^3(3) = 1,$$

все прочие

$$e^p(\alpha) = 0.$$

§ 4. Энергия

Пусть (19) будет интегралом действия для материи в широком смысле (материя + электрическое поле), которая описывается с помощью ψ и электромагнитного потенциала f_p. Закон природы состоит в том, что вариация обращается в нуль:

$$\delta\int \mathfrak{h} dx = 0,$$

если ψ и f_p подвергаются произвольным инфинитезимальным вариациям, которые вне некоторой конечной области мира обращаются в нуль. Вариация ψ приводит к материальным уравнениям в узком смысле, вариации же f_p — к электромагнитным уравнениям. Если также и компоненты $e^p(\alpha)$, которые до сих пор оставались фиксированными, подвергнуть аналогичным инфинитезимальным вариациям, то на основании полученного закона природы получаем уравнение

$$\delta\int \mathfrak{h} dx = \int \mathfrak{t}_p(\alpha)\cdot\delta e^p(\alpha) dx, \tag{20}$$

с помощью которого следует определить тензорную плотность $\mathfrak{t}_p(\alpha)$ энергии.

В силу инвариантности величины действия вариация (20) должна исчезать, если вариации $\delta e^p(\alpha)$ производятся следующим образом:

1. При фиксированной системе координат x_p ортонормированному реперу **e** (α) сообщается некоторое инфинитезимальное вращение; или

2. При фиксированном репере координаты x_p подвергаются некоторому инфинитезимальному преобразованию.

Первый процесс описывается с помощью уравнений

$$\delta e^p (\alpha) = o\,(\alpha\beta)\cdot e^p\,(\beta).$$

Здесь величины $o\,(\alpha\beta)$ образуют некоторую кососимметрическую (инфинитезимальную) матрицу, которая произвольным образом зависит от точки. Обращение же в нуль вариации (20) сводится к тому, что выражение

$$\mathfrak{t}\,(\beta,\ \alpha) = \mathfrak{t}_p\,(\alpha)\,e^p\,(\beta)$$

симметрично по α и β.

Таким образом, симметричность тензора энергии эквивалентна первому свойству инвариантности. Однако закон симметрии выполняется не тождественно, а является следствием материального и электромагнитного законов. В самом деле, при фиксированном ψ-поле вращение репера изменяет компоненты ψ!

Немного более утомительным является вычисление вариации $\delta e^p\,(\alpha)$, получаемой при втором процессе. Однако применяемые здесь соображения известны из теории относительности в ее более раннем аналитическом изложении[3]. Точка P с координатами x_p имеет в преобразованной системе координат координаты

$$x_p{}' = x_p + \delta x_p, \qquad \delta x_p = \xi^p\,(x).$$

Точка, которая в новой системе координат имеет те же самые координаты x_p, что и P в старой, будет обозначаться через P'; она имеет координаты $x_p - \delta x_p$ в старой системе. Вектор $\mathfrak{t}$ в точке P в новой системе координат будет обладать компонентами

$$\frac{\partial x_p{}'}{\partial x_q}\cdot t^q = t_p + \frac{\partial \xi^p}{\partial x_q}\cdot t^q.$$

В частности, компоненты $e^p\,(\alpha)$ фиксированного вектора **e** (α) в фиксированной точке P при преобразовании координат получат приращения

$$\delta' e^p\,(\alpha) = \frac{\partial \xi^p}{\partial x_q}\cdot e^q\,(\alpha).$$

С другой стороны, разница между векторами **e** (α) в P' и P задается равенством

$$de^p\,(\alpha) = -\frac{\partial e^p\,(\alpha)}{\partial x_q}\cdot \xi^q.$$

Поэтому вариация, порождаемая преобразованием координат *при фиксированных значениях координат* x_p, задается равенством

$$\delta e^p\,(\alpha) = \frac{\partial \xi^p}{\partial x_q}\cdot e^q\,(\alpha) - \frac{\partial e^p\,(\alpha)}{\partial x_q}\cdot \xi^q.$$

---

[3] См., например: *Weyl H.* Raum, Zeit, Materie. 5. Aufl. Berlin, 1923, S. 233 u. s. w. (цитируется далее, как RZM).

Здесь ξ^p суть произвольные функции, обращающиеся в нуль вне некоторой конечной области мира. Подставляя полученное выражение в (20), получаем интегрированием по частям

$$0 = \int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{t}_p{}^q}{\partial x_q} + \mathfrak{t}_q(\alpha) \frac{\partial e^q(\alpha)}{\partial x_p} \right\} \xi^p \, dx.$$

Следовательно, теорема о квазисохранении энергии и импульса появляется здесь в виде

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_p{}^q}{\partial x_q} + \frac{\partial e^q(\alpha)}{\partial x_p} \mathfrak{t}_q(\alpha) = 0. \tag{21}$$

Из-за второго члена она является настоящей теоремой о сохранении лишь в специальной теории относительности. В общем случае она становится таковой, лишь когда добавляется энергия гравитационного поля.

Но в специальной теории относительности интегрирование по $d\xi = dx_1 dx_2 dx_3$ в пространственном сечении

$$x_0 = t = \text{const} \tag{22}$$

приводит к постоянным по времени компонентам импульса (J_1, J_2, J_3) и энергии ($-J_0$):

$$J_p = \int \mathfrak{t}_p{}^0 d\xi.$$

С помощью симметрии находим далее равенства для дивергенций

$$\frac{\partial}{\partial x_q} (x_2 \mathfrak{t}_3{}^q - x_3 \mathfrak{t}_2{}^q) = 0, \ldots,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_q} (x_0 \mathfrak{t}_1{}^q + x_1 \mathfrak{t}_0{}^q) = 0, \ldots$$

Три уравнения первого типа показывают, что момент импульса (M_1, M_2, M_3) постоянен по времени:

$$M_1 = \int (x_2 \mathfrak{t}_3{}^0 - x_3 \mathfrak{t}_2{}^0) \, d\xi, \ \ldots;$$

уравнения второго типа содержат теорему об *инерции энергии*.

Мы вычислим плотность энергии из введенной выше величины действия $\mathfrak{m}$ для материи; обе части, на которые $\mathfrak{m}$ разлагается согласно (17), мы рассмотрим отдельно. Что касается первой части, то после интегрирования по частям получаем

$$\int \delta \mathfrak{m} dx = \int u_p(\alpha) \, \delta e^p(\alpha) \, dx$$

с

$$i u_p(\alpha) = \psi^* S(\alpha) \frac{\partial \psi}{\partial x_p} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\psi^* S(\alpha) \psi)}{\partial x_p} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\psi^* S(\alpha) \frac{\partial \psi}{\partial x_p} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_p} S(\alpha) \psi \right).$$

Возникающая отсюда часть энергии равна поэтому

$$\mathfrak{t}_p(\alpha) = \mathfrak{u}_p(\alpha) - e_p(\alpha)\cdot\mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{t}_p{}^q = \mathfrak{u}_p{}^q - \delta_p{}^q\mathfrak{u},$$

где $\mathfrak{u}$ для сокращения обозначает $e^p(\alpha)\ \mathfrak{u}_p(\alpha)$.

Эти формулы выполняются также и для непостоянных $e^p(\alpha)$. Во второй части мы ограничимся для простоты рассмотрением случая специальной относительности. Имеем тогда

$$\int \delta\mathfrak{m}\, dx = \frac{1}{4i}\int \left| e_p(\alpha), e^q(\alpha), \frac{\partial(\delta e^p(\alpha))}{\partial x_q}, s(\alpha)\right| dx =$$

$$= -\frac{1}{4i}\int \left| \delta e^p(\alpha), e_p(\alpha), e^q(\alpha), \frac{\partial s(\alpha)}{\partial x_q}\right| dx,$$

$$\mathfrak{t}_p(0) = -\frac{1}{4i}\left| e_p(\alpha), e^q(\alpha), \frac{\partial s(\alpha)}{\partial x_q}\right|_{\alpha=1,2,3}.$$

При помощи умножения на $-i$ отсюда получаем $\mathfrak{t}_p{}^0$; таким образом, $\mathfrak{t}_0{}^0 = 0$ и

$$\mathfrak{t}_1{}^0 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial s(3)}{\partial x_2} - \frac{\partial s(2)}{\partial x_3}\right). \tag{23}$$

Чтобы получить полные энергию, импульс и момент импульса, мы объединяем обе полученные составные части. Из

$$\mathfrak{t}_0{}^0 = -\frac{1}{2i}\sum_{p=1}^{3}\left(\psi^* S^p \frac{\partial\psi}{\partial x_p} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_p} S^p\psi\right)$$

после применения к вычитаемому интегрирования по частям получаем

$$-J_0 = -\int \mathfrak{t}_0{}^0\, d\xi = \frac{1}{i}\int \psi^* \sum_{p=1}^{3} S^p \frac{\partial\psi}{\partial x_p}\, d\xi.$$

Это равенство дает возможность считать оператор

$$\frac{1}{i}\sum_{p=1}^{3} S^p \frac{\partial}{\partial x_p}$$

представителем энергии некоторой свободной частицы. Далее, имеем

$$J_1 = \int \mathfrak{t}_1{}^0\, d\xi = \frac{1}{2i}\int\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_1}\psi\right) d\xi = \frac{1}{i}\int \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\, d\xi.$$

Член (23) ничего не добавляет к интегралу. Импульс представляется, как и должно быть согласно Шредингеру, оператором

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right).$$

Из полного выражения для

$$x_2\mathfrak{t}_3{}^0 - x_3\mathfrak{t}_2{}^0$$

получаем, наконец, при помощи соответствующих интегрирований по частям, что

$$M_1 = \int \left\{ \frac{1}{i} \psi^* \left(x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} s(1) \right\} d\xi.$$

Таким образом, в согласии с известными формулами M_1 представляется оператором

$$\frac{1}{i}\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} S(1).$$

После того как спин с самого начала был включен в теорию, он должен, конечно, здесь опять проявить себя; но все-таки то, как это происходит, достаточно неожиданно и поучительно. Основные положения квантовой теории согласно этому имеют менее принципиальный характер, чем предполагалось первоначально. Они связаны со специальной величиной действия $\mathfrak{m}$. С другой стороны, эта связь подтверждает незаменимость величины $\mathfrak{m}$ в его роли действия материи. Лишь общая теория относительности, которая посредством свободной изменяемости величин $e^p(\alpha)$ приводит к свободному от произвола определению энергии, позволяет нам описанным способом завершить контуры квантовой теории.

§ 5. Гравитация

Мы опять воспользуемся изложением Эйнштейна классической теории гравитации и прежде всего определим риманов тензор кривизны [4]. Из точки P линейные элементы d и δ ведут в точки P_d и P_δ. Пусть линейный элемент δ так перенесен в P_d, а d — в P_δ, что они встречаются в общей для них точке P^*, лежащей напротив точки P, образуя некоторый инфинитезимальный «параллелограмм». Пусть репер e (α) в P параллельно переносится в P^* один раз по пути PP_dP^*, другой раз — по пути $PP_\delta P^*$. Получаемые таким образом в P^* два ортонормированных репера получаются друг из друга с помощью некоторого инфинитезимального вращения

$$\mathbf{P}_{pq}(dx)^p(\delta x)^q = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{pq}(\Delta x)^{pq},$$

где

$$(\Delta x)^{pq} = (dx)^p(\delta x)^q - (\delta x)^p(dx)^q$$

суть компоненты натянутого на dx и δx плоского элемента и матрица $\mathbf{P}_{pq}$ кососимметрична относительно p и q. Величины $\mathbf{P}_{pq}$ образуют кососимметрическую матрицу $\| r_{pq}(\alpha\beta) \|$; это и есть риманов тензор кривизны.

Вращение, которое переводит репер e (α) в точке P^* в репер в той же точке, получаемый параллельным переносом по первому пути из репера e* (α), задается в легко понятных обозначениях выражением

$$(1 + d\Omega)(1 + \delta\Omega(P_d)).$$

Разность этого выражения и того, которое получается из него перестановкой d и δ, равна

$$\{d(\delta\Omega) - \delta(d\Omega)\} + (d\Omega \cdot \delta\Omega - \delta\Omega \cdot d\Omega).$$

[4] См.: RZM, S. 119 u.s.w.

Имеем

$$d\Omega = \Omega_p\,(dx)^p,$$

$$\delta\,(d\Omega) = \frac{\partial\Omega_p}{\partial x_q}\,\delta x_q dx_p + \Omega_p \delta dx_p.$$

Так как параллелограмм замкнут, то $\delta dx_p = d\delta x_p$; поэтому окончательно

$$\mathbf{P}_{pq} = \left(\frac{\partial\Omega_q}{\partial x_p} - \frac{\partial\Omega_p}{\partial x_q}\right) + (\Omega_p\Omega_q - \Omega_q\Omega_p).$$

В скалярную кривизну

$$r = e^p\,(\alpha)\,e^q\,(\beta)\,r_{pq}\,(\alpha\beta)$$

первая, дифференциальная часть делает вклад

$$(e^q\,(\alpha)\,e^p\,(\beta) - e^q\,(\beta)\,e^p\,(\alpha))\,\frac{\partial o_p\,(\alpha\beta)}{\partial x_q}.$$

В $\mathfrak{r} = r/\varepsilon$ она добавляет, если пренебречь полной дивергенцией, два члена:

$$-\,2o\,(\beta,\,\alpha\beta)\,\frac{\partial e^q\,(\alpha)}{\partial x_q}$$

и

$$\frac{1}{\varepsilon}\,o_p\,(\alpha\beta)\left\{\frac{\partial e^p\,(\alpha)}{\partial x_q}\,e^q\,(\beta) - \frac{\partial e^p\,(\beta)}{\partial x_q}\,e^q\,(\alpha)\right\}.$$

Первый согласно (12) равен

$$-2o\,(\beta;\,\rho\beta)\,o\,(\alpha;\,\alpha\rho);$$

второй согласно (10) равен

$$2o\,(\alpha;\,\beta\gamma)\,o\,(\gamma;\,\alpha\beta).$$

Результатом является следующее выражение для плотности g действия гравитации:

$$\varepsilon\mathfrak{g} = o\,(\alpha;\,\beta\gamma)\cdot o\,(\gamma;\,\alpha\beta) + o\,(\alpha;\,\alpha\gamma)\cdot o\,(\beta;\,\beta\gamma). \tag{24}$$

Интеграл $\int \mathfrak{g} dx$ практически, но не в точности, инвариантен, ибо $\mathfrak{g}$ отличается от скалярной плотности $\mathfrak{r}$ на некоторую дивергенцию.

Вариация величин $e^p\,(\alpha)$ в полном интеграле действия

$$\int (\mathfrak{g} + \varkappa\mathfrak{h})\,dx$$

приводит к *гравитационным уравнениям* ($\varkappa$ — некоторая числовая константа).

Гравитационная энергия $\mathfrak{v}_p^q$ получается из $\mathfrak{g}$, если в координатном пространстве произвести инфинитезимальный *сдвиг* [5]:

$$x_p{}' = x_p + \xi^p,\ \xi^p = \text{const}.$$

[5] См.: RZM, S. 272 u.s.w.

Возникающая при этом вариация равна

$$\delta\mathfrak{e}(\alpha) = -\frac{\partial\mathfrak{e}(\alpha)}{\partial x_p}\xi^p.$$

$\mathfrak{g}$ является функцией от $e^p(\alpha)$ и производных $e_q{}^p(\alpha) = \partial e^p(\alpha)/\partial x_q$; полный дифференциал обозначим через

$$\delta\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p(\alpha)\,\delta e^p(\alpha) + \mathfrak{g}_p{}^q(\alpha)\,\delta e_q{}^p(\alpha).$$

Для возникающего при этом инфинитезимальном переносе координатного пространства изменения должно выполняться соотношение

$$\int \delta\mathfrak{g}\,dx + \int \frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial x_p}\xi^p dx = 0; \tag{25}$$

интеграл здесь берется по некоторой произвольной части мира. Имеем

$$\int \delta\mathfrak{g}\,dx = \int \left(\mathfrak{g}_p(\alpha) - \frac{\partial\mathfrak{g}_p{}^q(\alpha)}{\partial x_q}\right)\delta e^p(\alpha)\,dx + \int \frac{\partial\left(\mathfrak{g}_p{}^q(\alpha)\,\delta e^p(\alpha)\right)}{\partial x_q}\,dx.$$

Согласно уравнениям гравитации скобка в первом интеграле равна $-\varkappa t_p(\alpha)$, а сам интеграл равен

$$-\varkappa\int \mathfrak{t}_q(\alpha)\frac{\partial e^q(\alpha)}{\partial x_p}\xi^p dx.$$

Введем в рассмотрение величины

$$\mathfrak{v}_p{}^q = \delta_p{}^q\mathfrak{g} - \frac{\partial e^r(\alpha)}{\partial x_p}\,\mathfrak{g}_r{}^q(\alpha).$$

В соотношении (25) утверждается, что взятый по некоторой произвольной части мира интеграл от

$$\left(\mathfrak{v}_p{}^q - \varkappa\mathfrak{t}_q(\alpha)\frac{\partial e^q(\alpha)}{\partial x_p}\right)\xi^p$$

равен нулю. Поэтому должно обращаться в нуль подынтегральное выражение. Так как ξ^p — произвольные константы, то обращаются в нуль отдельные множители при ξ^p.

Таким образом, (21) превращается в чистое уравнение дивергенции

$$\frac{\partial(\mathfrak{v}_p{}^q + \varkappa\mathfrak{t}_p{}^q)}{\partial x_q} = 0$$

и $\mathfrak{v}_p{}^q/\varkappa$ оказывается гравитационной энергией.

Чтобы иметь возможность наряду с этим сформулировать в общей теории относительности настоящую дифференциальную теорему о сохранении момента импульса, надо специализировать координаты таким образом, чтобы когредиентное вращение всех реперов представлялось бы ортогональным преобразованием координат. Это наверняка возможно, однако более подробно мы не будем на этом останавливаться.

§ 6. Электрическое поле

Мы подошли теперь к критическому месту всей теории. По моему мнению, происхождение и необходимость электромагнитного поля обосновывается следующим. Компоненты ψ_1, ψ_2 в действительности определяются репером не однозначно, а лишь в такой степени, что они могут быть еще умножены на некоторый произвольный «калибровочный множитель» $e^{i\lambda}$ с абсолютным значением 1. Преобразование определено лишь с точностью до такого множителя, который получает ψ под воздействием некоторого вращения системы осей. В специальной теории относительности этот калибровочный множитель следует рассматривать как константу, так как здесь мы имеем единственный, не связанный с какой-либо точкой репер. По-другому обстоит дело в общей теории относительности. каждая точка имеет свой собственный репер и потому свой собственный произвольный калибровочный множитель; в силу того, что жесткая зависимость между реперами в различных точках ликвидирована, калибровочный множитель с необходимостью превращается в произвольную функцию точки. Но в таком случае не будет полностью фиксировано и инфинитезимальное линейное преобразование dE функции ψ, которое соответствует инфинитезимальному вращению $d\Omega$; а именно, dE можно изменять на любую чисто мнимую кратность $i \cdot df$ единичной матрицы. Таким образом, для однозначного определения ковариантного дифференциала $\delta\psi$ от ψ необходимо знать не только метрику в окрестности точки P, но и также матрицы df для каждого исходящего из P линейного элемента $\overrightarrow{PP'} = (dx)$. Для того чтобы $\delta\psi$, как и ранее, линейно зависело от dx,

$$df = f_p\,(dx)^p$$

должно быть линейной формой от компонент линейного элемента. Если заменить ψ на $e^{i\lambda}\cdot\psi$, то одновременно, как следует из формулы для ковариантного дифференциала, df должно замениться на $df - d\lambda$.

Отсюда следует, что к плотности действия $\mathfrak{m}$ надо добавить член

$$\frac{1}{\varepsilon} f(\alpha)\, s(\alpha) = \frac{1}{\varepsilon} f(\alpha) \cdot \psi^* S(\alpha)\, \psi = f_p \cdot \psi^* \mathfrak{S}^p \psi. \tag{26}$$

Отныне $\mathfrak{m}$ обозначает дополненную таким образом величину действия. С необходимостью выполняется калибровочная инвариантность в том смысле, что действие остается неизменным, если произвести замену

$$\psi \text{ на } e^{i\lambda}, \psi, f_p \text{ на } f_p - \frac{\partial\lambda}{\partial x_p},$$

где λ — произвольная функция точки. Согласно опыту электромагнитный потенциал действует на материю в точности таким образом, как это описано в (26). Мы имеем, следовательно, право отождествлять введенные здесь величины f_p с компонентами этого потенциала. Доказательство будет завершено, если мы покажем, что и наоборот: воздействие материи на f_p-поле описывается теми же самыми законами, которые согласно опыту выполняются для электромагнитного потенциального поля;

$$f_{pq} = \frac{\partial f_q}{\partial x_p} - \frac{\partial f_p}{\partial x_q}$$

является калибровочно инвариантным кососимметрическим тензором и

$$\mathfrak{l} = {}^1/_4 f_{pq}\mathfrak{f}^{pq} \tag{27}$$

есть характерная для теории Максвелла скалярная плотность.

С помощью вариаций функций f_p из

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{m} + a\mathfrak{l} \tag{28}$$

(a — некторая числовая константа) получаем уравнения Максвелла с величиной

$$-\mathfrak{s}^p = -\psi^*\mathfrak{S}^p\psi \tag{29}$$

в качестве плотности четырехмерного электрического тока.

Калибровочная инвариантность находится в тесной связи с законом сохранения электричества. Так как функция $\mathfrak{h}$ калибровочно инвариантна, то вариация $\delta\int\mathfrak{h}dx$ должна тождественно обращаться в нуль, если при фиксированных e^p (α) ψ и f_p варьируются согласно формулам

$$\delta\psi = i\lambda\cdot\psi, \qquad \delta f_p = -\frac{\partial\lambda}{\partial x_p};$$

здесь λ — некоторая произвольная функция точки. Это приводит к одному тождественно выполняющемуся соотношению между материальным и электромагнитными уравнениями. Если мы знаем, что выполняются материальные уравнения (в узком смысле), то, следовательно,

$$\delta\int\mathfrak{h}dx = 0,$$

если варьируются лишь f_p согласно равенствам $\delta f_p = -\partial\lambda/\partial x_p$.

С другой стороны, то же самое получается из электромагнитных уравнений при инфинитезимальной вариации $\delta\psi = i\lambda\cdot\psi$ лишь для ψ. Если $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} + a\mathfrak{l}$, то, объединяя оба случая, получаем

$$\delta\int\mathfrak{h}\cdot dx = \pm\int\psi^*\mathfrak{S}^p\psi\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x_p}dx = \mp\int\lambda\frac{\partial\mathfrak{s}^p}{\partial x_p}dx.$$

Аналогично обстоит дело для теорем сохранения импульса — энергии и момента импульса. Эти теоремы связывают материальные уравнения в широком смысле с гравитационными уравнениями и соответствуют инвариантности относительно преобразований координат и относительно произвольных независимых вращений локальных систем осей в различных мировых точках.

Из

$$\frac{\partial\mathfrak{s}^p}{\partial x_p} = 0 \tag{30}$$

следует, что поток

$$l = \int\mathfrak{s}^0 d\xi \tag{31}$$

векторной плотности $\mathfrak{s}^p$ через некоторое трехмерное сечение мира, в частности через сечение (22), не зависит как от положения сечения, так и от t. Не только

этот интеграл, но также и отдельно взятый интегральный элемент имеет инвариантный смысл; знак все же зависит от того, какое направление для трехмерного сечения считается положительным. Чтобы иметь возможность говорить о $\mathfrak{s}^0 d\xi$ как о пространственной вероятностной плотности, следует на эрмитову форму

$$e^0(\alpha)\cdot\psi^* S(\alpha)\,\psi \tag{32}$$

от переменных ψ_1, ψ_2 наложить требование определенности. Нетрудно убедиться в том, что это требование выполняется в случае, когда (22) фактически является пространственным сечением в P, т. е. когда лежащий в нем линейный элемент, исходящий из P, будет пространственноподобным. Для того чтобы форма (32) имела положительный знак, сечения $x_0 = \text{const}$, упорядоченные по возрастанию x_0, должны следовать друг за другом в задающемся вектором $\mathbf{e}(0)/i$ направлении будущего. При этом естественном ограничении на систему координат определяется полностью также и знак потока; инвариант (21) обычным способом нормируется с помощью условия

$$l \equiv \int \mathfrak{s}^0 d\xi = 1. \tag{33}$$

Объединяющая друг с другом $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{l}$ константа a превращается тогда в число, равное ch/e^2 (обратная величина к постоянной тонкой структуры).

Рассмотрим теперь ψ_1, ψ_2; f_p; $e^p(\alpha)$ как величины, изменяющиеся независимо друг от друга. Возникающую из $\mathfrak{m}$ плотность энергии $\mathfrak{t}_q{}^p$ следует увеличить в соответствии с дополнительным членом (26) на

$$f_p \mathfrak{s}^q - \delta_p{}^q (f_r \mathfrak{s}^r).$$

Это приводит к тому, что в специальной теории относительности энергии ставится в соответствие оператор

$$H = \sum_{p=1}^{3} S^p \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_p} + f_p\right),$$

так как

$$\int \psi^* \cdot H\psi \cdot d\xi$$

является ее значением. В таком случае материальные уравнения записываются, конечно, в виде

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_0} + f_0\right)\psi + H\psi = 0, \text{ а не } \frac{1}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x_0} + H\psi = 0,$$

как это до сих пор считалось в квантовой механике. Разумеется, к энергии материи добавляется электромагнитная энергия, для которой остается в силе классическое выражение Максвелла.

Что касается *физических измерений* (пространства), то в общей теории относительности следует естественно считать координаты x_p вещественными числами. Возникающие величины инвариантны не только относительно изменения мас-

штаба, но и относительно произвольных преобразований координат x_p. Если все $\mathfrak{e}$ (α) умножением на некоторую константу b превращаются в $b \cdot \mathfrak{e}$ (α), то одновременно, при сохранении нормировки (33), ψ должно замениться на $b^{3/2} \cdot \psi$. $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{l}$ при этом не меняются и, таким образом, будут абсолютными числами. Напротив, величина $\mathfrak{g}$ получает множитель $1/b^2$, так что $\varkappa$ будет квадратом некоторой длины d. $\varkappa$ не совпадает с гравитационной постоянной Эйнштейна, а получается из нее умножением на $2h/c$. Величина d значительно отличается от размера атома, она равна $\sim 10^{-32}$ см.

Таким образом, и здесь гравитация имеет значение лишь для астрономических проблем.

Если отказаться от гравитационного члена, то уравнения поля не будут содержать никакой размерной атомной константы. В двухкомпонентной теории нет места для такой величины действия, как член в теории Дирака, содержащий *массу* в качестве множителя [6]. Известно, однако, как, пользуясь законами сохранения, можно ввести массу. Предположим, что в «пустом объемлющем пространстве» частицы вне некоторой определенной мировой трубки, сечения $x_0 = \text{const}$ которой имеют конечные размеры, величины $\mathfrak{t}_p^q$ обращаются в нуль и e^p (α) принимают те же постоянные значения, что и в специальной теории относительности. В таком случае

$$J_p = \int \left(\mathfrak{t}_p^0 + \frac{1}{\varkappa} \mathfrak{v}_p^0 \right) d\xi$$

будут компонентами некоторого не зависящего от выбора системы координат и локальной системы осей, постоянного по времени четырехмерного вектора в окружающем пространстве. Теперь нормальная система координат может быть более точно фиксирована тем условием, что импульс (J_1, J_2, J_3) обращается в нуль; тогда — J_0 будет инвариантной и одновременно постоянной массой частицы. Теперь следовало бы считать, что эта масса имеет раз и навсегда заданное значение m.

Кроме обсуждавшейся здесь теории электромагнитного поля, которую я считаю правильной в силу того, что она так естественно возникает из предположения о произвольности калибровочного множителя в ψ и поэтому позволяет понять эмпирически выполняющуюся калибровочную инвариантность в связи с законом сохранения электричества, возможна еще и другая теория, которая связывает электричество с гравитацией. Член (26) имеет тот же вид, что вторая часть для $\mathfrak{m}$ в формуле (17); φ (α) играет ту же роль в этой теории, что и f (α) в предыдущей. Поэтому можно ожидать, что материя и гравитация, ψ и e^p (α), уже достаточны для того, чтобы объяснить электромагнитные явления, если рассматривать величины φ (α) как электромагнитный потенциал. Эти величины так зависят от e^p (α) и их первых производных, что имеет место инвариантность относительно произвольных преобразований координат. Что же касается вращений реперов, то φ (α) преобразуются как компоненты некоторого фиксированного вектора относительно репера только в том случае, когда

---

[6] Proc. Roy. Soc. London A, 1927, vol. 117, p. 610.

реперы во всех точках подвергаются одному и тому же вращению. Игнорируя материальное поле и учитывая лишь связь электричества и гравитации, приходим, таким образом, к теории электричества точно того вида, который был недавно исследован Эйнштейном. Все же дальний параллелизм был бы здесь лишь инсценирован.

Я убедился, что при этом с первого взгляда заманчивом подходе не получаются уравнения Максвелла. Далее, остается совершенно необъяснимой калибровочная инвариантность; кроме того, сам электромагнитный потенциал, а не только напряженность поля приобретает физическое значение. Поэтому я верю, что эта идея заводит на ложный путь и что мы скорее должны верить указанию, которое нам дает калибровочная инвариантность: электричество является сопутствующим явлением для материального волнового поля, а не для гравитации.

БАЗИС БИНАРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ИНВАРИАНТОВ, ПРИМЕНЯЕМЫЙ В ТЕОРИИ ВАЛЕНТНОСТИ*

В квантовомеханических вычислениях биполярных валентных связей некоторых молекул оказалось важным определить базис всех инвариантов, которые имеют заданные порядки $a, b, \ldots, c$ по отношению к некоторому количеству (n) бинарных векторов $x, y, \ldots, z$. Первый из авторов недавно дал простое решение этой задачи [1], которое было подсказано квантовомеханическими приложениями, но, по всей видимости, не известно в литературе по теории инвариантов. Здесь приводится более подробное математическое обоснование — в таком виде, что, как мы надеемся, и физик-теоретик, и математик легко сможет отвлечься от не существенного для него.

В основании понятия инварианта лежит группа γ всех унимодулярных линейных преобразований двух переменных, компонент x_1, x_2 произвольного бинарного вектора x ($x, y, \ldots, z$ преобразуются при этом когредиентно!). Классическая теория инвариантов по поводу нашего вопроса утверждает следующее:

1. Основная теорема. Каждый инвариант является линейной комбинацией «одночленов», т. е. произведений степеней скобочных выражений вида

$$[xy] = x_1y_2 - x_2y_1. \tag{1}$$

Конечное число одночленов, которые относительно векторов $x, y, \ldots, z$ имеют заранее предписанные порядки, не являются, однако, линейно независимыми друг от друга; выполняется относящееся к четырем векторам x, y, z, l тождество [1]

$$[xl]\,[yz] + [yl]\,[zx] + [zl]\,[xy] = 0. \tag{2}$$

2. Основная теорема. Все линейные соотношения между одночленами получаются (в некотором алгебраически уточняемом смысле) из одного тождества (2).

Мы будем опираться здесь на первую, но не на вторую основную теорему; напротив, из наших рассуждений получается новое доказательство второй основной теоремы.

В квантовой механике буквы $x, y, \ldots, z$ обозначают атомы, которые образуют некоторую молекулу; $a, b, \ldots, c$ — их валентности. Каждый инвариант требуемого порядка представляет некоторое спиновое состояние молекулы. Определяемое одночленом «чистое валентное состояние» химик наглядно представляет себе в виде схемы валентности, в которой атомы являются точками и каждое скобочное выражение $[xy]$ используется для обозначения соединяющего два

* Eine für die Valenztheorie geeignete Basis der binären Vektorinvarianten.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., 1932, S. 499—504 (Rumer G., Teller E., Weyl H.). Перевод С. П. Демушкина.

[1] Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., 1932, Bd. 22, Juli.

атома x и y направленного отрезка. $a, b, \ldots, c$ являются тогда числами отрезков валентности, исходящих из каждого отдельного атома $x, y, \ldots, z$ при схеме валентности, соответствующей данному одночлену. Обычно точки $x, y, \ldots, z$ считают расположенными на некоторой окружности. Правило, которое следует доказать, выражается тогда в таком виде:

Каждый инвариант J является линейной комбинацией таких одночленов, схема валентности которых не содержит пересекающихся отрезков валентности. Одночлены со схемой валентностей без пересечений линейно независимы друг от друга.

При доказательстве первой части можно, согласно первой основной теореме, предположить, что инвариант J является одночленом, который изображен своей схемой валентности S. Она состоит из N отрезков, соединяющих n точек $x, y, \ldots, z$. Мы основываемся на том, что при помощи соотношения (2)

x z

y l

(3)

можно избавиться от пересечений [2]. Конечно, это замечание не дает все, что нужно, ибо если в некоторой сложной схеме мы избавляемся от пересечения двух отрезков валентности, то при этом в общем случае другие пересечения частично тоже изгоняются, а частично возникают новые. Однако цель может быть достигнута при помощи некоторого подходящего рассуждения по индукции следующим образом.

Если две точки xy схемы S соединены отрезком валентности, то мы называем каждую из двух дуг окружности xy дугой валентности. Длиной дуги валентности xy считаем число лежащих на ней точек, причем конечные точки x и y дают вклад по половине. Если дуга xy, кроме x, y, не содержит других точек, то она имеет, следовательно, длину 1. Мы утверждаем, что при помощи соотношения (2), соответственно (3), заданный одночлен можно записать в виде линейной комбинации таких одночленов, схема валентности которых не имеет пересечений.

а) Если в S входит дуга валентности xy длины 1, то отрезок xy опускаем. При этом возникает схема S', которая состоит лишь из $N-1$ отрезков. Предполагая, что для таких схем наша теорема уже установлена, мы можем S' записать в виде линейной комбинации схем S_1', S_2', ... без пересечений. В них после всего проделанного мы вставляем опять всюду отрезок валентности xy; при этом не появляется никакого пересечения. Таким образом, при помощи перехода от $N-1$ к N уже рассмотрен случай, когда в схеме имеется дуга валентности длины 1.

а) Если это не так, то мы пытаемся редуцировать S к схеме, в которую входит дуга валентности длины 1. Пусть xy — дуга валентности кратчайшей длины в схеме S (или одна из таких дуг). Согласно предположению, на ней лежит

[2] На рисунке направления отрезков валентности опущены.

по крайней мере еще одна точка z. Исходящий из z отрезок валентности не может вести ни в одну точку дуги xy, так как в противном случае имелась бы более короткая, чем xy, дуга валентности. Следовательно, имеем пересечение $[xy]$ $[zl]$. Заменяя это пересечение в соответствии с соотношением (2), получаем представление нашего одночлена в виде суммы двух одночленов, в схему которых входит более короткая дуга валентности, чем xy, а именно поддуги xz, yz дуги xy. Тем самым получен процесс сведения к более коротким дугам, который должен в конце концов привести к дугам валентности длины 1.

Проведенное доказательство приводит, кроме того, к такому арифметическому следствию: каждый одночлен является *целочисленной* комбинацией одночленов со схемой валентности без пересечений [2].

Второй результат, а именно, что *между одночленами со схемами без пересечений нет линейных соотношений*, мы установим при помощи двойного подсчета: число схем без пересечений совпадает с числом линейно независимых инвариантов. Для вычисления числа линейно независимых инвариантов квантовая теория в этой связи предоставляет сама по себе следующую возможность.

Произведения степеней переменных x_1, x_2 порядка a: $x_1{}^a$, $x_1{}^{a-1}\,x_2$, ..., $x_1x_2{}^{a-1}$, $x_2{}^a$, задают пространство некоторого представления Γ_a группы γ степени $a+1$. Согласно результату Клебша—Гордана, выполняется фундаментальное соотношение [3]

$$\Gamma_a \times \Gamma_b = \sum_v \Gamma_v (v = a+b, a+b-2, \ldots, |a-b|). \quad (4)$$

Отсюда по индукции следует соответствующее разложение для произведения n множителей Γ_a, Γ_b, ..., Γ_c:

$$\Gamma_a \times \Gamma_b \times \ldots \times \Gamma_c = \sum_u N_u \Gamma_u. \quad (5)$$

Если требуется более точное обозначение, то мы записываем неотрицательное число N_u в виде N_u $(a, b, \ldots, c)$. Коэффициент N_0 указывает, сколько раз в произведении (5) содержится тождественное представление Γ_0, т. е. $N_0 = N\,(a, b, \ldots, c)$ есть число линейно независимых инвариантов, которые от n векторных аргументов $x, y, \ldots, z$ имеют заданные порядки $a, b, \ldots, c$. Но и N_u можно истолковать подобным же образом. А именно, умножим равенство (5) еще на Γ_v и обратим внимание на то, что в $\Gamma_u \times \Gamma_v$ согласно (4) лишь в том случае встречается слагаемое Γ_0 и притом с коэффициентом 1, когда $u = v$, так что

$$\Gamma_a \times \Gamma_b \times \ldots \times \Gamma_c \times \Gamma_v = N_v\,(a, b, \ldots, c)\,\Gamma_0 + \ldots$$

Таким образом, получаем, что

$$N_v\,(a, b, \ldots, c) = N\,(a, b, \ldots, c, v), \quad (6)$$

числу линейно независимых инвариантов, зависящих от $n+1$ векторных аргументов $x, y, \ldots, z, l$ порядков $a, b, \ldots, c, v$. В $N_v\,(a, b, \ldots, c)$ индекс v играет лишь внешне отличную от чисел $a, b, \ldots, c$ роль.

Равенство (4) означает на языке квантовой теории: если конфигурация валентности a (с моментом спина $a/2$) взаимодействует с конфигурацией валентности b, то результирующий спин принимает в каком-либо состоянии такие ве-

личины $v/2$, к которым могут привести спиновые векторы длин $a/2$ и $b/2$:

$$\left|\frac{a-b}{2}\right| \leqslant \frac{v}{2} \leqslant \left|\frac{a+b}{2}\right|.$$

В квантовой механике сверх происходящего из классической механики принципа сложения векторов требуется, чтобы получающийся в результате спин $v/2$ не только, как и первоначальные спины $a/2$ и $b/2$, был бы целым числом, деленным на 2, но и отличался бы на целое число от $(a+b)/2$. Следовательно, $N_v(a, b, \ldots, c)$ задает число различных конфигураций, в которых спины величин $a/2, b/2, \ldots, c/2$ могут привести к результирующему спину $v/2$. (То обстоятельство, что v не играет отличной от $a, b, \ldots, c$ роли, можно выразить таким образом, что отрезки v свободных валентностей, которые ведут в «пустоту», объединяются в некотором фиктивном «пустом» атоме l.) Наглядное объяснение с помощью этой векторной модели приводит к возможности выразить условия суммирования в (4) в более симметричном виде: целые числа a, b, c должны быть длинами сторон некоторого треугольника:

$$a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ v \geqslant 0;\ a \leqslant b+v,\ b \leqslant v+a,\ v \leqslant a+b,$$

периметр которого $a+b+v$ четен. В этом случае мы говорим: a, b, v образуют четный треугольник.

Числа $N_v(a, b, \ldots, c)$ определяются согласно выводу формулы (5) из (4) по индукции; умножая (5) на Γ_d, получаем

$$\Gamma_a \times \Gamma_b \times \ldots \times \Gamma_c \times \Gamma_d = \sum_v N_v(a, b, \ldots, c)(\Gamma_v \times \Gamma_d),$$

а отсюда, применяя (4), имеем

$$N_u(a, b, \ldots, c, d) = \sum_v N_v(a, b, \ldots, c).$$

Сумма распространяется на все числа v, которые вместе с u и d образуют четный треугольник. Записывая в соответствии с (6) индекс u, соответственно v, также как аргумент, получаем в конце концов, немного в другом обозначении, следующую рекуррентную формулу для числа линейно независимых инвариантов $N(a, \ldots, b, c)$ заданных порядков $a, \ldots, b, c$:

$$N(a, \ldots, b, c, c') = \sum_v N(a, \ldots, b, v), \tag{7}$$

где суммирование происходит по таким v:

$$v = c+c',\ c+c'-2, \ldots, |c-c'|,$$

которые образуют с c, c' четный треугольник. При одном аргументе $N(a) = 1$ или 0 соответственно тому, будет ли $a = 0$ или >0.

Мы покажем теперь, что *та же самая рекуррентная формула выполняется для числа $N(a, \ldots, b, c)$ схем без пересечений*, при которых n точек на круге $x, \ldots, y, z$ соединены так, что из них выходит заданное число отрезков $a, \ldots, b, c$. Точки z, z', с которыми связаны числа c, c', могут быть переведены одна в другую при некотором определенном, «положительном» движении по окружно-

сти. Доказательство (7) будет получено тем, что мы стянем обе точки z, z' в некоторую единственную z. Если z с z' в заданной схеме S_{n+1} соединена r отрезками, $r \leqslant c$, $r \leqslant c'$, то мы их опускаем и направляем остающиеся $c - r$ и $c' - r$, входящие в z и z' соответственно, в одну, взятую вместо z и z' точку z. Таким образом, из S_{n+1} получается некоторая схема S_n для n точек $x, \ldots, y, z$, при которой в z входит

$$v = (c - r) + (c' - r) = c + c' - 2r$$

отрезков, при этом числа $a, \ldots, b$ входящих в другие точки $x, \ldots, y$ отрезков не меняются. Кроме того, каждая схема S_n $(a, \ldots, b, v)$ получается этим способом из одной и только одной схемы S_{n+1} $(a, \ldots, b, c, c')$, если предположить, что v вместе с c, c' образует четный треугольник. А именно, число r связывающих отрезков в zz' при схеме S_{n+1} определяется из равенства

$$2r = c + c' - v,$$

и согласно требованию непересечения однозначно определено этим, так как v отрезков, исходящих из z при схеме S_n, следует разделить между z и z' при переходе к S_{n+1}. Упорядочим эти v отрезков таким образом, чтобы их конечные точки последовательно пробегались при отрицательном движении по кругу от z к z': первые $c - r$ отрезков следует сделать исходящими из z, последние $c' - r$ из z'.

Можно сказать, что при помощи нашего рассуждения многообразие схем валентности без пересечений взаимно однозначно отображается на многообразие построенных из атомных спинов векторных моделей молекул.

Так как мы установили, что каждый одночлен может быть превращен в некоторую линейную комбинацию одночленов без пересечений исключительно при помощи соотношения (2), причем последние независимы, то нами заново доказана вторая основная теорема. Если бы можно было каким-либо способом непосредственно убедиться в том, что одночлены со схемой валентности без пересечений линейно назависимы, то из нашего двойного подсчета получалось бы доказательство первой основной теоремы: ибо тогда было бы известно, что полный базис для инвариантов имеется уже в виде одночленов со схемой валентности без пересечений.

СПИНОРЫ РАЗМЕРНОСТИ n*

Введение и краткое изложение результатов

Пусть $\mathfrak{d}_n$ — группа ортогональных преобразований o:

$$x_i \to \sum_{k=1}^{n} o(ik)\, x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

n-мерного пространства и $\mathfrak{d}_n^+$ — подгруппа собственных преобразований, имеющих определитель $+1$. Вначале мы будем действовать в континууме всех комплексных чисел, тогда как специальные условия, возникающие при переходе к вещественным переменным, будут изучаться только в конце работы (§ 8 и 10). Данное представление $\Gamma : o \to G(o)$ степени N определяет некоторый род «ковариантных величин»: величина, характеризующаяся N числами $a_1, \ldots, a_N$ относительно произвольной декартовой системы координат в основном n-мерном евклидовом пространстве, будет называться *величиной рода* Γ при условии, что компоненты a_K испытывают линейное преобразование $G(o)$ под влиянием преобразования координат o. Величина называется *примитивной*, если представление неприводимо. Предложение, что любое представление разлагается на неприводимые компоненты, показывает, что величины наиболее общего рода возникают из сопоставления нескольких независимых примитивных величин.

Тензором ранга f мы будем называть то, что обычно называется кососимметрическим тензором: кососимметрическая функция $\alpha(i_1, \ldots i_f)$ от f индексов, пробегающих независимо значения от 1 до n, которая преобразуется по закону

$$\alpha(i_1 \ldots i_f) \to \sum_{k_1, \ldots, k_f=1}^{n} o(i_1k_1) \ldots o(i_fk_f) \cdot \alpha(k_1 \ldots k_f)$$

под влиянием вращения o. Тензоры ранга f образуют пространство представления Γ_f степени $\binom{n}{f}$. Мы часто должны делать различие между четномерным и нечетномерным случаем и мы будем полагать соответственно $n = 2\nu$ или $n = 2\nu + 1$. Будем использовать обозначения $\nu = \langle n \rangle$ и, кстати, отметим сравнение

$$\tfrac{1}{2}n\,(n-1) \equiv \langle n \rangle \pmod 2.$$

Э. Картан развил общий метод построения неприводимых представлений $\mathfrak{d}_n$ (или любой другой полупростой группы), рассматривая инфинитезимальные преобразования, и нашел [1], что в качестве основных следует взять тензорные

---

* Spinors in n dimensions.— Amer. J. Math., 1935, vol. 57, № 2, p. 425—449. (Brauer R., Weyl H.). Перевод Ф. А. Богомолова.

[1] *Cartan E.*— Bull. Soc. math. France, 1913, vol. 41, p. 53. Ср. также: *Weyl H.*— Math. Ztschr., 1926, Bd. 24, S. 342.

представления Γ_f вместе с *еще одним двузначным представлением* $\Delta : 0 \to S\,(o)$ *степени* 2^ν. Величины рода Δ называются *спинорами*. В четырехмерный мир этот род величин вошел благодаря теории Дирака электрона со спином. Картан своим способом установил закон преобразования $S\,(o)$ спиноров только для бесконечно малых вращений o. Здесь мы дадим простое конечное описание представления Δ и выведем из него простейшими алгебраическими методами свойства спиноров. С помощью этой теории легко проверить, в какой степени последние результаты в спинорном исчислении сохраняют неизменными свои основные черты при переходе к высшим размерностям. Одним из главных результатов будет то, что уравнение Дирака движения электрона и выражение для электрического тока однозначно определены даже в случае произвольной размерности. Наше исследование построено следующим образом: мы начинаем (§ 2) с некоторой ассоциативной алгебры Π размерности $2^{2\nu}$, о которой доказывается, что она является полной матричной алгеброй порядка 2^ν и это приводит к желаемому определению Δ (§ 3). Мы сперва получаем Δ как проективное представление, такое, что только отношения компонент спинора имеют определенные значения. В случае четной размерности $n = 2\nu$ мы докажем (§ 3), что произведение [1] $\Delta \times \breve{\Delta}$, Δ и контрагредиентного представления $\breve{\Delta}$ распадается в прямую сумму, так что имеется эквивалентность

$$\Delta \times \breve{\Delta} \sim \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_n,$$

в то время как в нечетном случае

$$\Delta \times \breve{\Delta} \sim \Gamma_0 + \Gamma_2 + \Gamma_4 + \ldots + \Gamma_{n-1}$$

(§ 5). Проективное представление Δ может быть нормализовано так, чтобы получилось обычное, хотя и *двузначное* [2] представление, удовлетворяющее эквивалентности $\breve{\Delta} \sim \Delta$ (§ 4, 5). Если мы ограничимся собственными ортогональными преобразованиями в пространстве четной размерности, то Δ разлагается на два представления Δ^+ и Δ^-, каждое степени $2^{\nu-1}$ (§ 6). Будут определены отдельно четыре произведения типа $\Delta \times \breve{\Delta}$, $\Delta = \Delta^+$ или Δ^- и то же самое проделано для эквивалентностей типа $\breve{\Delta} \sim \Delta$. Переход от нашего конечного к картановскому инфинитезимальному описанию осуществляется без труда (§ 7). При рассмотрении только вещественных преобразований следует принять во внимание различие между индексами инерции (§ 8). Будет доказано, что $\breve{\Delta}$ опять эквивалентно Δ, но с точностью до знака, определение которого имеет особый интерес и тесно связано с индексом инерции. Неприводимость и эквивалентность возникающих представлений будет установлена в § 9, и отношение к физике будет обсуждаться в § 10. В разных частях исследования нам придется обращаться к закону двойственности для тензоров и тензорных представлений Γ_f, как он сформулирован в предварительном § 1. Последний раздел (§ 11) посвящен доказательству хорошо известного фундаментального утверждения, относящегося к автоморфизмам полных матричных алгебр и необходимого для определения Δ.

§ 1. Двойственность тензоров

Γ_n — это представление степени 1 полной группы вращений $\mathfrak{b}_n$, которое сопоставляет знак $\sigma(o)$ вращению $o : \sigma(o) = +1$ для собственных, $o : \sigma(o) = -1$ для несобственных вращений [3]. Любое представление $\Gamma : o \to G(o)$ порождает другое представление $\sigma\Gamma : o \to \sigma(o)\, G(o)$, совпадающее с Γ при ограничении на $\mathfrak{b}_n^+$. Уравнение

$$\alpha^*(i_1' \ldots i_{n-f}') = \alpha(i_1 \ldots i_f), \qquad (2)$$

в котором $i_1 \ldots i_f i_1' \ldots i_{n-f}'$ обозначает любую четную перестановку чисел от 1 до n, сопоставляет тензор α^* ранга $n-f$ каждому тензору α ранга f. Это соответствие *инвариантно* относительно собственных ортогональных преобразований [4].

Таким образом, *закон двойственности* $\Gamma_{n-f} \sim \Gamma_f$ имеет место для тензорных представлений Γ_f группы $\mathfrak{b}_n^+$. Если допустить к рассмотрению несобственные ортогональные преобразования, он должен быть изменен на

$$\Gamma_{n-f} \sim \sigma\Gamma_f.$$

В случае четной размерности $n = 2\nu$ представление Γ_ν заслуживает особого внимания. Для него $\sigma\Gamma_\nu \sim \Gamma_\nu$. Соотношение (2) или лучше соотношение

$$\alpha^*(i_1' \ldots i_\nu') = i^{\nu'} \cdot \alpha(i_1 \ldots i_\nu) \qquad (3)$$

задает теперь преобразование $\alpha \to \alpha^*$ пространства тензоров ранга ν *на себя*. Мы добавили множитель i^ν с тем, чтобы сделать это преобразование инволютивным: $\alpha^{**} = \alpha$, так как если $i_1 \ldots i_\nu i_1' \ldots i_\nu'$ — четная перестановка, то $i_1' \ldots i_\nu' i_1 \ldots i_\nu$ имеет характер $(-1)^\nu$. Мы можем разделить тензоры ранга ν на положительные и отрицательные согласно тому будет ли $\alpha^* = \alpha$ или $\alpha^* = -\alpha$. Любой тензор ранга ν может быть разложен единственным образом на положительную и отрицательную части:

$$\alpha = {}^1/_2(\alpha + \alpha^*) + {}^1/_2(\alpha - \alpha^*).$$

Следовательно, как представление группы $\mathfrak{b}_{2\nu}^+$, Γ_ν разлагается на два представления $\Gamma_\nu^+ + \Gamma_\nu^-$ половинной размерности.

§ 2. Алгебра П

Наш метод в точности тот же, которому следовал Дирак в своей классической работе об электроне [2]. Мы вводим n величин p_i, которые превращают фундаментальную квадратичную форму в квадрат линейной формы

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = (p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)^2. \qquad (4)$$

С этой целью мы должны иметь

$$p_i^2 = 1, \quad p_k p_i = -p_i p_k \quad (k \neq i). \qquad (5)$$

[2] *Dirac P. A. M.*— Proc. Roy. Soc. London A, 1927, vol. 117, p. 610; 1928, vol. 118, p. 351.

Величины p_i порождают алгебру, состоящую из всех линейных комбинаций 2^n единиц

$$e_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ — целые mod } 2). \tag{6}$$

Способ умножения единиц вводится согласно (5):

$$e_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\cdot e_{\beta_1\ldots\beta_n} = (-1)^\delta\cdot e_{\gamma_1\ldots\gamma_n};\quad \gamma_i = \alpha_i + \beta_i;\qquad \delta = \sum_{i>k}\alpha_i\beta_k.$$

Каждый легко проверит, что этот закон умножения ассоциативен. Можно записать наиболее общую величину a из нашей алгебры в виде

$$a = \ldots + (1/f!)\sum_{(i_1,\ldots,i_f)}\alpha(i_1\ldots i_f)\,p_{i_1}\ldots p_{i_f} + \ldots\qquad (f = 0, 1, \ldots, n), \tag{7}$$

разлагая a на части в соответствии с числом f различных множителей вроде $p_{i_1}, \ldots, p_{i_f}$. Так как произведение f различных p_i кососимметрично по индексам $i_1, \ldots i_f$, то можно выбрать коэффициенты $\alpha(i_1, \ldots, i_f)$ в (7) кососимметрическими и проводить суммирование по индексам $i_1, \ldots, i_f$, независимо меняющимся от 1 до n. Следовательно, величина a эквивалентна «множеству тензоров», состоящему из $n+1$ тензора по одному каждого ранга $0, 1, \ldots, f, \ldots \ldots, n$. Сумма двух наборов тензоров и умножение набора на число имеет очевидный смысл в алгебре П. Но как выразить умножение двух наборов тензоров a и b? Достаточно описать случай, когда a содержит ровно один тензор α ранга f, b содержит в точности один тензор β ранга q (тогда как остальные исчезают). Произведение разлагается на разные компоненты соответственно числу r совпадений среди индексов α и β. Так как

$$p_{i_1}\ldots p_{i_{f-r}}p_{l_1}\ldots p_{l_r}p_{l_1}\ldots p_{l_r}p_{k_1}\ldots p_{k_{q-r}} = (-1)^{r(r-1)/2}\cdot p_{i_1}\ldots p_{i_{f-r}}p_{k_1}\ldots p_{k_{q-r}},$$

получаем в качестве r-части произведения в сущности «стягивание»

$$\gamma(i_1\ldots i_{f-r}k_1\ldots k_{q-r}) = \sum_{(l_1,\ldots,l_k)}\alpha_1(i_1\ldots i_{f-r}l_1\ldots l_r)\cdot\beta(l_1\ldots l_r k_1\ldots k_{q-r}). \tag{8}$$

За этим процессом должно следовать «альтернирование», т. е. сложение с переменой знака по всем перестановкам $f+q-2r$ индексов γ. Так как γ уже кососимметрично по $f-r$ индексам i и $q-r$ индексам k, достаточно распространить альтернированную сумму на все «смеси» индексов $i_1\ldots i_{f-r}$ с индексами $k_1\ldots k_{q-r}$. Будем обозначать это символом М. Принимая во внимание множитель $1/f!$ при f-члене в (7) и все различные распределения r-индексов $l_1, \ldots, l_r$ среди индексов α, β, получаем следующий результат: «произведение» тензоров α и β есть набор тензоров, в котором встречаются только тензоры ранга $f+q-2r$; целое число r заключено в границы

$$r \geqslant 0,\quad 2r \geqslant f+g-n,\quad r\leqslant f,\quad r\leqslant q$$

r-часть задается как

$$(-1)^{\langle r\rangle}(1/r!)\cdot \mathrm{M}\gamma(i_1\ldots i_{f-r}k_1\ldots k_{q-r}),$$

где γ обозначает «стягивание» (8). Мы не столько заинтересованы в точном описании операции умножения, сколько в том факте, что *оно является ортогонально инвариантным.*

§ 3. Спиноры в пространстве четной размерности

В этом параграфе мы предполагаем $n=2\nu$ четно. Алгебра П известна специалистам по квантовой теории из операции «суперквантования», которая позволяет перейти от теории одной частицы к теории произвольного числа одинаковых частиц, подчиненных статистике Ферми. Эта связь мгновенно приводит к определенному представлению $p_i \to P_i$ матрицами P_i порядка 2^ν. В это описание входят двустрочные матрицы [5]

$$\mathbf{1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{1}' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}.$$

Две строки и два столбца различаются друг от друга знаками $+$ и $-$. $\mathbf{1}'$, P, Q антикоммутируют друг с другом, их квадраты равны 1. Вместо $p_1, \ldots, p_{2\nu}$ мы иногда используем обозначение $p_1, \ldots, p_\nu, q_1, \ldots, q_\nu$. Представление тогда задается с помощью [6]

$$\left.\begin{aligned} p_\alpha \to P_\alpha &= \mathbf{1}' \times \ldots \times \mathbf{1}' \times P \times \mathbf{1} \times \ldots \times \mathbf{1} \\ q_\alpha \to Q_\alpha &= \mathbf{1}' \times \ldots \times \mathbf{1}' \times Q \times \mathbf{1} \times \ldots \times \mathbf{1} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu). \quad (9)$$

С правой стороны стоит ν множителей; множители P, Q соответственно возникают на α-месте. Строки и столбцы наших матриц, или координаты x_A в 2^ν-мерном пространстве представления, согласно введенным обозначениям различаются друг от друга набором знаков $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$, $(\sigma_\alpha = \pm)$. Легко проверить, что имеют место требуемые равенства

$$P_i^2 = 1, \quad P_k P_i = -P_i P_k \ (i \neq k). \quad (10)$$

Таким образом, мы ввели определенное *представление* $x \to X$ степени 2^ν алгебры П. Мы утверждаем, что *все матрицы X являются образами элементов алгебры.* Так как алгебра П той же размерности $2^{2\nu} = (2^\nu)^2$, что и алгебра, состоящая из всех матриц в 2^ν-мерном пространстве, соотношения $x \rightleftarrows X$ являются взаимно однозначным отображением П на полную матричную алгебру 2^ν-мерного «спин-пространства»: алгебра П изоморфна полной матричной алгебре в спиновом пространстве. Чтобы доказать наше утверждение, вычислим матрицу U_α, представляющую $\alpha = i p_\alpha q_\alpha$:

$$U_\alpha = i P_\alpha Q_\alpha = \mathbf{1} \times \ldots \times \mathbf{1} \times \mathbf{1}' \times \mathbf{1} \times \ldots \times \mathbf{1}, \quad (11)$$

а также

$$U_1 \ldots U_{\alpha-1} P_\alpha = \mathbf{1} \times \ldots \times \mathbf{1} \times P \times \mathbf{1} \times \ldots \times \mathbf{1}$$

и $U_1 \ldots U_{\alpha-1} Q_\alpha$ (множители, отличные от 1, возникают на α-месте).

Итак, следующие элементы:

$$\frac{1}{2}(1+u_\alpha)=z_\alpha^{++},\qquad \frac{1}{2}u_1\ldots u_{\alpha-1}(p_\alpha-iq_\alpha)=z_\alpha^{+-},$$

$$\frac{1}{2}u_1\ldots u_{\alpha-1}(p_\alpha+iq_\alpha)=z_\alpha^{-+},\qquad \frac{1}{2}(1-u_\alpha)=z_\alpha^{--},$$

представляются произведениями, подобными (11), но содержащими одну из матриц

$$\begin{Vmatrix}1&0\\0&0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix}$$

на α-месте. Следовательно, образ элемента

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu}(z_\alpha^{\sigma_\alpha\tau_\alpha})$$

— это матрица, содержащая элемент, отличный от нуля, а именно 1, только в точке пересечения строки $\sigma_1\ldots\sigma_\nu$ со столбцом $\tau_1\ldots\tau_\nu$ ($\sigma_\alpha=\pm$, $\tau_\alpha=\pm$).

Мы теперь в состоянии показать связь с вращениями $o=\|o(ik)\|$ в n-мерном пространстве (метод A).

Сделаем замену с помощью ортогональной матрицы

$$P_i\to P_i^*=\sum_{k=1}^{n}o(ki)P_k,\qquad P_i=\sum_{k=1}^{n}o(ik)P_k^* \tag{12}$$

и отметим сразу же, что новые P_i^*, так же как и старые, удовлетворяют соотношениям (10) [7]. Следовательно, $p_i\to P_i^*$ определяет новое представление нашей алгебры П. *Так как, однако, полная матричная алгебра допускает только внутренние автоморфизмы* [3], это представление должно быть эквивалентно начальному, т. е. существует невырожденная матрица $S(o)$, такая, что

$$P_i^*=S(o)P_iS(o)^{-1}\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$S(o)$ определена этим уравнением с точностью до численного множителя, «калибровочного множителя»: $S(o)$ приходится интерпретировать в «однородном» смысле, не как линейное преобразование 2^ν-мерного векторного пространства, но как коллинеацию проективного пространства его лучей. Фиксируя калибровочные множители для двух вращений o, o' и их произведения $o'o$ произвольным образом, мы обязательно получаем соотношение типа

$$S(o'o)=c\cdot S(o')\,S(o).$$

Следовательно, мы имеем дело с *проективным представлением* степени 2^ν группы вращений, так называемым *спин-представлением* Δ: $o\to S(o)$. Эта же связь может быть описана следующим образом (метод B). Ортогональное преобразование тензоров из произвольного набора тензоров определяет отображение $x\to x^*$ алгебры П наборов тензоров в себя [8]. Такое отображение, однако, в представлении $x\to X$ тензорных наборов матрицами порядка 2^ν, обязатель-

[3] Доказательство см. в § 11.

но имеет вид
$$X \to X^* = SXS^{-1} \quad (S \text{ не зависит от } x) \qquad [9].$$

Распишем это уравнение по компонентам: $X = \| x_{JK} \|$, тогда оно принимает вид
$$x^*_{JK} = \sum_{R,\,T} s_{JR} \check{s}_{KT} x_{RT}.$$

$\check{S} = \| \check{s}_{JK} \|$ — матрица, обратная к S. Следовательно, компоненты x_{JK} испытывают преобразование $S \times \check{S}$, а это доказывает разложение
$$\Delta \times \check{\Delta} \sim \Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n \sim \begin{Bmatrix} \Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_{\nu-1} + \\ \sigma\Gamma_0 + \sigma\Gamma_1 + \ldots + \sigma\Gamma_{\nu-1} \end{Bmatrix} + (\Gamma_\nu \sim \sigma\Gamma_\nu). \quad (15)$$

Величины $\{\psi^A\}$ и $\{\varphi_A\}$ родов Δ, $\check{\Delta}$ будут называться *ковариантными и контравариантными спинорами* соответственно. Запишем компоненты ψ^A ковариантного спинора в столбец, а компоненты φ_A контравариантного спинора в строку. Наше последнее уравнение показывает, что можно сформировать из линейной комбинации $(2^\nu)^2$ произведений $\varphi_A\psi^B$ один скаляр, один вектор, один тензор ранга два и т. д. Скаляр — это, конечно,
$$\varphi\psi = \sum_A \varphi_A \psi^A.$$

Вектор имеет компоненты $\varphi P_i \psi$. Действительно, производя преобразование $\psi^* = S\psi$, $\varphi^* = \varphi S^{-1}$, получаем
$$\varphi^* P_i \psi^* = \varphi S^{-1} P_i S \psi = \sum_{k=1}^{n} o(ik)\, \varphi S^{-1} P_k{}^* S \psi = \sum_{k=1}^{n} o(ik)\, \varphi P_k \psi.$$

Тензор ранга 2 имеет компоненты $\varphi\,(P_i P_k)\,\psi$ $[i \neq k]$ и т. д. Этим путем можно осуществить разложение (15) явно.

§ 4. Связь между ковариантными и контравариантными спинорами

Пусть n — четно, как и ранее. Мы покажем, что *представление* $\check{\Delta}$ *эквивалентно представлению* Δ. Для этой цели заметим, что соотношения (10), характеристические для матриц P_i, справедливы также для транспонированных матриц P_i'. Согласно предложению об автоморфизмах нашей матричной алгебры П, которым мы уже имели случай воспользоваться, должна существовать некоторая невырожденная матрица C такая, что
$$P_i' = CP_iC^{-1} \text{ для всех } i. \qquad (16)$$

Легко описать C явно. Мы имеем
$$P_\alpha' = P_\alpha, \quad Q_\alpha' = -Q_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu).$$

Но произведение $p_1 \ldots p_\nu$ коммутирует с p_α и антикоммутирует с q_α, если ν нечетно; а если ν четно, то наоборот. Поэтому можно взять
$$c = p_1 \ldots p_\nu \text{ или равным } q_1 \ldots q_\nu$$

согласно тому, нечетно ν или четно. Таким образом, находим в обоих случаях

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \ldots \text{ (}\nu\text{ множителей)}, \tag{17}$$

и легко проверить в обоих случаях соотношения (16).

Вследствие (12) мы имеем

$$P_i' \to P_i^{*'} = \sum_k o(ik) P_k'.$$

Этот переход выражается, с одной стороны, в виде

$$P_i' \to S'(o)^{-1} P_i' S'(o) = \check{S}(o) P_i' \check{S}(o)^{-1}.$$

С другой стороны, преобразование $P_i' = C P_i C^{-1}$, очевидно, производится с помощью $CS(o)C^{-1}$. Следовательно, должно иметь место уравнение вида

$$CS(o)C^{-1} = \rho(o)\check{S}(o),$$

где $\rho(o)$ — численный множитель, зависящий от o.

При умножении $S(o)$ на λ $\check{S}(o)$ умножается на $1/\lambda$, и ρ, таким образом, преобразуется в $\rho\lambda^2$. Следовательно, мы можем избавиться от неопределенного калибровочного множителя в S таким образом, что ρ станет равным 1:

$$\check{S}(o) = CS(o)C^{-1}. \tag{18}$$

Как следствие имеем

$$(\det S)^2 = 1.$$

$S(o)$ теперь однозначно определено, *с точностью до выбора знака*. После произвольного нормирования этого знака для двух вращений o, o' и композиции $o'o$ композиционный множитель c в (14) становится равным ± 1, так как матрицы $X = S(o', o)$ и $X = S(o')S(o)$ обе удовлетворяют нормировочным условиям

$$\check{X} = CXC^{-1}.$$

Δ теперь обычное, хотя и двузначное, представление вместо проективного представления.

Уравнение (18) дает точное соотношение между ковариантными и контравариантными спинорами: если C — матрица $\| c_{AB} \|$, то замена

$$\varphi_A = \sum_B c_{AB} \psi^B$$

переводит ковариантный спинор ψ в контравариантный спинор ψ.

«Квадрат» двузначного представления Δ однозначен и разлагается по формуле $\Delta \times \Delta \sim \Gamma_0 + \ldots + \Gamma_n$ на тензорные представления Γ_f.

§ 5. Нечетная размерность $n=2\nu+1$

К нашим величинам $p_1, \ldots, p_{2\nu}$ следует добавить еще одну $p_{2\nu+1}$, $p_{2\nu+1}^2 = 1$, которая антикоммутирует с остальными p_i. Представление $p_i \to P_i$ $(i = 1, \ldots, 2\nu)$ может быть расширено введением соответствия

$$p_n \to P_n = 1' \times 1' \times \ldots \times 1' \quad (n = 2\nu + 1).$$

Пусть $\iota = 1$ или i согласно тому, четно ν или нечетно. Произведение

$$u = \iota p_1 p_2 \ldots p_n \tag{20}$$

коммутирует со всеми величинами в алгебре и удовлетворяет уравнению $u^2 = 1$.

В только что описанном представлении u представлено матрицей 1. Существует второе представление алгебры

$$p_i \to P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

при котором $u \to -1$, и таким образом доказывается, что оно неэквивалентно исходному.

Размерность $2\cdot(2^\nu)^2$ алгебры П теперь вдвое больше размерности алгебры всех матриц X в 2^ν-мерном «спин-пространстве». Наше изоморфное отображение $x \to X$ поэтому становится взаимно однозначным соответствием только после приведения П по модулю $(1 - u)$ [10]. Это выполняется при добавлении условия $u = 1$ в определяющие уравнения (5). Эта новая алгебра может быть реализована как подалгебра в П различными способами; например, как алгебра величин x, удовлетворяющих условию $x = ux$. Более удобно рассматривать *четные* величины в П. Их базис состоит из произведений четного числа p; в (6) следует добавить ограничение $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \equiv 0 \pmod 2$; соответствующее множество тензоров содержит только тензоры четного порядка. Любая нечетная величина может быть записана в виде ux, где x четна. Произвольная величина $x + ux'$ алгебры П (x и x' четны) представляется той же матрицей, что и четная величина $x + x'$. Следовательно, соответствие $x \to X$ является взаимно однозначным внутри алгебры $П_e$ четных величин. Второе представление (21) совпадает с первым для четных величин.

Далее процедура та же, что и выше (метод А). Пусть $\| o(ik) \|$ — собственное ортогональное преобразование. Тогда (12) дает новое представление П. Перемножением мы получаем

$$U^* = \iota P_1^* \ldots P_n^* = \det [o(ik)] \cdot U = U.$$

Следовательно, это представление, как и первоначальное, ставит в соответствие u матрицу $+1$ (а не -1). С помощью $P_i \to P_i^*$ мы таким образом отображаем алгебру П, приведенную по модулю $(1 - u)$, изоморфно на себя, и поэтому справедливо уравнение вида

$$P_i^* = S P_i S^{-1}.$$

Представление Δ: $o \to S(o)$ можно распространить на несобственные вращения, ставя матрицу $+1$ или -1 в соответствие отображению $x_i \to -x_i$,

которое коммутирует со всеми вращениями. (Выберем ли мы $+1$ или -1, не имеет значения, так как представление Δ двузначно).

(Метод В). Ортогональное преобразование o дает изоморфное отображение многообразия всех четных тензоров на себя. После представления этого многообразия алгеброй всех матриц X в 2^ν-мерном пространстве описанным выше способом o превращается в автоморфизм $X \to X^*$ полной матричной алгебры $X^* = SXS^{-1}$. Мы получаем $S(o)$ сразу для собственных и несобственных вращений o. Более того, мы получаем разложение

$$\Delta \underset{=}{\times} \breve{\Delta} \sim \Gamma_0 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_{2\nu} \sim \Gamma_0 + \sigma\Gamma_1 + \Gamma_2 + \sigma\Gamma_3 + \ldots, \tag{22}$$

последняя сумма заканчивается членом Γ_ν или $\sigma\Gamma_\nu$. Следовательно, в $\Delta \times \breve{\Delta}$ содержится собственный скаляр, несобственный вектор, собственный тензор ранга 2 и т. д.

$n = (2\nu + 1)$-мерная группа вращений $\mathfrak{d}_n$ содержит $(n - 1)$-мерную группу вращений $\mathfrak{d}_{n-1}$, которая подвергает переменные $x_1, \ldots, x_{2\nu}$ ортогональному преобразованию и оставляет $x_{2\nu+1}$ неизменной. Это ограничение на подгруппу переводит представление Δ группы $\mathfrak{d}_n$ в представление Δ $(n - 1)$-мерной группы вращений, которое мы определили в § 3. То же ограничение разлагает тензор ранга f в n-мерном пространстве на два тензора ранга f и $f - 1$ соответственно в $(n - 1)$-мерном пространстве. И, таким образом, разложение (22) переходит в разложение (15).

Матрица C, (17), которая удовлетворяла уравнению $P_i' = CP_iC^{-1}$ (для $i = 1, 2, \ldots, 2\nu$), удовлетворяет условию

$$CP_nC^{-1} = (-1)^\nu P_n'$$

для $P_n = P_{2\nu+1}$. Следовательно, она может быть использована с той же целью, что и в §4, только если ν четно. В противном случае следует заменить C на CP_n:

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \times \ldots,$$

и тогда мы имеем $CP_iC^{-1} = -P_i'$ (для всех i). В обоих случаях для C, определенного таким образом, после предварительного нормирования калибровочного множителя в $S(o)$ получается уравнение (18). Здесь опять мы имеем $\breve{\Delta} \sim \Delta$ и можем явно указать преобразование C, которое переводит ковариантные спиноры в контравариантные.

§ 6. Разложение Δ при ограничении на собственные вращения

В случае нечетной размерности не имеет значения, рассматриваем ли мы группу $\mathfrak{d}_n$ или $\mathfrak{d}_n^+$, так как отражение, коммутирующее со всеми вращениями, является несобственным вращением. Если, однако, $n = 2\nu$, то ограничение на $\mathfrak{d}_n^+$ приводит к разложению спин-представления Δ на два неэквивалентных представления Δ^+ и Δ^- степени $2^{\nu-1}$ и приходится делать различие между «положительными» и «отрицательными» спинорами соответственно. Это получается следующим образом.

Мы опять образуем

$$u = \iota p_1 \ldots p_{2\nu} \to U = 1' \times 1' \times \ldots \times 1'. \tag{23}$$

Отделим четные комбинации знаков $(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)$, характеризуемые тем, что $\sigma_1 \ldots \sigma_\nu = \pm 1$, от нечетных. Соответственно такому упорядочению U принимает следующий вид:

$$U = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right\|. \tag{24}$$

Как следствие уравнения (12) получаем для собственных вращений o: $U \to \to U^* = U$. Так как из $P_i^* = SP_iS^{-1}$ вытекает $U^* = SUS^{-1}$, то матрица S коммутирует с (24) и таким образом разбивается на «четную» и «нечетную» части:

$$S = \left\| \begin{array}{c|c} S^+ & 0 \\ \hline 0 & S^- \end{array} \right\|.$$

Матрицы $S^+(o)$ и $S^-(o)$ в представлениях Δ^+ и Δ^- степени $2^{\nu-1}$ определены однозначно с точностью до общего знака. Следовательно, тот факт, что отражение ассоциируется с матрицей $+1$ в Δ^+ и с матрицей -1 в Δ^-, означает их действительную неэквивалентность.

Каков смысл разбиения X на четыре квадрата для соответствующих величин x алгебры Π или для наборов тензоров? 1) Мы видим из уравнения $UP_i = -P_iU$, что четные величины коммутируют с U, а нечетные антикоммутируют. Четные и нечетные величины, следовательно, представляются соответственно матрицами следующего вида:

$$\left\| \begin{array}{c|c} \times & \\ \hline & \times \end{array} \right\|, \quad (25) \qquad \left\| \begin{array}{c|c} & \times \\ \hline \times & \end{array} \right\| \quad (26)$$

(квадраты, не отмеченные крестом, заполнены нулями). 2) Инволютивная операция

$$a \to a^* = au, \qquad A \to A^* = AU$$

сохраняет два первых квадрата в

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} + & - \\ \hline + & - \end{array} \right\|$$

неизменными, обращая знаки двух следующих за ними квадратов. Условимся приписывать знак + или — величине a в соответствии с тем, будет ли $a^* = a$ или $a^* = -a$. Эти величины тогда представляются соответственно матрицами

вида (27), (28):

$$\left|\begin{array}{c|c} \times & \\ \hline \times & \end{array}\right|, \qquad (27) \qquad \left|\begin{array}{c|c} & \times \\ \hline & \times \end{array}\right|. \qquad (28)$$

Любая величина может быть единственным образом записана как сумма двух величин со знаком $+$ и $-$. (Кроме операции $a \to a'$, можно было бы также рассмотреть следующую: $a \to a^+ = \iota a$. Но разбиение по знаку удобно дополнить дальнейшим разбиением на четные и нечетные величины. Ибо мы имеем $a^+ = a^*$ для четных величин и $a^+ = -a^*$ для нечетных.)

Итак, окончательно мы получаем такую схему:

$\left\lvert\begin{array}{c\|c} \times & \\ \hline & \end{array}\right\rvert$	$\left\lvert\begin{array}{c\|c} & \times \\ \hline & \end{array}\right\rvert$	$\left\lvert\begin{array}{c\|c} & \\ \hline \times & \end{array}\right\rvert$	$\left\lvert\begin{array}{c\|c} & \\ \hline & \times \end{array}\right\rvert$
четная	нечетная	нечетная	четная
знак: $+$	$-$	$+$	$-$

На вопрос о том, как наша операция «звездочка» выражается в терминах тензоров, отвечает уравнение:

$$p_1 \ldots p_f \cdot u = (-1)^{\langle f \rangle} \cdot \iota p_{f+1} \ldots p_p,$$

показывающее, что переход от $a = \{\alpha\}$ к $a^* = \{\alpha^*\}$ определен как

$$\alpha^* (i_1' \ldots i_{n-f}') = (-1)^{\langle f \rangle} \cdot \iota \cdot \alpha (i_1 \ldots i_f)$$

($i_1 \ldots i_f i_1' \ldots i_{n-f}'$ — любая четная перестановка). Множитель $(-1)^{\langle \nu \rangle} \cdot \iota$ равен i^ν.

Поэтому, рассматривая разложение Γ_ν на $\Gamma_\nu^+ + \Gamma_\nu^-$, как это объяснено в § 1, мы получаем следующие разложения:

$$\begin{array}{l|l} \Delta^+ \times \check{\Delta}^+ \sim \Gamma_0 + \Gamma_2 + \ldots & \Delta^+ \times \check{\Delta} \sim \Gamma_1 + \Gamma_3 + \ldots \\ \Delta^- \times \check{\Delta}^+ \sim \Gamma_1 + \Gamma_3 + \ldots & \Delta^- \times \check{\Delta}^- \sim \Gamma_0 + \Gamma_2 + \ldots \end{array} \qquad (29)$$

Из двух сумм в первом столбце одна оканчивается $\Gamma_{\nu-1}$, другая Γ_ν^+, в то время как суммы во втором столбце оканчиваются Γ_ν^- и $\Gamma_{\nu-1}$ соответственно.

Из (16) мы получаем умножением

$$(-1)^\nu U' = CUC^{-1} \quad \text{или} \quad CU = (-1)^\nu UC.$$

Это показывает, что C имеет вид (25) или (26) в зависимости от того, четно ν или нечетно. Если C_1, C_2 — матричные блоки матрицы C, то мы имеем

$$\left.\begin{array}{ll} \check{S}^+(o) = C_1 S^+(o) C_1^{-1}, & \check{S}^-(o) = C_2 S^-(o) C_2^{-1} \\ \check{\Delta}^+ \sim \Delta^+, & \check{\Delta}^- \sim \Delta^- \end{array}\right\} \nu \text{ четно,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \check{S}^+(o) = C_1 S^-(o) C_1^{-1}, & \check{S}^-(o) = C_2 S^+(o) C_2^{-1} \\ \check{\Delta}^+ \sim \Delta^- & \check{\Delta}^- \sim \Delta^+ \end{array}\right\} \nu \text{ нечетно.}$$

§ 7. Инфинитезимальное описание. Четная размерность

Чтобы дать инфинитезимальное описание, более удобно привести квадратичную форму, которая остается инвариантной при ортогональных преобразованиях, к виду

$$x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^\nu y^\nu \tag{30}$$

(x^α, y^α — это $n = 2\nu$ переменных). Соответственно мы должны воспользоваться вместо p_α, q_α следующими величинами:

$$\frac{p_\alpha - iq^\alpha}{2} = s_\alpha, \qquad \frac{p_\alpha + iq^\alpha}{2} = t_\alpha$$

с соотношениями

$$s_\alpha t_\alpha + t_\alpha s_\alpha = 1, \qquad s_\alpha t_\beta + t_\beta s_\alpha = 0 \quad (\text{для } \beta \neq \alpha),$$

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\alpha = 0, \qquad t_\alpha t_\beta + t_\beta t_\alpha = 0 \quad (\text{для всех } \alpha, \beta).$$

$$s_\alpha \to S_\alpha = 1' \times \ldots \times 1' \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \times 1 \times \ldots \times 1,$$

$$t_\alpha \to T_\alpha = 1' \times \ldots \times 1' \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times 1 \times \ldots \times 1.$$

(Множители, записанные в виде матриц, стоят на α месте.)

Все бесконечно малые вращения являются линейными комбинациями вращений следующих типов:

$$dx_\alpha = x_\alpha, \qquad dy_\alpha = -y_\alpha; \tag{a}$$

$$dx_\alpha = x_\beta, \qquad dy_\beta = -y_\alpha \quad (\alpha < \beta) \tag{b}$$

(Невыписанные приращения равны 0. В (b) можно независимо поменять местами x_α с y_α и x_β с y_β.) Δ представляет (a) бесконечно малым преобразованием

$$^1/_2 U_\alpha = {}^1/_2 (1 \times \ldots \times 1 \times 1' \times 1 \times \ldots \times 1), \tag{31}$$

в то время как бесконечно малому вращению (b) соответствует матрица $S_\alpha T_\beta$. Чтобы доказать это, нужно лишь проверить следующие равенства:

$$dX = [U_\alpha, X] = (U_\alpha X - XU_\alpha) = 0 \tag{a}$$

для $X = S_\beta$ или T_β ($\beta \neq \alpha$), но $dS_\alpha = S_\alpha$, $dT_\alpha = -T_\alpha$.

$$\delta X = [S_\alpha T_\beta, X] = 0 \text{ для всех } S \text{ и } T, \tag{b}$$

кроме $X = S_\beta$ и T_α, для которых мы имеем

$$\delta S_\beta = S_\alpha, \qquad \delta T_\alpha = -T_\beta.$$

Это непосредственно видно из выражения

$$[S_\alpha T_\beta, X] = S_\alpha (T_\beta X + XT_\beta) - (XS_\alpha + S_\alpha X) T_\beta.$$

Таким образом, мы пришли к картановскому инфинитезимальному описанию спин-представления.

В случае *нечетной размерности* не нужно добавлять ничего существенного. В этом случае наиболее удобно предположить, что фундаментальная квадратичная форма имеет вид

$$(x^0)^2 + 2(x^1y^1 + \ldots + x^\nu y^\nu).$$

(31) показывает, что Δ *двузначно, а не однозначно*. Ибо в соответствии с этим уравнением вращение o

$$x^1 \to e^{i\varphi}x^1,\ y^1 \to e^{-i\varphi}y^1 \text{ (все остальные переменные неизменны)}$$

ассоциировано с операцией $S(o)$, умножающей переменную $x_{\sigma_1 \ldots \sigma_\nu}$ в спиновом пространстве на $e^{{}^1/{}_2 i\sigma_1\varphi}(\sigma_\alpha = \pm 1)$.

§ 8. Условия вещественности

Для *вещественных* ортогональных пребразований возникает вопрос, является ли сопряженное комплексное представление $\overline{\Delta}: o \to \overline{S}(o)$ эквивалентным Δ. P_i являются эрмитовыми матрицами, $\overline{P}_i$ равны P_i'. Более того, из уравнения

$$P_i^* = \sum_k o(ki)\,P_k \text{ следует } \overline{P}_i^* = \sum_k o(k_i)\,\overline{P}_k$$

при условии, что $o(ik)$ вещественна. Это приводит сразу же к результату

$$\overline{S}(o) = \rho(o)\,\check{S}(o).$$

Поэтому эрмитова единичная форма $\Sigma x_A \bar{x}_A$ в спин-пространстве преобразуется с помощью замены координат S, в ρ-кратную единичную форму. Значит, ρ должно быть положительно и

$$|\det S|^2 = \rho^{2\nu}.$$

Но за счет нашей нормализации S, приводящей к тому, что $(\det S)^2$ должно равняться 1, мы находим, $\rho = 1$,

$$\overline{S}(o) = \check{S}(o), \quad \overline{\Delta} = \check{\Delta};$$

т. е. *представление Δ вещественной ортогональной группы унитарно.*

Ограничивая себя вещественными переменными, следует помнить о возможности того, что фундаментальная квадратичная форма

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x^i x^k \tag{32}$$

может иметь *индекс инерции t, отличный от* 0. Это особенно важно для физики, так как согласно теории относительности $t = 1$ для четырехмерного мира. В этом случае мы должны подчинить образующие p_i алгебры П уравнению

$$(p_1x^i + \ldots + p_nx^n)^2 = \sum a_{ik}x^i x^k \text{ или } \frac{1}{2}(p_ip_k + p_kp_i) = a_{ik}.$$

Так мы получим новые p_i из старых с помощью преобразования H', если фундаментальная форма (32) получена из нормальной формы с $a_{ik} = \delta_{ik}$ с помощью преобразования H.

Но здесь опять удобно основывать более детальное исследование на вещественной нормальной форме

$$-(x^1)^2 - \ldots - (x^t)^2 + (x^{t+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 = \sum_i \varepsilon_i (x^i)^2. \tag{33}$$

(Без всякой потери общности мы можем предположить $2t \leqslant n$.) В соответствии с физикой назовем первые t переменных x^i временными, а последние $n - t$ пространственными координатами. Объектом нашего рассмотрения служит группа $\mathfrak{b}_n$ преобразований Лоренца, состоящая из всех вещественных линейных преобразований, переводящих фундаментальную форму (33) в себя[4]. $P_{t+1}, \ldots, P_n$ сохраняют все прежнее значение, в то время как $P_1, \ldots, P_t$ приобретают множитель $i = \sqrt{-1}$. Мы имеем, таким образом,

$$\bar{P}_i = -P_i' \text{ для } (i = 1, \ldots, t); \qquad \bar{P}_i = P_i' \text{ для } (i = t+1, \ldots, n).$$

Эрмитово сопряжение A' матрицы A можно обозначить $\tilde{A}$. $\bar{P}_i$, так же как и P_i', удовлетворяет фундаментальным правилам коммутирования. Оба множества матриц должны преобразовываться одно в другое с помощью некоторого преобразования B. Достаточно просто написать B явно:

$$B = i^{t-\langle t\rangle} \cdot P_1 \ldots P_t. \tag{34}$$

Более точно мы имеем

$$P_i' = B\bar{P}_i B^{-1} \quad \text{или} \quad -P_i' = B\bar{P}_i B^{-1} \tag{35}$$

в соответствии с тем, четно t или нечетно. Множитель $i^{t-\langle t\rangle}$ был добавлен, чтобы сделать B эрмитовым: $\tilde{B} = B$. Транспонированная матрица B' совпадает с B с точностью до знака, именно $B' = (-1)^{\langle t\rangle}B$. В случае четного n матрица B имеет вид (25) или (26) в зависимости от того, четно t или нечетно. Все эти свойства могут быть легко выведены из общих рассуждений; однако их можно получить без всякого труда из явного выражения (34).

Из (35) выводим соотношение

$$B\bar{S}(o)B^{-1} = \rho(o)\check{S}(o) \tag{36}$$

или после умножения на $S'(o)$ слева

$$S'B\bar{S} = \rho B:$$

эрмитова форма B переходит при преобразовании $\bar{S}$ в ρ-кратную самой себе. Следовательно, ρ вещественно, и мы выводим, так же как и в случае определен-

[4] Более определенно: переменные x^i подвергаются преобразованию Лоренца

$$o: x^i \to \sum_k o(ik)\, x^k.$$

p_i (или P_i) тогда испытывают контрагредиентное преобразование; но, поднимая индексы с помощью $p^i = \varepsilon_i p_i$, можно ввести величины p^i, преобразующиеся конгредиентно с переменными x^i.

ной формы, уравнение

$$\rho(o) = \pm 1.$$

Что касается зависимости от o, то $\rho(o)$ удовлетворяют условию

$$\rho(o'o) = \rho(o')\,\rho(o).$$

Для определения знака ρ требуется, однако, новое исследование. В преобразовании Лоренца $\| o(ik) \|$ временнóй минор всего определителя

$$\Omega = \begin{vmatrix} o(11), & \ldots, & o(1t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ o(t1), & \ldots, & o(tt) \end{vmatrix} \text{ или } \geqslant 1 \text{ или } \leqslant -1. \quad (37)$$

Мы будем полагать, $\sigma_{-}(o) = +1$ или -1 в зависимости от того, первый или второй случай имеет место, и назовем $\sigma_{-}(o)$ *временнóй сигнатурой*. Это характер, т. е.

$$\sigma_{-}(o'o) = \sigma_{-}(o')\,\sigma_{-}(o).$$

Нам нет необходимости доказывать это прямо здесь, так как мы увидим в процессе дальнейшего исследования, что $\rho(o)$ в (36) совпадает с $\sigma_{-}(o)$. Тем же способом можно ввести *пространственную сигнатуру* $\sigma_{+}(o)$ с помощью пространственного минора матрицы $\| o(ik) \|$. Последний, впрочем, равен $\sigma(o)\cdot\Omega$ [11], поэтому характер $\sigma(o)$, различающий собственные и несобственные преобразования, равен $\sigma_{+}\sigma_{-}$. О преобразованиях Лоренца, имеющих $\sigma_{-} = -1$, можно сказать, что они меняют ориентацию времени, в то время как те, что имеют $\sigma_{+} = -1$, меняют ориентацию пространства. Группа преобразований Лоренца разбивается на четыре куска, не связанных друг с другом и отличающихся друг от друга значениями двух сигнатур σ_{-} и σ_{+}.

Чтобы доказать (37), введем два вектора

$$\mathfrak{v}_i' = \{o(i1), \ldots, o(it)\}, \qquad \mathfrak{v}_i'' = \{o(i, t+1), \ldots, o(in)\}$$

в области временных и пространственных координат соответственно. Скалярное произведение $(\mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}')$ в этих двух подпространствах имеет свое обычное значение $a_1'b_1' + \ldots + a_t'b_t'$. Соотношения, характеризующие преобразования Лоренца, тогда записываются в виде

$$(\mathfrak{v}_i'\mathfrak{v}_k') = \delta_{ik} + (\mathfrak{v}_i''\mathfrak{v}_k'') \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, t).$$

Из этого мы выводим

$$\begin{vmatrix} (\mathfrak{v}_1'\mathfrak{v}_1'), & \ldots, & (\mathfrak{v}_1'\mathfrak{v}_t') \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathfrak{v}_t'\mathfrak{v}_1'), & \ldots, & (\mathfrak{v}_t'\mathfrak{v}_t') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+(\mathfrak{v}_1''\mathfrak{v}_1''), & (\mathfrak{v}_1''\mathfrak{v}_2''), & \ldots, & (\mathfrak{v}_1''\mathfrak{v}_t'') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathfrak{v}_t''\mathfrak{v}_1''), & (\mathfrak{v}_t''\mathfrak{v}_2''), & \ldots, & (1+\mathfrak{v}_t''\mathfrak{v}_t'') \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + (1/1!)\sum_{i=1}^{t}(\mathfrak{v}_i''\mathfrak{v}_i'') + (1/2!)\sum_{i,k=1}^{t}\begin{vmatrix} (\mathfrak{v}_i''\mathfrak{v}_i'') & (\mathfrak{v}_i''\mathfrak{v}_k'') \\ (\mathfrak{v}_k''\mathfrak{v}_i'') & (\mathfrak{v}_k''\mathfrak{v}_k'') \end{vmatrix} + \ldots$$

Все члены с правой стороны $\geqslant 0$; следовательно, весь определитель слева $\geqslant 1$. Этот определитель, однако, является квадратом Ω [12]. *Тот факт, что знак* ρ

в (36) *равен* σ_-, доказывается следующим образом. В соответствии с

$$P_i^* = \sum_{k=1}^{n} o(ki)\, P_k$$

мы находим

$$P_1^* \dots P_t^* = \begin{vmatrix} o(11) \dots o(1t) \\ \dots\dots\dots \\ o(t1) \dots o(tt) \end{vmatrix} \cdot P_1 \dots P_t + \dots \qquad (38)$$

Но произведение вроде $P_{i_1} \dots P_{i_t} \cdot P_1 \dots P_t$, где $i_1 \dots i_t$ — различные индексы, всегда имеет след o, если $i_1, \dots, i_t$ не есть перестановка $1 \dots t$, тогда как

$$\operatorname{tr}(P_1 \dots P_t \cdot P_1 \dots P_t) = (-1)^{\langle t \rangle} \operatorname{tr}(P_1^2 \dots P_t^2) = (-1)^{t - \langle t \rangle} \cdot 2^\nu.$$

Поэтому, умножая уравнение (38) на $P_1 \dots P_t$ справа и беря след, мы приходим к следующему значению определителя Ω:

$$2^\nu \Omega = (-1)^{t - \langle t \rangle} \operatorname{tr}(P_1^* \dots P_t^* \cdot P_1 \dots P_t).$$

Используя определения S: $P_i^* = SP_iS^{-1}$ и B мы непосредственно получаем

$$2^\nu \Omega = \operatorname{tr}(SBS^{-1} \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot SBS^{-1}).$$

Согласно (36),

$$S^{-1} = \rho B'^{-1} \check{S} B' = \rho B^{-1} \check{S} B.$$

Замена B' на B возможна ввиду того, что B' совпадает с B с точностью до численного множителя. Поэтому мы окончательно получаем для $T = BS = \| t_{JK} \|$

$$2^\nu \Omega = \rho \cdot \operatorname{tr}(BS\tilde{S}\bar{B}) = \rho \cdot \operatorname{tr}(BS \cdot \tilde{S}\bar{B}) = \rho \cdot \operatorname{tr}(T \cdot \tilde{T}) = \rho \cdot \sum_{J,K} | t_{JK} |^2,$$

и это уравнение показывает, что ρ имеет тот же знак, что и Ω.

Любое представление $\Gamma : o \to G(o)$ группы Лоренца индуцирует другое $\sigma_-\Gamma$: $o \to \sigma_-(o) G(o)$. Уравнение (36) или

$$\bar{S}(o) = \sigma_-(o) B^{-1} \check{S}(o) B$$

доказывает эквивалентность

$$\bar{\Delta} \sim \sigma_- \check{\Delta}. \qquad (39)$$

Преобразование B заменяет сопряженный к ковариантному спинору ψ на контравариантный спинор $\varphi : \varphi' = B\bar{\psi}$ (постольку, поскольку мы ограничиваемся преобразованиями Лоренца временно́й сигнатуры $\sigma_- = 1$). (39) дает ввиду (15), (22) разложения

$$\Delta \times \bar{\Delta} \sim \begin{Bmatrix} \sigma_-\Gamma_0 + \sigma_-\Gamma_1 + \dots + \sigma_-\Gamma_{\nu-1} \\ \sigma_+\Gamma_0 + \sigma_+\Gamma_1 + \dots + \sigma_+\Gamma_{\nu-1} \end{Bmatrix} + (\sigma_-\Gamma_\nu \sim \sigma_+\Gamma_\nu) \quad [n = 2\nu]; \qquad (40)$$

$$\Delta \times \bar{\Delta} \sim \sigma_-\Gamma_0 + \sigma_+\Gamma_1 + \sigma_-\Gamma_2^+ \dots \qquad [n = 2\nu + 1].$$

Последний ряд завершается $\sigma_-\Gamma_\nu$ или $\sigma_+\Gamma_\nu$.

В случае $n = 2\nu$ мы имеем разложение Δ на Δ^+ и Δ^-, ограничивая представление на группу $\mathfrak{b}_n^+$ собственных преобразований Лоренца $[\sigma(o) = 1]$. Это

ограничение уничтожает различие между двумя сигнатурами σ_- и σ_+. Как мы отметили раньше, B имеет вид (25) или (26) в зависимости от того, четно или нечетно t. Поэтому мы имеем:

$$\text{для четных } t\text{: } \bar{\Delta}^+ \sim \sigma_-\breve{\Delta}^+, \qquad \bar{\Delta}^- \sim \sigma_-\breve{\Delta}^-$$
$$\text{для нечетных } t\text{: } \bar{\Delta}^+ \sim \sigma_-\breve{\Delta}^-, \qquad \Delta^- \sim \sigma_-\breve{\Delta}^+.$$

§ 9. Неприводимость

Неприводимость Γ_f будет установлена *заведомо*, если только доказать, что не существует однородного линейного соотношения с постоянными коэффициентами (отличными от 0) между минорами порядка f матрицы произвольного вращения $\| o\,(ik) \|$ [13]. Это можно показать, не используя других вращений, кроме перестановок осей координат и изменений знаков. Действительно, предположим, что есть такое нетривиальное соотношение R, в котором определенный минор $A\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_f \\ k_1 \ldots k_f \end{pmatrix}$ появляется с коэффициентом, отличным от 0. Подходящей заменой мы можем поместить этот минор в левом верхнем углу матрицы. Теперь мы будем применять только замены знаков:

$$\| o\,(ik) \| = \begin{Vmatrix} \pm 1 & & & & \\ & \pm 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \pm 1 \end{Vmatrix},$$

для матриц которых отличны от 0 только главные миноры $A\ (i_1, \ldots, i_f)$. Линейное соотношение R будет содержать, кроме $A\ (1, 2, \ldots, f)$, по крайней мере еще один член $A\ (1'2' \ldots f')$ с коэффициентом, отличным от нуля. По крайней мере один из индексов $1'2' \ldots f'$, скажем l, отличен от $1, 2, \ldots, f$. Изменяя знак одной переменной, x_l, переводим соотношение R в новое соотношение R', в котором $A\ (1\ 2 \ldots f)$ появляется с тем же, а $A\ (1'\ 2' \ldots f')$ с противоположным коэффициентом. Следовательно, сумма $(R + R')/2$ короче, чем R, т. е. содержит меньше членов, чем R; но $A\ (1\ 2 \ldots f)$ входит в него с тем же отличным от нуля коэффициентом, что и ранее. Процедура сокращения может быть продолжена до тех пор, пока предложенное линейное соотношение $R = 0$ не приведет к невозможному уравнению $A\ (1\ 2 \ldots f) = 0$.

Эти рассмотрения основывались на *полной* группе $\mathfrak{b}_n$. Если разрешить только собственные вращения $\mathfrak{b}_n^+$, можно скомбинировать перестановку на первом шаге с изменением знака одной переменной. Второй шаг может быть выполнен таким образом, если предположить, что $2f < n$; так как один из индексов $1', 2', \ldots, f'$ отличен от $1, 2, \ldots, f$, то l можно выбрать, как и выше; далее выберем в качестве m индекс, который не встречается среди $1, 2, \ldots, f$ $1', 2', \ldots, f'$, и затем изменим знаки у обеих переменных x_e и x_m одновременно. Даже когда $n = 2\nu$, $f = \nu$, процедура сокращения работает, пока соотноше-

ние R содержит член $A\ (1'2' \ldots \nu')$, индексы которого не совпадают в точности с дополнением $\nu+1, \ldots, n$ к $1, \ldots, \nu$. Таким образом, мы приходим в этом случае к соотношению вида

$$cA\ (1, 2, \ldots, \nu) + c'A\ (\nu+1, \ldots, n) = 0. \tag{41}$$

Такое соотношение действительно существует:

$$A\ (\nu+1, \ldots, n) = A\ (1, 2, \ldots, \nu) \qquad [14],$$

но, конечно, не существует другого соотношения типа (41). Из этого мы узнаем не только, что два представления Γ_ν^+ и Γ_ν^- неприводимы, но одновременно и то, что они *не эквивалентны*, так как это доказывает, что не имеется линейного соотношения с постоянными коэффициентами между компонентами двух матриц, ассоциированных с одним и тем же произвольным вращением o в этих представлениях. Действительно, компоненты этих двух матриц равны

$$\frac{1}{2}\left[B\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_\nu \\ k_1 \ldots k_\nu \end{pmatrix} \pm i^\nu B\begin{pmatrix} i'_1 \ldots i'_\nu \\ k_1 \ldots k_\nu \end{pmatrix}\right]$$

с

$$B\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_\nu \\ k_1 \ldots k_\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[A\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_\nu \\ k_1 \ldots k_\nu \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} i'_1 \ldots i'_\nu \\ k'_1 \ldots k'_\nu \end{pmatrix}\right],$$

$i_1, \ldots, i_\nu, i_1' \ldots i_\nu'$ и $k_1 \ldots k_\nu, k_1' \ldots k_\nu'$ — четные перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$. По причинам, указанным выше, не существует универсального линейного соотношения между величинами $B\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_\nu \\ k_1 \ldots k_\nu \end{pmatrix}$.

Неэквивалентность двух Γ_f, ранги которых в сумме не равны n, выводится из того, что они имеют разную степень. Все эти аргументы основывались на *комплексной* ортогональной группе. Но ничего не приходится менять, когда мы ограничиваемся *вещественными* ортогональными преобразованиями. Более того, очевидно, что если сформулировать результат инфинитезимально, то он независим от индекса инерции.

Если фундаментальная квадратичная форма содержит члены со знаком минус, то бесконечно малое преобразование

$$dx_i = x_k, \qquad dx_k = -x_i \qquad (i \neq k) \tag{42}$$

(все другие составляющие равны 0; это преобразование порождает перестановку $x_i \to x_k$, $x_k \to -x_i$ и перемену знака $x_i \to -x_i$, $x_k \to -x_k$) следует заменить для пар (x_i, x_k), состоящих из временнóй и пространственной переменных, на

$$dx_i = x_k, \qquad dx_k = x_i$$

и оставить неизменным для пар переменных (x_i, x_k), если они обе временны́е или обе пространственные. Утверждение о неприводимости относительно всех преобразований (42) в определенном случае идентично утверждению о неприводимости относительно преобразований, заменяющих их в неопределенном случае, следует только заменить временну́ю переменную x_k на $\sqrt{-1}\cdot x_k$.

Произведение $\Gamma \times \check{\Gamma}$ представления Γ с его сопряженными $\check{\Gamma}$ содержит тождественное представление Γ_0 по крайней мере μ раз, если Γ разлагается на μ частей. Если мы позволим себе воспользоваться общей и элементарной теоремой, что неприводимые составляющие представления определены однозначно [5] (с точностью до эквивалентности и порядка), то формулы (15), (22), (29) показывают сразу же неприводимость Δ, Δ^+ или Δ^- соответственно и неэквивалентность последних. Другое прямое доказательство проходит следующим образом:

Возьмем полную группу $\mathfrak{b}_n$ в четном случае $n = 2\nu$. Используя фундаментальную квадратичную форму в виде (30), рассмотрим «диагональное» бесконечно малое вращение

$$dx_\alpha = i\varphi_\alpha x_\alpha; \qquad dy_\alpha = -i\varphi_\alpha y_\alpha\,(\alpha = 1, \ldots, \nu) \tag{43}$$

(φ_α — независимые параметры). Оно ассоциировано в Δ с диагональным преобразованием

$$dx_{\sigma_1 \ldots \sigma_\nu} = (i/2)(\sigma_1\varphi_1 + \ldots + \sigma_\nu\varphi_\nu)\,x_{\sigma_1 \ldots \sigma_\nu}\,(\sigma_\alpha = \pm).$$

Для данного подпространства P' полного спин-пространства P, отличного от 0 и инвариантного относительно Δ, выберем ненулевой вектор z:

$$z = \sum_A z_A e_A = \{z_A\} \qquad [A = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)],$$

лежащий в P'. Повторяя преобразования (43), можно отделить члены $z_A e_A$, так как эти части имеют различные «веса» $(i/2)(\sigma_1\varphi_1 + \ldots + \sigma_\nu\varphi_\nu)$. Тем самым по крайней мере один фундаментальный вектор e_A лежит в P'. Но $e_A = e_{\sigma_1 \ldots \sigma_\nu}$ переводится в любой другой фундаментальный вектор $e_{\tau_1 \ldots \tau_\nu}$ перестановкой $x_\alpha \to y_\alpha$, $y_\alpha \to x_\alpha$ тех пар $(x_\alpha y_\alpha)$, для которых знаки σ_α и τ_α не совпадают. P' поэтому совпадает со всем P. Неприводимость Δ для нечетного $n = 2\nu + 1$ — немедленное следствие уже показанной неприводимости для четного n; нужно только взять ограничение на подгруппу $\mathfrak{b}_{n-1}$ внутри $\mathfrak{b}_n$, $\pi = 2\nu + 1$. Тем же способом мы получаем, что обе части Δ^+, Δ^- неприводимы и неэквивалентны для групп $\mathfrak{b}_n^+$, $n = 2\nu$.

§ 10. Теория Дирака

Предположим, что мы имеем дело со *спинорным полем* $\psi^A\,(x^1 \ldots x^n)$ в n-мерном «мире» с фундаментальной метрической формой (33). Наиболее существенной особенностью *теории Дирака* является то, что мы можем образовать *вектор* из линейных комбинаций произведений $\psi^A\psi^B$. Если n четно, мы видим из уравнения (40), что существует в точности *один* такой вектор s_i — он ведет себя как вектор, по крайней мере для всех преобразований Лоренца, не обращающих ориентацию времени, и существует один такой вектор для всех преобразований Лоренца, не обращающих ориентацию пространства. В случае нечетного n существует один вектор второго типа и нет ни одного вектора первого типа. Только первый тип можно использовать, если мы верим в эквивалентность правого и левого, но готовы отбросить эквивалентность прошлого

[5] Ср. также: *Weyl H.* Theory of groups and quantum mechanics. L., 1931, p. 136.

и будущего. n тогда должно быть четно и вектор есть

$$s_i = \tilde{\psi} B P_i \psi.$$

Из этого вектора мы можем получить скалярное поле

$$\sum_i \tilde{\psi} B P^i (\partial\psi/\partial x_i) \qquad (P^i = \varepsilon_i P_i). \tag{44}$$

Нам требуется скаляр, возникающий в теории Дирака из линейной комбинации произведений $\tilde{\psi}^A \cdot \partial\psi^B/\partial x^2$ как главная часть *величины действия*, которая отвечает за основные черты всей квантовой теории. У нас нет выбора, так как $(\Delta \times \bar{\Delta}) \times \breve{\Gamma}_1$ содержит тождественное представление Γ_0 или представление σ_Γ_0 в единственном числе, если разложить его на неприводимые части. Это показывает соотношение (40), если мы учтем основную лемму теории представлений, утверждающую, что произведение $\Gamma \times \breve{\Gamma}_1$ содержит тождественное представление Γ_0 однократно или не содержит вовсе в зависимости от того, являются ли два неприводимых представления Γ, Γ_1 одной и той же группы эквивалентными или нет [15]. Дираковская величина действия содержит, кроме (44), второй член, который является линейной комбинацией недифференцированных произведений $\psi^A \psi^B$; он умножается на массу и отвечает за инерцию материи. Существует только один такой скаляр, именно $\tilde{\psi} B \psi$ как в случае четного, так и нечетного n.

Более того, мы можем рассматривать как основной тот факт, что временна́я компонента электрического тока положительно определена в теории Дирака, а именно, пропорциональна «плотности вероятности» $\sum_A \bar{\psi}^A \psi^A$; это позволяет электрическому заряду иметь атомарную структуру. Если фундаментальная форма (33) имеет индекс инерции, то этим свойством, однако, обладает не вектор, содержащийся в $\Delta \times \bar{\Delta}$, а тензор ранга t с компонентами

$$s_{i_1 \ldots i_t} = \tilde{\psi} B P_{i_1} \ldots P_{i_t} \psi \qquad (i_1, \ldots, i_t \text{ различны}),$$

временная компонента которого есть $s_{12\ldots t}$ (с точностью до численного множителя). Схема уравнений Максвелла требует, по-видимому, чтобы электрический ток был вектором, это требование вместе с постулатом атомарной структуры электричества вынуждает нас предполагать индекс инерции t равным 1.

§ 11. Дополнение

Автоморфизмы полной матричной алгебры. *Взаимно однозначное соответствие $X \rightleftarrows X^*$ кольца всех $n \times n$ матриц на себя является изоморфизмом, если удовлетворяет условиям*

$$(X + Y)^* = X^* + Y^*, \ (\lambda X) = \lambda X^*, \ (XY)^* = X^* Y^*$$

(λ — *произвольное число*). *Все такие автоморфизмы — это «подобия»*

$$X^* = A X A^{-1},$$

A — фиксированная невырожденная матрица.

Доказательство. Уравнение $GX = \gamma X$ имеет решение $X \neq 0$, только если γ — собственное значение матрицы G, так как столбцы матрицы X должны быть собственными векторами, принадлежащими собственному значению γ. Собственные значения G, таким образом, характеризованы способом, инвариантным относительно данного автоморфизма. Следовательно, G^* имеет те же собственные значения, что и G. Поэтому мы будем действовать следующим образом. Выберем n различных фиксированных чисел $\gamma_1 \ldots \gamma_m$ и из них построим диагональную матрицу

$$G = \begin{Vmatrix} \gamma_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \gamma_n \end{Vmatrix}.$$

Так как G^* имеет те же собственные значения, что и G, можно определить такую невырожденную матрицу A, что $G^* = AGA^{-1}$. Заменим каждый X^* на $X^{**} = A^{-1}X^*A$ и теперь рассмотрим автоморфизм $X \to X^{**}$, который оставляет G неизменной. Матрица E_{ik}, содержащая элемент, отличный от нуля (равный 1), только на пересечении i-й строки с k-м столбцом определена свойствами

$$GE_{ik} = \gamma_i E_{ik}, \qquad E_{ik}G = \gamma_k E_{ik}$$

с точностью до численного множителя. Следовательно, мы имеем

$$E_{ik} \to E_{ik}^{**} = \alpha_{ik} E_{ik}. \tag{45}$$

Уравнение $E_{ii}^2 = E_{ii}$ дает $\alpha_{ii}^2 = \alpha_{ii}$, $\alpha_{ii} = 1$. Положим $\alpha_{i1} = \alpha_i$, $\alpha_{ik} = \beta_k$; соотношение

$$E_{ik} = E_{i1}E_{1k}$$

приводит к $\alpha_{ik} = \alpha_i \beta_k$. За счет $\alpha_{ii} = 1$ мы поэтому имеем $\beta_i = 1/\alpha_i$ и $\alpha_{ik} = \alpha_i/\alpha_k$. Следовательно, ввиду (45) произвольная матрица $X = \| x_{ik} \|$ и ее образ $X^{**} = \| x_{ik}^{**} \|$ связаны соотношением

$$x_{ik}^{**} = \alpha_i x_{ik}/\alpha_k \quad \text{или} \quad X^{**} = A_0 X A_0^{-1},$$

где A_0 — диагональная матрица из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Это доказательство доставляет метод конструкции спиноров из данного набора тензоров g. Метод будет использован в основном в случае, когда g состоит только из одного тензора определенного ранга. Наше представление степени 2^ν алгебры П ставит в соответствие g матрицу G. Предположим, что G имеет (простое) собственное значение γ и пусть ψ есть соответствующий собственный вектор в спин-пространстве: $G\psi = \gamma \cdot \psi$. Вращение o переводит g в множество $g(o)$, представленное матрицей $G(o)$, γ — (простое) собственное значение для $G(o)$, так же как и для G, и решение $\psi(0)$ уравнения $G(o)\psi \cdot (o) = \gamma \cdot \psi(0)$, полученное из ψ преобразованием $S(o)$, соответствует o в спин-представлении.

ОБ ОБЪЕМЕ ТРУБ*

1. Проблема. В лекции перед Математическим Клубом в Принстоне в прошлом году профессор Хотелинг поставил следующую геометрическую задачу [1], считая ее одной из важнейших для некоторых статистических исследований:

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n, или в сферическом пространстве S_n, дано замкнутое ν-мерное многообразие C_ν. Шары данного радиуса a вокруг каждой точки C_ν покрывают некоторую часть $C_\nu(a)$ пространства вложения E_n или S_n, объем которой $V(a)$ требуется определить. Мы называем $C_\nu(a)$ (n, ν)-трубой (радиуса a вокруг C_ν).

Для малых значений a мы получаем в первом приближении

$$V(a) = \Omega_m a^m \cdot k_0,$$

где $\Omega_m a^m$ — объем m-мерного шара

$$\sigma_m(a) : t_1^2 + \ldots + t_m^2 \leqq a^2 \tag{1}$$

$(m = n - \nu)$ и k_0 — площадь «поверхности» C_ν.

Профессор Хотелинг показал, что эта формула точна в E_n и подобная формула имеет место в S_n для $\nu = 1$. Я рассматриваю здесь эту задачу для более высокой размерности ν. Для E_n мы получаем в результате формулу, состоящую из $1 + [{}^1/_2\nu]$ членов следующего вида (§ 3):

$$V(a) = \Omega_m \cdot \sum_e \frac{a^{m+e}}{(m+2)(m+4)\ldots(m+e)} k_e \tag{2}$$

$$(e \text{ — четно}, \ 0 \leqslant e \leqslant \nu),$$

где k_e — некоторые интегральные инварианты поверхности C_ν, определяемые только по внутренней метрической структуре C_ν и, таким образом, независимые от вложения в E_n. Я выражу эти инварианты (§ 4) в терминах риманового тензора C_ν. Аналогичный результат получен для S_n.

2. Основные формулы для объема труб. Пусть n-мерное многообразие M_n, состоящее из точек u и локально параметризованное координатами $u^1, \ldots, u^n$, отображается в евклидово пространство E_n с координатами $(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{r}$,

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u) = \mathfrak{r}(u^1, \ldots, u^n). \tag{3}$$

Тогда объем V образа M_n в E_n может быть вычислен с помощью формулы

$$V = \int [\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n] \, du^1 \ldots du^n, \tag{4}$$

---

* On the volume of tubes.— Amer. J. Math., 1939, vol. 61, N 2, p. 461—472. Перевод Ф. А. Богомолова.

[1] См. его работу: *Hotelling H.* Tube and spheres in n-spaces, and a class of statistical problems.— Amer. J. Math., 1939, vol. 61, N 2, p. 440—460.

где $[\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_n]$ обозначает определитель n столбцов $\mathfrak{r}_i$, каждый из которых состоит из компонент вектора

$$\mathfrak{r}_i = \partial\mathfrak{r}/\partial u^i.$$

Эта формула учитывает ориентацию $\pm$ и кратность, с которой отображение $u \to \mathfrak{r}$ накрывает отдельные куски E_n. Накрытие будет локально взаимно однозначным отображением без складок и ветвлений там, где $[\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_n] > 0$. Но даже если это условие удовлетворяется повсюду, кратные накрытия могут возникать. Вопрос об этом имеет, в сущности, скорее топологическую, чем дифференциально-геометрическую природу. Помня об этом, мы будем далее применять формулу (4).

Имея дело со сферическим пространством S_n, мы работаем с однородными координатами $(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{r}$; множество (ρx_i) обозначает ту же точку, что и (x_i), если только множитель $\rho \neq 0$. Иногда мы будем пользоваться нормализацией

$$\mathfrak{r}^2 = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

В этом случае S_n реализуется как единичная сфера в евклидовом пространстве E_{n+1}. (4) следует заменить формулой

$$V = \int \frac{[\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_n]}{(\mathfrak{r}^2)^{(n+1)/2}}\, du^1 \ldots du^n, \tag{5}$$

как легко проверить с учетом следующих фактов:

1) Интегрируемое выражение является ортогональным инвариантом.

2) Оно не зависит от калибровочного множителя $\rho = \rho(u)$, так как

$$(\rho\mathfrak{r})_i = \rho \cdot \mathfrak{r}_i + \frac{\partial\rho}{\partial u^i} \cdot \mathfrak{r}.$$

3) В точке $\mathfrak{r} = (1, 0, \ldots, 0)$ интегрируемое выражение сводится к «евклидову» значению

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u^1}, \ldots, \dfrac{\partial x_n}{\partial u^1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u^n}, \ldots, \dfrac{\partial x_n}{\partial u^n} \end{vmatrix}.$$

После этих предварительных замечаний я теперь возвращаюсь к нашей задаче в E_n. Пусть кусок ν-мерного многообразия C_ν задан в гауссовом представлении

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u^1 \ldots u^n). \tag{6}$$

В каждой точке мы можем определить $m = n - \nu$ нормальных векторов $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(1), \ldots, \mathfrak{n}(m)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\mathfrak{r}_\alpha \cdot \mathfrak{n} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu),$$

которые нормализуются условием:

$$\mathfrak{n}(p) \cdot \mathfrak{n}(q) = \delta_{pq} \quad (p,\ q = 1, \ldots, m),$$

$\mathfrak{r}_\alpha$ — производная $\partial\mathfrak{r}/\partial u^\alpha$. С использованием радиус-вектора (6) и этих нормалей часть $C_\nu(a)$, покрытая шарами радиуса a вокруг точек C_ν, допускает представление

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r} + t_1\mathfrak{n}(1) + \ldots + t_m\mathfrak{n}(m) \qquad (t_1^2 + \ldots + t_m^2 \leqslant a^2) \tag{7}$$

в терминах параметров $u^1, \ldots, u^\nu, t_1, \ldots, t_m$. Следовательно, ее объем $V(a)$ есть интеграл

$$\int [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{n}(1), \ldots, \mathfrak{n}(m)]\, dt_1 \ldots dt_m du^1 \ldots du^\nu. \tag{8}$$

Следуя Гауссу, мы описываем поверхность C_ν, вложенную в E_n, с помощью метрической формы

$$(d\mathfrak{r})^2 = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \qquad (g_{\alpha\beta} = \mathfrak{r}_\alpha \cdot \mathfrak{r}_\beta)$$

вместе с линейным пучком вторых фундаментальных форм

$$-\sum_{p=1}^{m} \{t_p \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta}(p)\, du^\alpha du^\beta\},$$

который является скалярным произведением

$$d^2\mathfrak{r} = \sum_{\alpha,\beta} \mathfrak{r}_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

с произвольным вектором $\mathfrak{n} = t_1\mathfrak{n}(1) + \ldots + t_m\mathfrak{n}(m)$

$$G_{\alpha\beta}(p) = G_{\alpha\beta}(p) = -\mathfrak{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathfrak{n}(p) = \mathfrak{r}_\alpha \cdot \mathfrak{n}_\beta(p).$$

Греческий индекс α, добавленный к векторам $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{x}$, всегда означает дифференцирование по u^α.

Каждый вектор в точке $u \in C_\nu$ есть линейная комбинация базисных векторов $\mathfrak{r}_\alpha$, $\mathfrak{n}(p)$. Применяя это замечание к $\mathfrak{n}_\alpha(p)$, мы полагаем

$$\mathfrak{n}_\alpha(p) = \sum_\beta G_\alpha{}^\beta(p)\, \mathfrak{r}_\beta + \ldots,$$

где ... обозначает линейную комбинацию нормальных векторов $\mathfrak{n}(p)$. С помощью скалярного произведения с $\mathfrak{r}_\beta$ находим

$$G_{\alpha\beta}(p) = \sum_\lambda g_{\alpha\lambda} G_\beta{}^\lambda(p).$$

Из (7) выводим, что

$$\mathfrak{x}_\alpha = \sum_\beta \{\delta_\alpha{}^\beta + \sum_{p=1}^{m} t_p G_\alpha{}^\beta(p)\}\, \mathfrak{r}_\beta + \ldots$$

Тем самым интегрируемое выражение в (8) равно

$$\det\{\delta_\alpha{}^\beta + \sum_p t_p G_\alpha{}^\beta(p)\} \cdot [\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_\nu \mathfrak{n}(1) \ldots \mathfrak{n}(m)].$$

Ввиду общего равенства

$$[\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n]^2 = \det(\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k),$$

$$[\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_\nu \mathfrak{n}(1) \ldots \mathfrak{n}(m)]^2 = | g_{\alpha\beta} |,$$

и замечая, что

$$ds = | g_{\alpha\beta} |^{1/2} du^1 \ldots du^\nu$$

есть элемент площади на C_ν, мы приходим к фундаментальной формуле

$$V(a) = \int\limits_{C_\nu} \Big\{ \int\limits_{\Sigma t_i^2 \leqslant a^2} \Big| \delta_\alpha{}^\beta + \sum_p t_p G_\alpha{}^\beta(p) \Big| dt_1 \ldots dt_m \Big\} ds$$

в евклидовом случае. Интегрируемое выражение не зависит от выбора параметров u^α на C_ν.

В сферическом случае пусть многообразие C_ν задано параметрическим представлением (6) с нормализацией $\mathfrak{r}^2 = 1$. Тогда $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_\alpha = 0$. Взаимно ортогональные нормальные векторы $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(1) \ldots \mathfrak{n}(m)$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n} = 0, \quad \mathfrak{r}_\alpha \cdot \mathfrak{n} = 0.$$

Из обоих уравнений следует

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n}_\alpha = 0.$$

Часть $C_\nu(a)$ пространства S_n, покрытая $m = (n - \nu)$-мерными шарами сферического радиуса α, представлена в виде

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r} + t_1 \mathfrak{n}(1) + \ldots + t_m \mathfrak{n}(m),$$

где аргумент u в $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}(1) \ldots \mathfrak{n}(m)$ пробегает все C_ν, в то время как $t_1, \ldots$ $\ldots, t_m$ ограничены $\Sigma t_i^2 \leqslant a^2$:

$$t_1^2 + \ldots + t_m^2 \leqslant a^2 \qquad (a = \tan \alpha).$$

Согласно уравнению (5) объем $V(\alpha)$ трубы $C_\nu(\alpha)$ задается интегралом

$$\frac{[\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_\nu n(1) \ldots \mathfrak{n}(m)]}{(r^2)^{(n+1)/2}} du^1 \ldots du^\nu dt_1 \ldots dt_m, \tag{9}$$

распространенным по $u^1, \ldots, u^\nu$ на все C_ν, а по $t_1 \ldots, t_m$ на шар $\sigma_m(a)$. Используя ту же процедуру, что и раньше, получаем в результате формулу

$$V(a) = \int\limits_{C_\nu} \Big\{ \int\limits_{(t_1^2 + \ldots + t_m^2 \leqslant a^2)} \!\!\ldots\!\! \int \Big| \delta_\alpha{}^\beta + \sum_p t_p G_\alpha{}^\beta(p) \Big| \frac{dt_1 \ldots dt_m}{(1 + t_1^2 + \ldots + t_m^2)^{(n+1)/2}} \Big\} ds. \tag{10}$$

3. Оценка. Для любой функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_m)$ пусть $\langle \varphi(t) \rangle_t$ обозначает ее среднее значение на сфере

$$t_1^2 + \ldots + t_m^2 = 1. \tag{11}$$

Среднее значение $\langle t_1^{e_1} \ldots t_m^{e_m} \rangle_t$ монома, очевидно, равно 0, если только не все показатели e_p четны. В последнем случае имеем хорошо известную формулу

$$\langle t_1^{e_1} \ldots t_m^{e_m} \rangle_t = \frac{e_1) \ldots e_m)}{m(m+2) \ldots (m+e-2)} \tag{12}$$

(e_p четно, $e = e_1 + \ldots + e_m$ для $e = 2, 4, \ldots$), где $0) = 1$, $e) = 1 \cdot 3 \ldots \ldots (e-1)$.

[(12) наиболее просто доказывается с помощью умножения монома на

$$e^{-t_1^2} \ldots e^{-t_m^2} = e^{-(t_1^2+\ldots+t_m^2)}$$

и потом интегрированием по

$$-\infty < t_p < \infty \quad (p = 1, \ldots, m).$$

Мы получаем, таким образом,

$$\int t_1^{e_1} \ldots t_m^{e_m} \, d\omega_t \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} \cdot r^{e+m-1} \, dr = \prod_p \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t_2} t^{e_p} \, dt \right) \quad (e = e_1 + \ldots + e_m).$$

Здесь $\int \ldots d\omega_t$ обозначает интегрирование «по углу» на сфере (11) и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \int t_t^{e_1} \ldots t_m^{e_m} \, d\omega_t = \frac{\Gamma\left(\frac{1+e_1}{2}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{1+e_m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}.$$

В частности, для поверхности $\omega_m = \int d\omega_t$ сферы

$$\frac{1}{2} \omega_m = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^m \Big/ \Gamma\left(\frac{m}{2}\right). \tag{13}$$

Упростим полученный результат до требуемого выражения

$$\langle t_1^{e_1} \ldots t_m^{e_m} \rangle_t = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{e_1}{2}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{e_m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \Bigg/ \frac{\Gamma\left(\frac{m+e}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} =$$

$$= \frac{e_1) \ldots e_m)}{m(m+2) \ldots (m+e-2)}.$$

Объем шара $\sigma_m(a)$ равен

$$\frac{\omega_m}{m} \cdot a^m = \omega_m \int_0^a r^{m-1} \, dr;$$

следовательно, $\Omega_m = \omega_m / m$. Специализация (13) для $m = 2$ дает $[\Gamma(1/2)]^2 = \pi$. Числа ω_m, Ω_m лучше всего определяются рекуррентными формулами, прямо выводимыми из (13):

$$\omega_{m+2} = \frac{2\pi}{m} \omega_m \quad (m \geqslant 1); \quad (\omega_1 = 2, \omega_2 = 2\pi).$$

$$\Omega_{m+2} = \frac{2\pi}{m+2} \cdot \Omega \quad (m \geqslant 0); \quad (\Omega_0 = 1, \Omega_1 = 2).]$$

Мы разложим определитель

$$\psi(t_1 \ldots t_m) = \left| \delta_\alpha{}^\beta + \sum_p t_p G_\alpha{}^\beta(p) \right| = \psi_0 + \psi_1 + \ldots + \psi_\nu$$

по степеням переменных $t_1, \ldots, t_m$:

$$\psi_e(t_1 \ldots t_m) = \sum \varphi_{e_1 \ldots e_m} t_1^{e_1} \ldots t_m^{e_m} \qquad (e_1 + \ldots + e_m = e)$$

однородна степени e, $\psi_0 = 1$. Это разложение удобно записывается с помощью введения искусственного параметра λ:

$$\left| \delta_\alpha{}^\beta + \lambda \sum_p t_p G_\alpha{}^\beta(p) \right| = 1 + \lambda\psi_1 + \lambda^2\psi_2 + \ldots$$

Мы положим

$$\langle \psi_e(t_1 \ldots t_m) \rangle_t = \frac{H_e}{m(m+2)\ldots(m+e-2)}.$$

По определению H_e — инвариант точки из C_ν. $H_e = 0$ для нечетных e, в то время как для четных e легко получить из (12) точное выражение

$$H_e = \sum e_1) \ldots e_m) \cdot \varphi_{e_1 \ldots e_m} \qquad (e_p \text{ четно, } e_1 + \ldots + e_m = e).$$

Интеграл по шару $\sigma_m(a)$

$$\int_{\sigma_m(a)} \ldots \int \psi_e(t_1 \ldots t_m)\, dt_1 \ldots dt_m$$

тогда превращается в

$$\frac{\omega_m H_e}{m(m+2)\ldots(m+e-2)} \int_0^a r^{e+m-1}\, dr = \omega_m H_e \cdot \frac{a^{m+e}}{m(m+2)\ldots(m+e)}.$$

Таким образом, находим в евклидовом случае

$$V(a) = \Omega_m \sum_e k_e \frac{a^{m+e}}{(m+2)(m+4)\ldots(m+e)} \qquad (e \text{ четно, } 0 \leqslant e \leqslant \nu) \tag{14}$$

с коэффициентами

$$k_e = \int_{C_\nu} H_e\, ds. \tag{15}$$

В сферическом случае получаем

$$\int_{\sigma_m(a)} \ldots \int \psi_e(t) \frac{dt_1 \ldots dt_m}{(1 + t_1^2 + \ldots + t_m^2)^{(n+1)/2}} = \frac{\omega_m H_e}{m(m+2)\ldots(m+e-2)} \int_0^a \frac{r^{e+m-1}\, dr}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}.$$

Полагая $r = \tan\rho$, интеграл справа преобразуем в

$$\int_0^a (\sin\rho)^{m+e-1} (\cos\rho)^{\nu-e}\, d\rho,$$

и вместо (14) получаем

$$V(\alpha) = \omega_m \cdot \sum_e k_e J_e(\alpha) \qquad (e \text{ четно, } 0 \leqslant e \leqslant \nu), \tag{16}$$

где

$$m(m+2)\ldots(m+e-2)\, J_e(\alpha) = \int_0^\alpha (\sin\rho)^{m+e-1} (\cos\rho)^{\nu-e}\, d\rho. \tag{17}$$

Легко получить рекуррентное соотношение

$$\frac{(\sin\alpha)^{e+m}(\cos\alpha)^{\nu-e-1}}{m(m+2)\ldots(m+e)} = J_e(\alpha) - (\nu - e - 1)\, J_{e+2}(\alpha).$$

Теорема. *Объемы* (n, ν) *труб в евклидовом и сферическом пространстве даются формулами* (14), (16) *соответственно*, J_e (α) *определяются с помощью* (17). k_e, (15), *являются некоторыми глобальными инвариантами* C_ν, *в частности* k_0 *есть ее площадь.*

4. **Внутренняя природа инвариантов k_e.** Пока мы сделали едва ли больше, чем то, что мог бы проделать любой студент, выучивший интегральное исчисление. Однако некоторые, менее очевидные аргументы требуются для определения той более точной формы инварианта H_e, которая позволяет заменить кривизну $G_\alpha{}^\beta$ римановым тензором $R^\lambda_{\mu\alpha\beta}$ многообразия C_ν. Я напомню определение этого тензора в терминах соответствующего метрического тензора:

$$\sum_\lambda g_{k\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta k}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^k}\right)$$

[определение аффинной связности $\Gamma_{\alpha\beta}{}^k$],

$$R^k_{\lambda\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \Gamma^k_{\lambda\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^k_{\lambda\alpha}}{\partial u^\beta}\right) + \sum_\rho \left(\Gamma^k_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\lambda\beta} - \Gamma^k_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\lambda\alpha}\right).$$

После подъема индекса λ согласно

$$R^k_{\lambda\alpha\beta} = \sum_\mu g_{\lambda\mu} R^{k\mu}_{\alpha\beta}$$

$R_{\alpha\beta}{}^{k\lambda}$ становится кососимметрично не только по α, β, но также и по k, λ. Как часть условия интегрируемости, выражающего *евклидову* природу пространства вложения E_n, мы получаем соотношения [2]

$$R^{k\lambda}_{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^{m} \{G_\alpha{}^k(p)\, G_\beta{}^\alpha(p) - G_\beta{}^k(p)\, G_\alpha{}^\lambda(p)\}. \tag{18}$$

В *сферическом* случае мы рассматриваем C_ν как поверхность в E_{n+1}. К множеству m-нормалей $\mathfrak{n}(p)$ $(p = 1, \ldots, m)$ следует просто добавить $\mathfrak{n}(0) = \mathfrak{r}$. Так как

$$\mathfrak{n}_\alpha(0) = \mathfrak{r}_\alpha \quad \text{или} \quad G_\alpha{}^\beta(0) = \delta_\alpha{}^\beta,$$

[2] См.: *Weyl H.*— Math. Ztschr., 1922, Bd. 12, S. 154.

(18) преобразуется в уравнение

$$R_{\alpha\beta}^{k\lambda} - (\delta_\alpha{}^k\delta_\beta{}^\lambda - \delta_\beta{}^k\delta_\alpha{}^\lambda) = \sum_{p=1}^{m} \{G_\alpha{}^k(p)\,G_\beta{}^\lambda(p) - G_\beta{}^k(p)\,G_\alpha{}^\lambda(p)\}. \qquad (19)$$

Жаль, что неточный термин «кривизна», который должен бы быть оставлен для $G_\alpha{}^\beta(p)$, был перенесен на риманов тензор. В только что цитированной работе я предложил более четкий термин «векторный вихрь». Левая часть (19), а также (18) — это избыток вихря C_ν по сравнению с вихрем пространства вложения. В этой форме соотношение имеет место для любого риманова пространства вложения.

Мы должны попытаться далее выразить сферическое среднее

$$\langle \det(\delta_\alpha{}^\beta + \lambda \sum_p t_p G_\alpha{}^\beta(p))\rangle_t$$

в терминах величин

$$H\begin{pmatrix} k\lambda \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = \sum_p G_\alpha{}^k(p)\,G_\beta{}^\lambda(p) - \sum_p G_\alpha{}^\lambda(p)\,G_\beta{}^k(p). \qquad (20)$$

При этом исследовании

$$G_\alpha{}^\beta = (G_\alpha{}^\beta(1), \ldots G_\alpha{}^\beta(m)),$$

так же как

$$t = (t_1, \ldots, t_m),$$

можно рассматривать как произвольный вектор в m-мерном евклидовом пространстве E_m. Используя временно сокращение

$$z_\alpha{}^\beta = (t \cdot G_\alpha{}^\beta) = \sum_p t_p G_\alpha{}^\beta(p),$$

получаем

$$\psi_e = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_e} \begin{vmatrix} z_{\alpha_1}^{\alpha_1}, & \ldots, & z_{\alpha_1}^{\alpha_e} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{\alpha_e}^{\alpha_1}, & \ldots, & z_{\alpha_e}^{\alpha_e} \end{vmatrix}.$$

Итак, мы пытаемся определить

$$\langle \det(t \cdot G_\alpha{}^\beta)\rangle_t,$$

где $G_\alpha{}^\beta$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, e)$ — любые e^2 данных векторов в E_m.

Лемма.

$$\langle \det_{(\alpha,\,\beta=1,\ldots,e)}(t \cdot G_\alpha{}^\beta)\rangle_t = \frac{1}{m(m+2)\ldots(m+e-2)} \sum_{[\alpha,\,\beta]} \delta\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} H\begin{pmatrix}\beta_1\beta_2\\ \alpha_1\alpha_2\end{pmatrix} \ldots H\begin{pmatrix}\beta_{e-1}\beta_e\\ \alpha_{e-1}\alpha_e\end{pmatrix}, \qquad (21)$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_e$, $\beta_1 \ldots \beta_e$ — любые два расположения чисел $(1, \ldots, e)$, $\delta\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \pm 1$ в зависимости от того, является ли перестановка, переводящая расположение α в β, четной или нечетной. Сумма распространяется по всем наборам пар

$$\begin{matrix}(\alpha_1\alpha_2) \\ (\beta_1\beta_2)\end{matrix}\Bigg|\begin{matrix}(\alpha_3\alpha_4) \\ (\beta_3\beta_4)\end{matrix}\Bigg|\ldots \qquad (22)$$

«Парой» $(\alpha_1\alpha_2)$ мы называем два различных числа α_1, α_2 независимо от порядка расположения. Действительно, член $T\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ суммы $\sum\limits_{[\alpha,\,\beta]}$ в правой части (21) не меняется при обращении α-пары, $(\alpha_1, \alpha_2) \to (\alpha_2\alpha_1)$, или β-пары. Он не меняется также при перестановке его $e/2$ множителей H, тем самым только набор α-пар с β-парами, но не порядок этих $e/2$ блоков схемы (22) имеет значение. Среди $2^e\cdot(^1/_2e)!$ одинаковых членов, возникающих из $T\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ обращением любых из пар индексов и перестановкой $e/2$ множителей H, только один сохраняется в сумме.

Считая лемму доказанной, мы получаем сразу же

$$H_e = \sum_{[\alpha,\,\beta]} \delta\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} H\begin{pmatrix}\beta_1\beta_2\\ \alpha_1\alpha_2\end{pmatrix}\dots H\begin{pmatrix}\beta_{e-1}\beta_e\\ \alpha_{e-1}\alpha_e\end{pmatrix}, \tag{23}$$

где сумма теперь распространяется на все наборы пар (22) из большего ряда $1, 2, \dots, \nu$, для которых β-последовательность состоит из тех же e различных чисел, что и α-последовательность. Инвариантная природа суммы справа становится очевидной, если мы сперва запишем ее в виде

$$\frac{1}{2^e(e/2)!}\sum_{\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_e}\ \sum_{1',\,\dots,\,e'} \pm H\begin{pmatrix}\alpha_{1'},\alpha_{2'}\\ \alpha_1\ \alpha_2\end{pmatrix} H\begin{pmatrix}\alpha_{3'},\alpha_{4'}\\ \alpha_3\ \alpha_4\end{pmatrix}\dots\ (e/2 \text{ множителей}).$$

Внутренняя сумма, алтернируясь, пробегает по всем перестановкам $(1', \dots, e')$ для $(1, \dots, e)$. Ограничение, что $\alpha_1, \dots, \alpha_e$ различные, можно не учитывать, так как внутренняя сумма зануляется, если два разных α_j совпадают. Следовательно,

$$H_e = \frac{1}{2^e(e/2)!}\sum_{1',\,\dots,\,e'}\left\{\pm\sum_{\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_e} H\begin{pmatrix}\alpha_{1'},\alpha_{2'}\\ \alpha_1\ \alpha_2\end{pmatrix} H\begin{pmatrix}\alpha_{3'},\alpha_{4'}\\ \alpha_3\ \alpha_4\end{pmatrix}\dots\right\}. \tag{24}$$

Внутренняя сумма, в которой каждый α пробегает независимо от 1 до ν, является скаляром. Таким образом, нами получена окончательная.

Теорема. *Скаляр* H_e *на* C_ν *определяется по формулам* (23), (24), *где* $H\begin{pmatrix}\lambda\mu\\ \alpha\beta\end{pmatrix}$ — *риманов тензор или вихрь* $R^{\lambda\mu}_{\alpha\beta}$ *в евклидовом случае и избыточность вихря* (19) *в сферическом случае.*

Эти метрические скаляры H_e сами по себе заслуживают внимание: они, возможно, простейшие и наиболее фундаментальные скаляры, построенные по риманову тензору.

Как весьма частный случай нашей теоремы мы находим, что *одночленные формулы*

$$V(a) = \Omega_m a^m\cdot k_0, \qquad V(\alpha) = \Omega_m J_0(\alpha)\cdot k_0$$

справедливы, если C_ν *можно отобразить изоморфно на* E_ν *или* S_ν *соответственно* (k_0 обозначает площадь C_ν). Результат профессора Хотелинга, относящийся к трубам вокруг *кривой* $\nu = 1$, полностью содержится в этом специальном случае.

Лемма доказывается рассуждениями из теории инвариантов следующим образом. Мы рассматриваем e^2 векторов $C_\alpha{}^\beta$ как независимые переменные.

$$\Phi = \langle \det (t \cdot G_\alpha{}^\beta) \rangle_t$$

— это ортогональный инвариант этих переменных и тем самым согласно теории ортогональных векторных инвариантов [3] может быть выражен как полином от скалярных произведений $(G_\alpha{}^\lambda \cdot G_\beta{}^\mu)$. Замечая, что Φ линеен и однороден по компонентам векторов в каждой строке и каждом столбце схемы

$$\left\| \begin{matrix} G_1{}^1, & \ldots & , G_1{}^e \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G_e{}^1, & \ldots & , G_e{}^e \end{matrix} \right\|,$$

мы видим, что он должен быть линейной комбинацией членов

$$(G_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdot G_{\alpha_2}^{\beta_2}) \ldots (G_{\beta_{e-1}}^{\beta_{e-1}} \cdot G_{\alpha_e}^{\beta_e}),$$

где α и β — любые два расположения $1, \ldots, e$. Более того, Φ кососимметричен по столбцам. Следовательно, суммируя с альтернированием по $e!$ перестановками верхних индексов β, мы находим, что Φ есть линейная комбинация следующих функций:

$$\sum_{(\beta)} \delta \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} (G_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdot G_{\alpha_2}^{\beta_2}) (G_{\alpha_3}^{\beta_3} \cdot G_{\alpha_4}^{\beta_4}) \ldots = \sum_{[\beta]} \delta \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \ldots$$

Первая функция пробегает все $e!$ перестановок $\beta_1 \ldots \beta_e$, $1, \ldots e$, вторая все их $e!/2^{e/2}$ расположений в пары

$$(\beta_1\beta_2),\ (\beta_3\beta_4),\ \ldots$$

Применяя те же аргументы для нижних индексов α, мы заключаем, что Φ с точностью до постоянной совпадает с H_e, (23).

Постоянная c определяется из специализации

$$G_\alpha{}^\beta = (\delta_\alpha{}^\beta, 0, \ldots, 0),$$

для которой

$$\Phi = \langle t_1{}^e \rangle_t = \frac{e)}{m(m+2)\ldots(m+e-2)}$$

и

$$H \begin{pmatrix} \lambda\mu \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = \delta_\alpha{}^\lambda \delta_\beta{}^\mu - \delta_\alpha{}^\mu \delta_\beta{}^\lambda, \qquad H_e = e!/2^{e/2} \left(\frac{1}{2} e\right)! = e).$$

---

[3] *Study E.*— Ber. Sächs. Akad. Wiss., 1897, S. 442; *Weyl H.*— Math. Ztschr., 1924, Bd. 20, S. 136.

ПРИЗРАК МОДАЛЬНОСТИ*

Философия Гуссерля возникла в результате его стремления вскрыть феноменологические корни арифметики и логики. Потому-то математику не кажется неуместным рассказать о попытках символической логики прояснить смысл такой исключительно важной идеи, как идея *возможности*. Символическая трактовка нейтральна по отношению к философской интерпретации, и нет причины, по которой она должна оставаться монополией позитивистской школы. Так рассуждал О. Беккер, который бился над этим вопросом, совмещая логическое исчисление с феноменологией [1]. Я буду вызывать неуловимый дух модальности иным заклинанием.

I. На твердой почве классической логики

Классическая логика высказываний, формализованная Г. Фреге, а позднее Расселом и Уайтхедом в «Principia Mathematica» [1], базируется на допущении, что высказывание адресует вопрос некоторой области действительности, факты которой отвечают на него совершенно однозначно «да» или «нет»; вплоть до «Principia Mathematica» все верили, или по крайней мере надеялись, что именно такова природа математических высказываний, не оставляющих места для неопределенностей, выражаемых модальностями «возможно», «может быть» и т. п.

В таком случае высказывание допускает только два «истинностных значения»: 1 (да, или истина) и 0 (нет, или ложь). Смысл связок $\sim$ (нет), $\bigcup$ (или), $\bigcap$ (и), $\rightarrow$ (если, то) определяется следующими «матрицами», сопоставляющими предложениям

$$\sim\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}\bigcup\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}\bigcap\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}\rightarrow\mathfrak{b}, \qquad (1)$$

одно из истинностных значений 0,1 всякий раз, когда известны истинностные значения произвольных высказываний $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$:

$\mathfrak{a}$	$\sim\mathfrak{a}$
1	0
0	1

отрицание

$\mathfrak{a}\backslash\mathfrak{b}$	1	0		$\mathfrak{a}\bigcup\mathfrak{b}$			$\mathfrak{a}\bigcap\mathfrak{b}$			$\mathfrak{a}\rightarrow\mathfrak{b}$	
1	1	1					1	0		1	0
0	1	0					0	0		1	1

$$\begin{array}{c|cc} \mathfrak{a}\backslash\mathfrak{b} & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$\mathfrak{a}\bigcup\mathfrak{b}$ — дизъюнкция; $\mathfrak{a}\bigcap\mathfrak{b}$ — конъюнкция; $\mathfrak{a}\rightarrow\mathfrak{b}$ — импликация

Исключительная важность $\rightarrow$ заключена в следующем факте, который мы называем *схемой вывода*:

Если имеют место высказывания $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{a}\rightarrow\mathfrak{b}$, *то имеет место* $\mathfrak{b}$. (F)

---

* The ghost of modality.— In: Philosophical essays in memory of Edmund Husserl. Cambridge (Mass.), 1940, p. 278—303. Перевод З.А Кузичевой.

1 *Becker O.* Zur Logik der Modalitäten.— Jahrb. Philosophie und phänomenologische Forsch., 1930, Bd. 11, S. 397.

Унарная операция $\sim$ и бинарные $\bigcup$, $\bigcap$, $\rightarrow$ выражают элементарные логические операции в том смысле, что истинностные значения (1) зависят от истинностных значений аргументов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Можно опустить любые две бинарные операции, потому что они выражаются в терминах третьей и отрицания.

Следующие основные комбинации истинны, каковы бы ни были истинностные значения аргументов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$:

Таблица CT[2]

I (импликация)

1) $\mathfrak{a} \rightarrow (\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a})$,
2) $(\mathfrak{a} \rightarrow (\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b})) \rightarrow (\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b})$,
3) $(\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}) \rightarrow ((\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}) \rightarrow (\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}))$.

II (отрицание)

1) $(\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}) \rightarrow (\sim \mathfrak{b} \rightarrow \sim \mathfrak{a})$,
2) $\mathfrak{a} \rightarrow \sim\sim \mathfrak{a}$,
3) $\sim\sim \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$.

III (дизъюнкция)

1) $\mathfrak{a} \rightarrow \cdot\, \mathfrak{a} \bigcup \mathfrak{b}$,
2) $\mathfrak{b} \rightarrow \cdot\, \mathfrak{a} \bigcup \mathfrak{b}$,
3) $(\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}) \rightarrow ((\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}) \rightarrow (\mathfrak{a} \bigcup \mathfrak{b} \cdot \rightarrow \mathfrak{c}))$.

IV (конъюнкция)

1) $\mathfrak{a} \bigcap \mathfrak{b} \cdot \rightarrow \mathfrak{a}$,
2) $\mathfrak{a} \bigcap \mathfrak{b} \cdot \rightarrow \mathfrak{b}$,
3) $(\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}) \rightarrow ((\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}) \rightarrow (\mathfrak{a} \rightarrow \cdot\, \mathfrak{b} \bigcap \mathfrak{c}))$.

I и II могут рассматриваться как аксиомы для импликации и отрицания, в то время как III и IV определяют $\bigcap$ и $\bigcup$ в терминах импликации и отрицания.

Следуя фон Нейману [3], мы избегаем введения пропозициональных переменных и сопутствующего ему правила подстановки. Формула вида I, 1) скорее предназначена для выражения следующей связи: если даны два предложения $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то, не интересуясь истинностью $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, можно быть уверенным, что предложение $(\mathfrak{a} \rightarrow (\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a}))$ истинно. В соответствии с принятыми Гильбертом обозначениями готические буквы всюду в дальнейшем служат «коммуникативными знаками». Не являясь объектами самой теории, они используются для краткой и ясной записи фактов или указаний, большей частью гипотетической общности[4]. В полностью формализованной системе предложения представляются *формулами* и дается точное описание того, что такое формула. Формулы — это последовательности каких-то символов, среди которых встречаются $\sim$, $\bigcup$, $\bigcap$, $\rightarrow$, и, если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — формулы, то в соответствии с этим описанием выражения из (1)

[2] Эта таблица взята из книги: *Hilbert D., Bernays P.* Grundlagen der Mathematik. B., 1934, Bd. 1, S. 66 [2].

[3] Math. Ztschr., 1927, Bd. 26, S. 1.

[4] Исключительно ясное и подробное изложение идей Гильберта дано в: *Hilbert D., Bernays P.* Grundlagen der Mathematik. B., 1934, Bd. 1; 1939, Bd. 2 [2].

будут формулами. Формулы *доказываются* в соответствии с действующими одновременно правилами двух типов: *аксиома* устанавливается посредством одного из аксиоматических правил; формула выводится из двух уже доказанных формул по правилу вывода (F). Таблица СТ состоит из аксиоматических правил. Правило I, 1), например, гласит: возьмем формулу $\mathfrak{a}$ и формулу $\mathfrak{b}$ и составим из них $\mathfrak{a} \to (\mathfrak{b} \to \mathfrak{a})$, которая тем самым устанавливается как доказуемая формула (аксиома). Правило вывода вступает в действие, если имеем две формулы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ уже доказаны; тогда оно дает право считать $\mathfrak{b}$ доказанной формулой. В конкретной теоретической дисциплине логические аксиомы I—IV составляют лишь часть аксиоматической системы, возможно, наиболее простую. В этой игре построения истинных формул смысл формул не имеет значения. Следует ясно отличать символические формулы, сами по себе не имеющие смысла, от правил преобразования, рассказывающих нам о том, как обращаться с символическим материалом, и обладающих смыслом, который должен быть понятен всякому, кто применяет эти правила. Таблица СТ в некотором точно установленном смысле полна.

Рассел, пожалуй, сделал неудачно, назвав оператор $\to$ импликацией, ибо это может приводить к недоразумениям. Импликация, заключенная в первом члене силлогизма

Все люди смертны
Сократ — человек
―――――――――
Сократ смертен

утверждает, что

$$x \text{ — человек} \to x \text{ — смертен}$$

справедливо для *всех вообще* индивидов x. Мы здесь имеем дело с пропозициональными функциями $\mathfrak{A}(x)$, или предикатами, относящимися к произвольному элементу x некоторого «поля» или «области» ω индивидов или «точек». Например, x может изменяться в пределах всех целых чисел или всех точек геометрического пространства. Если мы выберем в качестве нашего пространства фазовое пространство какой-нибудь физической системы, тогда x указывает фазу или состояние этой системы. Полное знание о точке x заключается в знании ее положения, разновидность неполного знания — в умении определить, что x лежит в некоторой области α пространства ω. Эти области, или «множества» α, таким образом, соответствуют возможным предикатам $\mathfrak{A}(x)$, относящимся к переменной точке x в ω; α есть *объем* $\mathfrak{A}(x)$, заключающий все точки x, для которых имеет место $\mathfrak{A}(x)$. Логические операторы $\sim$, $\bigcup$, $\bigcap$, $\to$ применяются к пропозициональным функциям и могут интерпретироваться как операторы, действующие в соответствующих множествах; первые три в этом случае называются дополнением, объединением, пересечением соответственно. $\alpha \to \beta$ есть объединение β и дополнения к α. И не этот оператор, а скорее, отношение

$$\alpha \subset \beta, \ \alpha \text{ есть часть } \beta,$$

заслуживает названия «импликация». Правило вывода (F) в этой интепретации читается так:

Если точка p лежит в α, и $\alpha \to \beta$, то p лежит в β, (F)

тогда как *силлогизм* говорит:

Если p лежит в α, и α есть часть β, то p лежит в β. (S)

Связь обеспечивается следующим обстоятельством:

$\alpha \subset \beta$ утверждает, что множество $\alpha \to \beta$ становится всем пространством ω. $(\bar{F})$

(F) дает наиболее полный ответ на вопрос: что мне надо знать о точке p в α, чтобы быть уверенным в том, что она лежит в β? В самом деле, $\alpha \to \beta$ есть *наибольшее* множество γ, пересечение которого с α содержится в β, т. е. любая такая область γ содержится в $\alpha \to \beta$.

Вот что можно сказать о связи между *оператором* $\to$ и *отношением* $\subset$. Исчисление подмножеств некоторой области удовлетворяет аксиомам таблицы CT в том смысле, что каждая формула этой таблицы представляет всю область ω, каковы бы ни были подмножества $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. По многим причинам аксиомы удобнее записывать в терминах операций $\sim$, $\bigcup$, $\bigcap$. Тогда аксиомы имеют дело с классом объектов, называемых множествами, двумя выделенными множествами («пустым множеством» o и «универсальной областью» ω) и тремя операциями $\sim$, $\bigcup$, $\bigcap$. Знак $=$ означает тождество. Расположение таблицы CS демонстрирует своеобразную двойственность, согласно которой аксиомы правого столбца получаются из аксиом левого и наоборот, если применить инволюцию $\sim$.

Таблица *CS*

$\sim\sim\alpha = \alpha$

$\sim o = \omega$	$\sim \omega = o$
$\sim(\alpha \bigcap \beta) = (\sim\alpha) \bigcup (\sim\beta)$	$\sim(\alpha \bigcup \beta) = (\sim\alpha) \bigcap (\sim\beta)$
$\alpha \bigcup o = \alpha$	$\alpha \bigcap \omega = \alpha$
$\alpha \bigcap o = o$	$\alpha \bigcup \omega = \omega$
$\alpha \bigcup (\sim\alpha) = \omega$	$\alpha \bigcap (\sim\alpha) = o$
$\alpha \bigcap \beta = \beta \bigcap \alpha$	$\alpha \bigcup \beta = \beta \bigcup \alpha$
$(\alpha \bigcap \beta) \bigcap \gamma = \alpha \bigcap (\beta \bigcap \gamma)$	$(\alpha \bigcup \beta) \bigcup \gamma = \alpha \bigcup (\beta \bigcup \gamma)$
$\alpha \bigcap (\beta \bigcup \gamma) = (\alpha \bigcap \beta) \bigcup (\alpha \bigcap \gamma)$	$\alpha \bigcup (\beta \bigcap \gamma) = (\alpha \bigcup \beta) \bigcap (\alpha \bigcup \gamma)$.

Эти аксиомы истинны для любых множеств α, β, γ. Желая интерпретировать $=$ не как логическое тождество, а как материальное отношение между множествами, которое входит в аксиомы на тех же правах, что и $\sim$, $\bigcap$, $\bigcup$, следует добавить аксиомы, выражающие рефлексивность, симметричность и транзитивность $=$, и также, что всякие множества α, α', β, β', для которых $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, удовлетворяют уравнениям

$$\sim\alpha = \sim\alpha', \quad \alpha \bigcap \beta = \alpha' \bigcap \beta', \quad \alpha \bigcup \beta = \alpha' \bigcup \beta'.$$

Не было бы ошибкой ввести в качестве основного, наряду с $=$, отношение $\alpha \subset \beta$ (α часть β), но оно может быть определено любым из уравнений

$$\alpha \bigcap \beta = \alpha, \qquad \alpha \bigcup \beta = \beta. \tag{3}$$

Их эквивалентность следует из аксиом CS. Отношение $\alpha \subset \beta$, определенное уравнениями (3), подчиняется следующим законам:

$$\alpha \subset \alpha, \quad (\alpha \cap \beta) \subset \beta, \quad \alpha \subset (\alpha \cup \beta).$$
$$\text{Если } \alpha \subset \beta,\ \beta \subset \gamma, \text{ то } \alpha \subset \gamma.$$

До сих пор аксиомы касались только одного класса объектов, множеств [5]. Точки и их связь с множествами удобнее ввести, следующим образом выражая тот факт, что точка x лежит или не лежит в множестве ξ

$$(\xi; x) = 1 \text{ или } (\xi; x) = 0 \qquad (4)$$

соответственно. Тогда мы будем иметь определенные аксиомы, касающиеся универсальной функции (ξ, x), которая принимает только два значения 1 и 0 и аргументы ξ, x которой пробегают множества и точки соответственно. Например, соотношения

$$(0; p) = 0, \quad (\omega; p) = 1$$

имеют место для любой точки p. Самая замечательная черта этого исчисления состоит в том, что

$$\sim (\alpha; p),\ (\alpha \cap \beta; p) \text{ и } (\alpha \cup \beta; p)$$

однозначно определяются значениями $(\alpha; p)$ и $(\beta; p)$, именно согласно таблицам (2) для $\sim$, $\cap$, $\cup$.

От одноместных предикатов и множеств можно перейти к двуместным и более (отношениям) стандартным приемом образования (упорядоченных) пар, троек и т. д. Если точки x, x' изменяются в пределах областей ω, ω' соответственно, то пара (x, x') пробегает так называемое произведение пространств $\omega \times \omega'$.

II. Призрак чуть виден

Первая серьезная попытка преодолеть преграду, воздвигнутую перед модальной логикой, в «Principia mathematica» была предпринята в системе «строгой импликации» Льюиса [6]. Льюис не заметил того обстоятельства, что «материальная импликация» $\rightarrow$ Рассела является связующим звеном в правильном выводе. По Расселу утверждение

(Цезарь жив) $\rightarrow$ (луна сделана из зеленого сыра)

---

[5] Если мы определим $\alpha + \beta$ как множество, остающееся после удаления $\alpha \cap \beta$ из $\alpha \cup \beta$, а $\alpha \cdot \beta$ как пересечение α с β, то получим кольцо в обычном алгебраическом смысле (булеву алгебру), любой элемент α которого удовлетворяет условиям $\alpha \cdot \alpha = \alpha$, $\alpha + \alpha = 0$. Ср. *Bernstein B. A.*— Trans. Amer. Math. Soc., 1929, vol. 26, p. 171. Наша система аксиом далека от того, чтобы характеризовать объекты как (все) множества некоторой точечной области. Насколько далека, обнаружено в основательном исследовании Стоуном булевых алгебр: Trans. Amer. Math. Soc., 1936, vol. 40, p. 37—111. Общие аксиоматические исследования такой ужасающе «экзистенциональной» природы едва ли имеют какое-либо отношение к фундаментальным эпистемологическим исследованиям. В математике мы вынуждены мириться с этим; до тех пор, пока вопрос о ее основаниях не будет разрешен, если такое время вообще наступит, ничто, кроме произвольно навязанных предписаний, не сможет отделить в математике законные действия от беззаконных.

[6] См.: *Lewis C. J.*, *Langford C. H.* Symbolic logic. N. Y., 1932. В логике Аристотеля обстоятельно исследованы косвенные методы [oblique modes]. Предшественником Льюиса является Мак-Кол; см.: *Mac-Coll H.* Symbolic logic and its applications. L., 1906.

вполне осмысленно. Льис говорит: «Но предположение о ложности утверждения, что Цезарь мертв, никак не связано с предположением о том, что луна сделана из зеленого сыра». Может быть, это и так, однако, разумеется, нет ничего неправильного в том, что элементарный логический оператор → вводится соотношениями (2) и выделяется фундаментальное правило (F). Более того, импликация в традиционном силлогистическом смысле означает отношение $\alpha \subset \beta$ для предикатов или множеств α, β, и я не вижу оснований отвергать сделанный в ($\overline{\mathrm{F}}$) анализ отношения в терминах → «и все», как бы ни называть оператор →.

Я процитирую еще два критических замечания Льюиса против →. Он находит эту импликацию недостаточной для того, чтобы подтверждать косвенное доказательство, так как «гипотеза, истинность которой проблематична, имеет логические следствия, независимые от ее истинности или ложности». И он приходит к заключению: «Исчисление (материальной) импликации не только содержит ложные теоремы, но все теоремы этого исчисления не доказуемы, поскольку теоремы вытекают (are implied) из постулатов в смысле «влечет» (implies), используемом в этой системе... В «Principia mathematica», например, предположения влекут теоремы в том же смысле, что ложное предложение влечет что угодно». Я же уверен, что этот довод теряет силу при четком различении формул системы, в которых встречается символ →, и правил преобразования, включая правило вывода (F), в соответствии с которыми происходит игра в дедукцию. «Правильный вывод» устанавливается моими действиями над формулами в соответствии с правилами, способ применения которых осмыслен, в то время как знак → есть часть лишенных смысла формул. Таким образом, оказывается, что введенное Гильбертом различие между математикой и метаматематикой более полно и радикально, чем то, к которому стремился Льюис, противопоставляя строгую импликацию материальной.

Сам Льюис полагал, что истинная или строгая импликация выражает *необходимость* $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$, вследствие чего он обратился к коррелятивным модельным понятиям необходимости и невозможности. (Невозможность $\mathfrak{a}$ эквивалентна необходимости $\sim\mathfrak{a}$.) В свете сделанного выше замечания необходимость (слово двусмысленное и сомнительное) могла бы интерпретироваться как *выводимость*. Когда я ставлю знак $\vdash$ перед формулой $\mathfrak{a}$, я намерен тем самым выразить исторический факт, что *я преуспел* в получении формулы $\mathfrak{a}$ в протекающей по определенным правилам игре. Однако это утверждение, или необходимость, является относительным, будучи связанным с аксиомами, из которых выведена формула. В самой математике мы можем, таким образом, говорить о различных уровнях математической необходимости в соответствии с тем, какие аксиомы мы допускаем, начиная с элементарных логических аксиом СТ («аналитическая» необходимость) и добавляя одну за другой трансцендентные логические, арифметические, и, наконец, теоретико-множественные аксиомы. Вне математики этот список может быть продолжен. Возьмем, к примеру, следующие утверждения о поезде, отправляющемся из Сиэтла в Вашингтон 18 января 1940 г. в 10 ч 15 мин местного времени:

(1) Он прибудет и не прибудет в Чикаго к определенному времени.
(2) Он прибудет в Чикаго в тот же день в 9 ч 15 мин местного времени.
(3) Он прибудет туда через 0,002 с после отправления из Сиэтла.
(4) Он прибудет туда в тот же день в 11 ч 45 мин местного времени.

Первое невозможно логически. Второе *a priori* или *wesensgesetzlich* [*по законам бытия*] (Кант, Гуссерль) невозможно, так как противоречит природе времени: действие предшествует причине. Третье (если учесть расстояние от Сиэтла до Чикаго) невозможно физически — скорость любого перемещения ограничена скоростью света. Наконец, четвертое, по крайней мере в настоящее время, невозможно технически.

Еще важнее другой момент. Утверждение $\vdash \mathfrak{a}$, в отличие от самого $\mathfrak{a}$, не формула системы, а осмысленное утверждение или сообщение об $\mathfrak{a}$. В результате этого *metabasis eis allo genos* [перехода в другой род] нет смысла применять к $\vdash \mathfrak{a}$ внутренние операторы системы, вроде $\sim$, $\bigcup$, $\bigcap$, а также повторять знак $\vdash$. Это расходится с намерениями Льюиса: он хотел иметь два оператора P, N (возможность и необходимость), которые преобразовывали бы одну формулу в другую и комбинировались бы с другими логическими операторами.

Юм в своем анализе причинности заменил утверждение о том, что событие A *необходимо* влечет B (поскольку оно включает смутное понятие необходимости, не проверяемое в опыте), индуктивно проверяемым утверждением о том, что *всякий раз, когда* происходит событие A, за ним следует B. Аналогично, утверждая, что число n необходимо удовлетворяет уравнению

$$n + 1 = 1 + n,$$

математик, вероятно, желает просто сказать, что все числа удовлетворяют этому уравнению. Однако в значении термина «все» имеются тонкие нюансы. Последнее предложение можно считать собирательным [collective] утверждением о бесконечно многих уравнениях

$$1 + 1 = 1 + 1, \quad 2 + 1 = 1 + 2, \quad 3 + 1 = 1 + 3, \quad 4 + 1 = 1 + 4, \ldots$$

С интуиционистской точки зрения сомнительно, чтобы такая «бесконечная логическая сумма» имела смысл. С этой точки зрения наше высказывание интерпретируется как предложение *гипотетической* общности, этот тезис мог быть подкреплен тем, что слово «необходимо» намекает на такого сорта общности: *если* вам дано конкретное число n, то вы можете без дальнейшей проверки быть уверены в том, что $n + 1 = 1 + n$. Это предложение не утверждает некий факт, оно говорит о чем-то, только если..., именно, если вам действительно дано некоторое число. Оно берет на себя смелость предсказать нечто об n до того, как станет известно, что это за число. Когда ставится вопрос, на каком основании базируется это предвидение, некоторые ответят, что оно базируется на проникновении в общую природу чисел. Какими бы достоинствами ни обладала такая ссылка на общую природу вещей, наше мнение о том, что слово *необходимо* годится для обозначения гипотетической общности в противоположность фактической, можно подтвердить таким наблюдением: это слово предпочитают не употреблять, когда исчезает упомянутое различие, например, в случае поэлементного задания конечного множества. Что касается меня, то я не чувствую разницы между утверждениями: «Число, равное 1, или 3, или 5, необходимо нечетно» и «Один нечетно, три нечетно, пять нечетно». В каком отношении добавление «необходимо» изменяет смысл утверждений вроде: «Три (необходимо) нечетно», «Этот лист бумаги (необходимо) белый»?

Но вернемся к основам. Для классической логики характерно основное предположение о строгой альтернативе истины и лжи, не допускающее преодоления пропасти между ними введением понятий «возможно», «вероятно». Однако наши повседневные суждения, существенные для нас и наших сообщений, большей частью не столь категоричны. Можно найти *более или менее* серое вместо чисто черного или чисто белого. Мы можем счесть слишком сомнительным или даже невероятным указание точных границ в непрерывном. Еще более важные примеры возникают в суждениях о будущем. Скажем, такой вопрос: «Разразится ли в Европе в будущем году глобальная война?» [7] — не апеллирует к проверке действительностью в настоящем, а обсуждается теперь (в данный момент) в выражениях вроде: возможно, вероятно, неизбежно, скорее истинно, чем ложно. Через год это утверждение действительно можно будет проверить, но тогда у него придется изменить временну́ю форму: «Разразилась ли в прошлом году глобальная война?» Мы намечаем планы, мысленно обрисовывая наши будущие возможности, и принимаем решения, взвешивая и обдумывая их. Всякий, кто ведет машину, инстинктивно делает такую оценку будущей ситуации почти в каждый данный момент времени. Мы стремимся к определенным целям, идем на риск, нас подстерегают опасности; мы зависим не только от определенных обстоятельств, но и от наших видов на будущее, часто порождающих уверенность или страх [3]. Можно остерегаться говорить здесь о знании и мнениях, хотя все это имеет структуру суждений и означает нечто насущное для нас. (Если верить прагматизму, всякое знание имеет только этот «насущный» смысл, которым направляется наша деятельность.) Известие «Отец умер сегодня утром» — констатирует тягостный факт; телеграмма сестры: «Мы ожидаем худшего, приезжай немедленно» — ничуть не меньше влияет на мои поступки, хотя в ней выражено лишь некоторое предвидение.

Простое утверждение: «Это так», например, «У этого стола такой-то зеленый цвет» — для своего подтверждения нуждается в *фактах*; в ответ на сомнение в правильности этого утверждения можно было бы в принципе сказать: «Смотри!». Но утверждающего о невозможности чего-то, можно спросить: *почему*? Его утверждение нуждается в *доводах*. Так, в примере с телеграммой, извещающей о болезни отца, вывод: «Его жизнь в опасности» — имеет своими посылками, во-первых, факт болезни, сопровождаемой такими-то и такими симптомами, во-вторых, медицинское заключение, выраженное суждением гипотетической общности: «Такие симптомы (часто) указывают на близкую смерть» (элемент неопределенности обусловливает индуктивный, а не дедуктивный характер этого суждения).

В классической логике не возникает сомнений в значении высказывания, составленного из произвольных высказываний $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ с помощью операторов $\sim$, $\bigcup$, $\bigcap$, хотя оно может иметь весьма сложную структуру. Имеется совершенно четкий критерий, на основании которого заключают, истинно ли (действительно) такое составное высказывание: оно истинно, если его значение оказывается равным 1 для любых комбинаций значений 1, 0, приписываемых аргументам $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... Сомнения и нерешительность, которые мы испытываем, когда доходим до формулировки аксиом, управляющих использованием P и N,—

[7] Это написано в конце 1938 г.

вот наиболее явственные приметы того полумрака, который окутывает эти самые модусы. Мы уверены в их зависимости друг от друга, выраженной двойной импликацией

$$\sim P\mathfrak{a} \rightleftarrows N \sim \mathfrak{a}. \tag{5}$$

Кроме того,

$$\mathfrak{a} \to P\mathfrak{a},\ N\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}. \tag{6}$$

Можно еще договориться относительно следующего принципа:

$$N\ (\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}) \to (N\mathfrak{a} \to N\mathfrak{b}). \tag{7}$$

«Если $\mathfrak{a}$ необходимо влечет $\mathfrak{b}$, и $\mathfrak{a}$ необходимо, то необходимо $\mathfrak{b}$». Но когда начинаются повторения, приходят сомнения: верно ли, что

$$PP\mathfrak{a} \to P\mathfrak{a}, \tag{8}$$

и верно ли даже, что

$$P\mathfrak{a} \to NP\mathfrak{a}? \tag{9}$$

Последняя аксиома означала бы, что утверждения о возможности или невозможности сами не подчиняются модальным градациям, они либо невозможны, либо необходимы. Чем дальше, тем больше создается впечатление, что движешься среди бесплотных теней. Чтобы нащупать верную тропинку, приходится исследовать содержательные «модели», в которых не возникает сомнений относительно смысла P и N и в которых эти операторы свободно и однозначно комбинируются как с $\sim$, $\bigcup$, $\bigcap$, так и между собой. Если в нескольких из этих моделей мы натолкнемся на одно и тоже полное множество аксиом, тогда у нас есть основания верить в пригодность универсальной модальной логики. В противном случае наша надежда погибнет в зародыше. Этим мы теперь и займемся (разделы III—VI).

III. Первая попытка удержать призрак: вероятность

При самых благоприятных условиях правдоподобие можно описать *измеримой вероятностью* [8]. В исчислении вероятностей предложению или «событию» $\mathfrak{a}$ приписывается поэтому не значение истинности 0 или 1, а вероятность a, которая может быть любым действительным числом в пределах от 0 до 1: $0 \leqslant a \leqslant 1$. Вероятность событий «$\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$» может иметь любое значение между 0 и $\min(a, b)$. Латинским шрифтом здесь обозначается вероятность события, обозначенного соответствующей готической буквой;

$$\max\ (a, b),\ \min\ (a, b)$$

— наибольшее и наименьшее из a, b соответственно. Чтобы получить замкнутое исчисление вероятности, в котором значения $\sim\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \bigcap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \bigcup \mathfrak{b}$ определяются значениями $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, этим событиям приписываются вероятностные значения в соответствии с соглашениями:

---

[8] О. Беккер в цитированном выше сочинении весьма успешно использует в модальной логике классическую урновую модель.

Предложение	$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$	$\sim\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}$
Значение	a, b	$1-a$	$\min(a, b)$	$\max(a, b)$

(10)

Пусть $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$ указывает отношение $a\leqslant b$ («$\mathfrak{b}$ по крайней мере столь же вероятно, как $\mathfrak{a}$»). Можно ли по аналогии с $(\overline{\text{F}})$ выразить это отношение с помощью некоторого оператора $\rightarrow$, полагая, что $\mathfrak{a}\rightarrow\mathfrak{b}$ имеет значение 1? Тогда следовало бы ожидать, что символ $\rightarrow$ в исчислении вероятности будет играть роль, аналогичную роли синонимичного ему оператора $\rightarrow$ в исчислении истинности. $a\leqslant b$ эквивалентно

$$\min(a, b) = a \text{ или } a - \min(a, b) = 0.$$

Левая часть последнего равенства на самом деле является «вероятностной функцией», т. е. функцией, значение и аргументы которой пробегают интервал $0\leqslant x\leqslant 1$. Итак, отважимся пополнить нашу таблицу следующим соглашением:

Высказывание	$\mathfrak{a}\rightarrow\mathfrak{b}$
Значение	$1-a+\min(a, b)=\min(1,1-a+b)$

(11)

Это исчисление не требует, чтобы эти величины обязательно пробегали весь интервал $0\leqslant x\leqslant 1$. Годится любое его подмножество, замкнутое относительно подстановки $1-a$ вместо a. Например, конечное множество

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$$

(n — данное целое, равное 1, или 2, или 3, . . .). Это $(n+1)$-значная логика Лукасевича [9]. Приняв $n=1$, мы попадаем в исчисление истинности, и в этом случае определения (10), (11) совпадают с данными ранее. С $n=2$ мы поднимаемся в 3-значную логику, в которой величины 1, 1/2, 0 удобно интерпретировать как «достоверно, возможно, неопределенно».

Приятно отметить, что наше исчисление вероятности удовлетворяет всем аксиомам таблицы СТ, кроме I, 2), в том смысле, что все его формулы принимают значение 1, какими бы ни были значения аргументов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Тем самым наша модель показывает, что аксиома I, 2) не зависит от остальных. Таким же способом оценок устанавливается независимость каждой из логических аксиом таблицы СТ.

Было бы естественным определить:

$P\mathfrak{a}$ принимает значение 1, если $a>0$; 0, если $a=0$;
$N\mathfrak{a}$ принимает значение 1, если $a=1$; 0, если $a<1$.

Отсюда следует, что высказывания вида $P\mathfrak{a}$, $N\mathfrak{a}$ принимают лишь два значения 1, 0 и, таким образом, не участвуют во всей шкале вероятностных значений: наряду с (8) имеет место сильная аксиома (9).

[9] *Lukasiewicz.*— Ruch filozoficzny. Lwow, 1920, vol. 5, p. 169; C. r. Soc. sci. et lett. Varsovie, 1930, cl. III, XXIII, p. 51.

Всякую вероятностную функцию одного, двух или большего числа переменных можно использовать для того, чтобы определить соответствующий элементарный логический оператор в исчислении вероятности. Операторы $\sim$, $\cap$, $\cup$ — лишь немногие, выбранные наугад из бесконечной армии операторов, которые могли бы предьявить на это одинаковые права. Наше исчисление, рассмотренное под таким углом зрения, мало напоминает логику, оно скорее похоже на специальную главу теории функций действительной переменной [4]. Заслуживает упоминания один довольно важный пример: комбинации $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$ со значениями $a \cdot b$, $a + b - ab$ соответственно. Они являются вероятностями «$\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$», «$\mathfrak{a}$ или $\mathfrak{b}$» в случае *статистически независимых* событий $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$.

Таким образом, нам напоминают о том, что вероятности «$\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$» или «$\mathfrak{a}$ или $\mathfrak{b}$» в действительности не определяются вероятностями событий $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. А потому все это исчисление весьма мало значительно, не взирая на заманчивость присущих ему чисто математических достоинств [10].

IV. Вторая попытка: топология и «более или менее»

Вследствие неизбежной неопределенности локализации в континууме применимость логики предикатов или множеств, упомянутой в первом разделе, сомнительна, если в качестве пространства ω взять континуум, в особенности фазовое пространство какой-нибудь физической системы. Обсуждая парадокс Зенона, Аристотель замечает: «Движение не совершается прерывно... При делении непрерывной линии на две части одна из точек удваивается, она становится сразу концом и началом. Но если делить таким образом, то ни линия, ни движение не остаются больше непрерывными», и заключает многозначительно: «В непрерывном в самом деле неограниченное число частей, но не актуально, а лишь потенциально» [5].

Однако теоретико-множественная топология, сопоставляя каждой точке ее «окрестности», смогла рассмотреть с некоторым огрублением эту структуру континуума, когда игнорируется обособленность отдельной точки. Например, в случае плоскости окрестностью точки x является любой круг с центром в x. И точка x, таким образом, является *внутренней точкой* данного множества α, если все точки некоторой окрестности x принадлежат α; x является *предельной точкой* α, если каждая окрестность x содержит точки из α. Следуя мысли Аристотеля, что для точки, лежащей на границе между α и его дополнением $\sim\alpha$, скорее всего неясно, принадлежит ли она к α или к $\sim\alpha$, отважимся принять такую терминологию [11]: точка x *необходимо* лежит в множестве α, если x является внутренней точкой α; x *возможно* лежит в α, если x — предельная точка α. Мы приходим к таким операторам P и N на множествах: $P\alpha$ является замыканием α, состоящим из всех предельных точек α, в то время как $N\alpha$ есть ядро, состоящее из всех внутренних точек α. Тогда мы имеем то, что и должно быть

---

[10] Рейхенбах попытался исправить этот недостаток нашего исчисления, для этого он ввел индекс корреляции в качестве третьего аргумента. См: *Reichenbach.*— S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., 1932, S. 476.

[11] См.: *Tang Tsao-Chen.*— Bull. Amer. Math. Soc., 1938, vol. 44, p. 737.

(ср. (5), (6)):

$$\sim P\alpha = N \sim \alpha, \quad \alpha \subset P\alpha \text{ и } N\alpha \subset \alpha.$$

Аксиома (8) верна в форме $PP\alpha \subset P\alpha$, а потому

$$PP\alpha = P\alpha, \quad N\alpha = NN\alpha$$

(P и N — «идемпотентные» операторы). Но аксиома (9), которая была справедливой в третьем разделе, теперь, бесспорно, неверна.

Кроме того, имеют место еще некоторые факты, относящиеся к нашим «модальным» операторам:

i. Если $\alpha \subset \beta$, то $P\alpha \subset P\beta$, $N\alpha \subset N\beta$.

ii. $N(\alpha \cap \beta) = (N\alpha \cap N\beta)$.	$P(\alpha \cup \beta) = (P\alpha \cup P\beta)$.
iii. $(N\alpha \cup N\beta) \subset N(\alpha \cup \beta)$.	$(P\alpha \cap P\beta) = P(\alpha \cap \beta)$.
iV. $N(\alpha \cup \beta) \subset (P\alpha \cup N\beta)$.	

Множество α называется *открытым* или *замкнутым* в соответствии с тем, имеет ли место $\alpha = N\alpha$ или $\alpha = P\alpha$. Соответственно множества $\alpha \cup \beta$, $\alpha \cap \beta$ открыты или замкнуты, если α и β открыты или замкнуты.

Если, как в первом разделе, обозначить множество $(\sim\alpha) \cup \beta$ через $\alpha \rightarrow \beta$, тогда вышеуказанная формула (iV) эквивалентна формуле (7);

$$N(\alpha \rightarrow \beta) \subset (N\alpha \rightarrow N\beta).$$

Все это выглядит довольно обнадеживающе. Однако я испытываю потребность пока не поздно, охладить наш растущий энтузиазм тремя замечаниями: 1, Операторы P и N действуют скорее на множествах или предикатах, чем) на высказываниях. 2) Они предполагают наличие некоторого *топологического пространства*, а потому намного сильнее ограничены в приложимости, чем в случае общей теории множеств. Это, по-видимому, указывает на то, что идея возможности значительно более специфична и ярче окрашивается тем материалом, над которым работает, чем идеи *нет*, *и*, *или*. Рассуждения последующих пятого и шестого разделов идут еще дальше в подтверждении этого убеждения. 3) Наша модель не подтверждает теорию строгой импликации Льюиса, поскольку в ней нет разницы между двумя такими утверждениями: «$\alpha \rightarrow \beta$ составляет все пространство», «$N(\alpha \rightarrow \beta)$ составляет все пространство»; они оба констатируют, что α составляет часть β.

Предлагались различные проекты преобразования теоретико-множественного анализа, или, что то же самое, логики классической физики, с тем, чтобы избежать очевидно бессмысленных вопросов, вроде: рациональное или иррациональное значение имеет в каком-либо случае измеримая величина с континуальной областью значений. Один из выходов, подсказываемой потребностями статистической механики, состоит в том, чтобы отождествлять множества, различающиеся лебеговой мерой нуль. Давайте обратимся к другой попытке такого рода, более соответствующей направлению мыслей Аристотеля. Будем рассматривать лишь *открытые множества*. Но дополнение $\sim\alpha$ такого множества не

является открытым, поэтому возьмем вместо него его открытое ядро $N \sim \alpha$[12]. Это допущение имеет такое смущающее следствие: объединение множеств α и $N \sim \alpha$ отличается от всего пространства на множество их граничных точек. Этот недостаток может быть устранен рассмотрением в качестве объединения α и β замыкания $P(\alpha \cup \beta)$, или, точнее, $NP(\alpha \cup \beta)$, поскольку мы хотим иметь открытое множество. Открытое множество α составляет часть $NP\alpha$, внутренность его замыкания. NP — идемпотентный оператор. И мы, таким образом, приведены к тому, чтобы допустить только такие множества, назовем их $*$-множествами, для которых $NP\alpha = \alpha$, и принять следующие модифицированные определения для *нет*, *и*, *или*:

$$\underset{*}{\sim}\alpha = N(\sim\alpha), \qquad \alpha \underset{*}{\cap} \beta = \alpha \cap \beta, \qquad \alpha \underset{*}{\cup} \beta = NP(\alpha \cup \beta).$$

Операторы $\underset{*}{\sim}$, $\underset{*}{\cap}$, $\underset{*}{\cup}$ переводят $*$-множества в $*$-множества, и вследствие перечисленных выше свойств P и N они удовлетворяют всем аксиомам таблицы CS. Но поскольку все $*$-множества открыты, исчезает разница между утверждениями «это так» и «это необходимо так», т. е. между α и $N\alpha$.

Предикаты или свойства точки в континууме зачастую принадлежат к разновидности «*более или менее*» в том смысле, что вопрос состоит не в том, имеет или нет индивид это свойство, а в том, в «*какой степени*» он обладает этим свойством. Если допустить измеримость такой градации, то предикат описывается функцией $f(x)$, аргумент которой x пробегает точки данной области, в то время как ее значение f является действительным числом из интервала $0 \leqslant f \leqslant 1$. Предикаты, бывшие у нас ранее,— это те, для которых функция не принимает значений, отличных от 0 и 1 (характеристическая функция (α; x) множества α). Естественный способ учитывать природу континуума, не допускающего «чтобы его части словно топором отрубались одна от другой» (Анаксагор), состоял бы в том, чтобы ограничиться всюду непрерывными функциями $f(x)$. Мы приближаемся здесь к исчислению функций, соединяющему в себе черты исчислений вероятностей и множеств. Область непрерывных функций $f(x)$ замкнута относительно основных операторов:

$$\sim f(x) = 1 - f(x), \; f(x) \cap g(x) = \min(f(x), g(x)),$$
$$f(x) \cup g(x) = \max(f(x), g(x)).$$

V. А если еще глубже [7]?— Интуиционизм!

Мы надеемся, что приемлемо такое описание континуума: 1) он делится на части; 2) но его части не «отрублены одна от другой топором», их локализация и границы неизбежно нечетки; 3) однако математик, желая быть готовым к

[12] До сих пор все согласуется со Стоуном и Тарским: *Stone M. H.*— Časopis pro pěst. mat. a fys., 1937/38, roč. 67, s. 1—25; *Tarski A.*— Fund. math., 1938, vol. 31, p. 103—134. Остановившись на этом, мы получаем исчисление открытых множеств, коинцидентное системе интуиционистской логики Гейтинга (см. раздел VII). Но следующее вслед за тем простое замечание [6], восстанавливающее классические аксиомы CS, бросает глубокую тень на эту интерпретацию системы Гейтинга в терминах топологии.

любой неожиданности, полагает, что можно превзойти любую достигнутую ранее степень тонкости и четкости деления.

Комбинаторные схемы топологии соответствуют этому представлению о континууме. Схемы как таковые не содержат ничего неясного, сомнения начинаются, когда какая-нибудь из схем прилагается к действительному континууму; переходя ко все более и более тонким подразделениям, соответствующим схеме, надо проводить границы все более остро заточенным карандашом.

Интуиционистская математика способна значительно лучше объяснить континуум, чем классическая. По Брауэру, противоположность $\mathfrak{a}$ и $\sim\mathfrak{a}$ терпит в математике крах, как только делается первый шаг за пределы арифметических утверждений, касающихся отдельных чисел, т. е. появляются утверждения, содержащие «имеется» и «любой». Так, Брауэр отрицает обоснованность таблицы СТ даже для математических высказываний. Вопрос в форме: «Существует ли целое число a, обладающее свойством $\mathfrak{a}$, или любое целое число обладает свойством не -$\mathfrak{a}$?»— не таков, чтобы на него можно было ответить «да» или «нет». Доказательство утверждения существования требует *действительного построения* конкретного целого числа со свойством $\mathfrak{a}$, тогда как другая альтернатива подразумевает *гипотетическое* высказывание, говорящее нечто только в том случае, если...: «В случае если вам встретится некоторое число (каково бы оно ни было), вы можете быть уверены в том, что оно обладает свойством не -$\mathfrak{a}$». Если в математике мы ищем подлинную истину (sheer and honest truth), тогда интуиционистский тезис неопровержим. Однако если вызов Брауэра принципу исключенного третьего имеет такой смысл, то дефект нельзя устранить простой уловкой — вставить «возможно, вероятно» между «да» и «нет». Ситуация на самом деле существенно более деликатного свойства.

Гильберт предпринял героическую попытку спасти классическую математику от нападок Брауэра, полностью формализуя ее. Математические высказывания при этом заменяются формулами, лишенными смысла, а математическое доказательство, состоящее из таких формул, осуществляется без ссылки на их смысл. Это делает Гильберта недосягаемым для атак Брауэра, отрицающего интуитивную верифицируемость смысла большинства математических высказываний: Гильберт полностью отказался от такого притязания на осмысленность, и то, что он пробует установить интуитивными рассуждениями, есть не истинность формулы, а *непротиворечивость* (consistency) всей системы, когда игра, протекающая в соответствии с определенными правилами, никогда не приводит к формуле $\sim (0 = 0)$.

Формулы у Гильберта[13] состоят из символов четырех видов: константы (вроде 0, 1), переменные (x, y, . . .), операторы (наподобие логических операторов $\sim$, $\cap$, $\cup$ или арифметических $+$, $\times$), кванторы. Наиболее важные из кванторов — «все» (x) и «существует» $(\exists x)$. Формулы $(x)\,\mathfrak{A}(x)$, $(\exists x)\,\mathfrak{A}(x)$ соответствуют высказываниям: «Для всех x выполняется $\mathfrak{A}(x)$» и «Существует x, для которого имеет место $\mathfrak{A}(x)$». Кванторы относятся к переменной x как к индексу и «связывают» ее во всей следующей за ними формуле $\mathfrak{A}(x)$. Точное описание предлагает способ комбинирования символов, для того чтобы составить

[13] Мое описание основано на измененной фон Нейманом системе, см. цит. соч. в примеч. 3. См. также в примеч. 4: *Hilbert, Bernays*. Op. cit.

из них формулы. Формулу без свободных переменных можно назвать замкнутой формулой; в нашей математической игре они в общих чертах соответствуют индивидам, или индивидуальным переменным. Пусть $\mathfrak{b}$ — замкнутая формула, $\mathfrak{A}(x)$ — формула с одной свободной переменной x. Обозначим через $\mathfrak{A}(\mathfrak{b})$ замкнутую формулу, получающуюся из $\mathfrak{A}$ заменой всех *свободных* вхождений переменной x на выражение $\mathfrak{b}$. Гильберт и Нейман *сохраняют* таблицу СТ в том смысле, что ее правила превращаются в аксиомы, если вместо $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ взять замкнутые формулы. Относительно квантора (x) они прежде всего специально оговаривают правило

$$(x)\,\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{b}) \qquad (12)$$

с только что объясненными обозначениями. Для того чтобы сделать возможными заключения, оканчивающиеся утверждениями «общности» $(x)\,\mathfrak{A}$, Гильберт довольно смело комбинирует понятия «все» и «существует» с аксиомой выбора Цермело, изобретая особый квантор ρ_x, называемый представителем (representative). Идея состоит в том, что предикат $\mathfrak{A}$ будет выполняться для любого индивида x, если он выполняется для $\rho_x\mathfrak{A}$, представителя $\mathfrak{A}$. Или, переводя в аксиоматическое правило, в использованных выше обозначениях

$$\mathfrak{A}(\rho_x\mathfrak{A}) \rightarrow (x)\,\mathfrak{A}. \qquad (13)$$

Аналогично обстоит дело с существованием. Силлогизм (F) остается единственным правилом вывода.

Теперь мы весьма далеки от того, чтобы утверждать правила таблицы СТ в качестве универсальных истин, имеющих кристально ясный смысл и несомненную истинность безотносительно к высказываниям $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и той области реальности, с которой они имеют дело. Но мы включаем их вместе с «трансцендентальными» логическими аксиомами (12) и (13) в здание символической математики как его неотъемлемую часть. Но, рассуждая «метаматематически» о непротиворечивости всей системы, мы руководствуемся не аксиоамами, а соображениями очевидности (sheer evidence).

VI. Первые проблески: квантовая логика [8]

Исчисление вероятностей (множеств) значительно менее искусственно и произвольно, чем обсуждавшаяся в третьем разделе *квантовая логика*, изобретенная для целей современной квантовой физики [14]. Как мы показываем, здесь, она — двойник «классической логики» с фазовым пространством ω, состоящим только из *конечного* числа n точек. Теперь наше пространство является n-мерным *евклидовым векторным пространством* V [15]. Под множеством α понимается здесь произвольное *линейное подпространство* пространства V; в частности, 0 есть нулевое пространство, состоящее из единственного вектора 0, а ω составляет все пространство V. $\sim\alpha$ определяется как подпространство, ортогональное к α, $\alpha \cap \beta$ — пересечение α и β, тогда как $\alpha \cup \beta$ — наименьшее линейное

[14] *Birkhoff G.*, *Neumann J. von.*— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 823.

[15] В действительности нужно заменить обычную ортогональную евклидову геометрию унитарной геометрией с комплексными координатами, но более простая модель вполне подходит для наших целей.

подпространство, содержащее α и β, именно подпространство всех векторов вида $x + y$ (x из α, y из β). Тогда выполняются все аксиомы CS, кроме двух последних, которые заменяются самодвойственной аксиомой Дедекинда:

Если $\beta \subset \alpha$, то $\alpha \cap (\beta \cup \gamma) = \beta \cup (\alpha \cap \gamma)$.

Давайте найдем в такой квантовой логике аналог оператора $\rightarrow$. Здесь $\alpha \subset \beta$ (α содержится в β) означает то же самое, что $(\alpha \cup \beta) = \beta$ или $(\alpha \cap \beta) = \alpha$. Приняв первое описание, заменим его на эквивалентное

$$\sim(\alpha \cup \beta) \cup \beta = \omega.$$

Отсюда если ввести сокращение

$$\alpha \uparrow \beta \text{ для } (\sim\alpha \cap \sim\beta) \cup \beta,$$

то $\alpha \subset \beta$ означает, что $\alpha \uparrow \beta$ совпадает со всем пространством. Верно также, что вектор, лежащий в α и в $\alpha \uparrow \beta$, должен лежать в β. В силу двух этих обстоятельств, $(\overline{\mathrm{F}})$ и (F), оператор $\uparrow$ ведет себя в квантовой логике аналогично оператору $\rightarrow$ классической логики. Однако с равным правом мы могли бы взять второе определение, что привело бы нас к сокращению $\alpha \downarrow \beta$ для $\sim\alpha \cup (\alpha \cap \beta)$, и $\downarrow$ относительно $(\overline{\mathrm{F}})$ и (F) так же годится, как и $\uparrow$. В классическом случае оба эти оператора совпадают с $\rightarrow$, но здесь они существенно различны. Это распадение $\rightarrow$ на $\uparrow$ и $\downarrow$ проливает дополнительный свет на наш предыдущий анализ импликации.

Теперь мы переходим к вероятностной части квантовой логики. Если x — данный вектор, $x \neq 0$, ξ — данное линейное подпространство, то пусть $\bar{x}$ — ортогональная проекция x на ξ; отношение квадрата длины $\bar{x}$ к квадрату длины x называется «вероятностью (ξ; x) x при условии ξ». (Поскольку величина этого отношения одинакова для векторов, отличающихся числовым множителем, для представления возможных состояний физической системы целесообразно рассматривать *лучи*, а не векторы.) Теорема Пифагора превращается тогда в аксиому отрицания

$$(\sim\alpha; p) = 1 - (\alpha; p),$$

которая показывает, что значение $(\sim\alpha; p)$ однозначно определяется значением $(\alpha; p)$ именно в соответствии с правилом, указанным в (10). Значения же $(\alpha \cup \beta; p)$ и $(\alpha \cap \beta; p)$ определяются значениями $(\alpha; p)$ и $(\beta; p)$ не единственным образом, и,как мы осознали в разделе III, под давлением деспотических правил (10) мы продали свои исконные права на действительный мир за чечевичную похлебку забавной формальной игры.

У нас есть вполне подходящее определение умножения векторных пространств [9], позволяющее в квантовой логике переходить от свойств к *отношениям* между отдельными состояниями одной и той же физической системы, или между разными системами. Тем не менее классическая логика пропозициональных функций с ее *переменными* $x, y, \ldots$ и *кванторами* (x), $(\exists\, x)$ обладает значительно большей гибкостью, обусловленной параллелизмом между действием операторов $\sim$, $\cap$, $\cup$ на множествах и истинностных (вероятностных) значениях; эти особенности, преобладающие в классической логике, полностью исчезают в квантовой логике.

С другой стороны, в любой символически построенной дисциплине, в нашем случае в квантовой физике, мы сталкиваемся с определенной частью, которая по праву может быть названа ее *логикой* [16]. Каждая отрасль знания, выкристаллизованная в формальную теорию, привносит, по-видимому, присущую ей логику, составляющую часть формализованной символической системы, и эта логика, вообще говоря, различна в разных областях. Однако мы руководствуемся соображениями *очевидности*, когда в формализованном математическом доказательстве убеждаемся в том, что формула $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ является именно такой комбинацией формул $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ (намереваясь вывести $\mathfrak{b}$ из $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$). Мы зависим от экспериментальной очевидности, когда в квантовой физике спрашиваем, принимает ли с такой-то и такой-то вероятностью некоторая физическая величина определенное значение при заданных в эксперименте конкретных условиях [10]. Наша символическая структура может состоять из нескольких слоев; скажем, мы можем пожелать использовать в квантовой физике классическую математику в формализованном виде, принимая во внимание не интуиционистскую, а экзистенциальную логику. Но самый верхний слой всегда будет доступной пониманию, простой и подлинной истиной, обнаруживаемой интуицией и экспериментом. Чистый символизм никогда не бывает замкнутым в себе, окончательное слово должен сказать разум [11]. Можно обучить человека, пожалуй собаку, но не камень.

VII. С фотовспышкой в потемках

До сих пор мы занимались главным образом внутренней логикой системы. Однако во втором разделе упомянута другая интерпретация «косвенных модусов»: в то время как $\mathfrak{a}$ — формула системы, выражение $\vdash \mathfrak{a}$, провозглашающее «обязательность» или «необходимость» $\mathfrak{a}$, является не формулой, а лишь утверждением о том, что я добился успеха, пытаясь получить $\mathfrak{a}$ в качестве последней формулы в игре, протекающей в соответствии с аксиомами и правилом вывода. Эта точка зрения вполне аналогична интуиционистской. Колмогоров [17] предложил интерпретировать утверждение существования: «Имеется число x такого-то и такого рода» — как математическую задачу $\mathfrak{a}$: *построить* такое число. С этой лежащей вне времени задачей мы сопоставляем сообщение $\vdash \mathfrak{a}$ об историческом факте, что я преуспел в осуществлении требуемого построения.

Это обстоятельство менее субъективно, чем кажется на первый взгляд, поскольку кто-то еще, кто слышал об этом построении и понял его, может выразиться и так: «Я (обязан сообщению господина Вейля тем, что) знаю, как построить такое число, что...»

Только если мы укажем полную конструкцию, это утверждение лишится всех личностных и исторических черт и превратится в высказывание о том, что так-то и так-то построенное число удовлетворяет всем требованиям. Мы отдаем предпочтение более короткой экзистенциальной формулировке, если, как это часто случается, специфика построения этого числа не существенна, и, следовательно, о ней можно забыть. В самом деле, после того, как установлено су-

---

[16] В данном случае некоторые предпочтут называть ее квантовой *геометрией*, но так ли много пользы в битвах за названия?

[17] *Kolmogoroff A.*— Math. Ztschr., 1932, Bd. 35, S. 58.

ществование требуемого числа, математическое доказательство зачастую продолжается фразой вроде: «Пусть поэтому a такое число», а затем ведет к заключению, вообще не содержащему a. С этой целью изобретены обороты «можно» или «можно построить» взамен личной формы: «Я добился успеха в построении». Эта особенность употребления в математике термина «возможно» не должна остаться незамеченной. (В системе Гильберта она «объективировалась» в виде квантора $(\exists x)$.)

В системе Гильберта непреодолима пропасть между (математическими) формулами и метаматематическими утверждениями о выводимости определенных формул, вследствие чего становится бессмысленным итерировать утверждение $\vdash$ или комбинировать его с присущими самой системе операторами $\sim$, $\cap$, $\cup$. У Брауэра более примирительная позиция [18]. Пусть $\mathfrak{a}$ — утверждение о том, что все числа обладают свойством не — $\mathfrak{A}$. Невозможность, или, как выражается Брауэр, абсурдность $\mathfrak{a}$, обозначаемая символом $\neg\mathfrak{a}$, доказывается построением числа со свойством $\mathfrak{A}$. В этом случае имеет смысл говорить об $\neg\neg\mathfrak{a}$ — абсурдности абсурдности $\mathfrak{a}$, устанавливаемой доказательством того, что гипотеза о наличии числа a со свойством $\mathfrak{A}$ ведет к противоречию. Представляется достоверным, что $\neg\neg\mathfrak{a}$ влечет $\mathfrak{a}$, но обратное остается сомнительным. Побуждаемый такими соображениями, Гейтинг [19] предложил формальную систему интуиционистской логики высказываний, с которой я готов согласиться, сделав такие оговорки: 1) то, что создает абсурдность высказывания $\mathfrak{a}$, зависит от природы $\mathfrak{a}$, и я не понимаю, как можно быть уверенным в значении $\neg\mathfrak{a}$ для любого осмысленного высказывания $\mathfrak{a}$; 2) по-видимому, все свидетельствует о необоснованности надежды на то, что нам когда-нибудь удастся полностью формализовать логику интуитивного рассуждения; так, я сомневаюсь, можно ли установить хотя бы в каком-то ограниченном смысле полноту системы Гейтинга.

Но даже в таком случае, по-моему мнению, его система $\mathfrak{H}$ зиждится на значительно более прочной основе, чем логика строгой импликации Льюиса. Интересно поэтому прояснить их формальное сходство. Примем для оператора N следующие аксиомы:

$$1)\ N\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}, \qquad 2)\ N\mathfrak{a} \rightarrow NN\mathfrak{a}, \qquad 3)\ N(\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}) \rightarrow (N\mathfrak{a} \rightarrow N\mathfrak{b}),$$

и добавим к ним таблицу СТ. Кроме силлогизма, в качестве дополнительного правила вывода используем правило, допускающее переход от уже доказанной формулы $\mathfrak{a}$ к $N\mathfrak{a}$, считая последнюю также доказанной (система $\mathfrak{L}$). Тогда, как обнаружил Гёдель [20], в этот символизм можно перевести основные понятий Гейтинга таким образом, что формулы, справедливые в $\mathfrak{H}$, выводимы в системе $\mathfrak{L}$. Существует даже несколько способов перевода, обладающих таким свойством. Но перевод, по-видимому, осуществляется только в одну сторону: $\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{L}$, вследствие чего эта опора, предложенная Льюису интуиционизмом, не слишком надежна.

Что касается вопроса, поставленного в конце второго раздела, то чаша весов несомненно склоняется в сторону отрицательного ответа. Но если мы нашли

[18] В связи с «финитистской» и «интуитивистской» точками зрения см.: *Hilbert D.*, *Bernays P.*, Bd. 1, S. 43.

[19] *Heyting A.*— *S.*-Ber. Preuss. Akad. Wiss., 1930, S. 42.

[20] *Gödel K.* Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. Wien, 1933, Bd. 4, S. 39.

в наших рассуждениях вполне достаточный резон для того, чтобы отбросить сомнения относительно универсальной логики модальности, то нам не следует отрицать, что хотя слово «возможно» и обладает различными нюансами, оно все же выражает первичное и несводимое понятие. Мне хотелось бы в заключение указать на два наиболее фундаментальных его проявления.

Как уже упоминалось, Аристотель и следовавший ему Лейбниц описывали континуум как среду возможных частей, где целое предшествует частям, в то время как в совокупности актуальных частей часть предшествует целому. Континуум пространства и времени является средой возможных локализаций. Я часто говорил, и повторяю еще раз, что, используя континуум или последовательность целых чисел, мы проектируем актуально данное на экран a priori возможного на поле возможностей, построенное в соответствии с определенной процедурой, но открытое в бесконечное [21]. Я еще уверен, что эта «потенциальность» является основной проблемой, принадлежащей скорее не к области универсальных логических построений, а к области метафизики [[12]]. Такие понятия лежат в основе теоретических построений, и мы увидели на мгновение маску, под которой выступает «потенциальность» в данной нам математической конструкции.

Потенциальностями другого рода являются возможности, имеющие отношение к нам как к историческим существам, в любой момент нашей повседневной жизни устрашая нас или вселяя надежду тем, что ожидает нас в будущем. Если история когда-либо достигнет стадии символического теоретического построения, то не будет неожиданным, если присущая нашему существованию возможность, на которой я останавливался в конце второго раздела и значимость которой отражена в последней цитате из Хайдеггера, будет играть, в символической форме, первостепенную роль во внутренней «логике истории». Однако пример квантовой физики предостерегает нас от попытки предсказывать a priori, на что будет похожа символическая логика истории, если когда-нибудь наступит ее время.

Можно к тому же ожидать, что ситуация совершенно изменится при переходе от логики высказываний к логике подлинного общения. Высказывания либо безличны, либо включают лишь некое (Я), от имени которого оно произносится, в общении же принимают участие экзистенциальные Я и Ты. В такой логике должны быть истолкованы обещания, вопросы, приказания [[14]].

Мы стремились продемонстрировать самое важное из относящегося к теме. Последний приговор вынесет и приведет в исполнение сердце, более твердое, чем сердце Гамлета или математика.

---

[21] Я осмелился добавить (1925): «С ней (математической конструкцией) мы стоим именно в той точке пересечения неволи и свободы, которая составляет самую суть человека» [[13]]. Хайдеггер сказал еще выразительнее: «Возможность как экзистенциальность является самой первой и самой последней положительной онтологической определенностью бытия» (*Heidegger M.* Sein und Zeit. 1927. Bd. 1, S. 143). О соотношении математики и времени см.: *Becker O.* Op. cit., note 1, p. 539—547.

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА*

§ 1. Формулировка задачи

Грубо говоря, классическая краевая задача теории потенциала для области G декартова (x_1, x_2, x_3)-пространства состоит в разложении заданной на G функции φ в сумму двух слагаемых $\psi + \eta$, из которых первое обращается в нуль на границе G, а второе — гармонично. Эти два слагаемые ортогональны, если метрика в функциональном пространстве построена с помощью интеграла Дирихле

$$D[\varphi] = \int (\operatorname{grad} \varphi)^2.$$

Здесь $\int$ означает интегрирование по G.

Этот факт подсказывает мысль заменить скаляр φ векторным полем

$$f = \operatorname{grad} \varphi \quad \left(\text{покомпонентно: } f_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$$

и работать в гильбертовом пространстве всех векторных полей f с метрикой, определяемой равенством

$$\| f \|^2 = \int f^2 = \int (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2).$$

При таком подходе возникает вопрос, как характеризовать векторные поля f, являющиеся градиентными, не предполагая ничего, кроме интегрируемости f по Лебегу. Обращение в нуль криволинейного интеграла

$$\int (f dx) = \int (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3)$$

по любой замкнутой кривой, лежащей в области G, теперь не может быть использовано, поскольку в нашем распоряжении нет никакого интегрирования, кроме пространственного. Известное условие

$$\operatorname{rot} f = 0 \tag{1}$$

использует дифференцирование. Пусть v — произвольное векторное поле, обращающееся в нуль на границе G. Формула

$$\operatorname{div} [f, v] = (v \cdot \operatorname{rot} f) - (f \cdot \operatorname{rot} v) \tag{2}$$

для векторного произведения $[f, v]$ и ее интегральное следствие

$$\int (v \cdot \operatorname{rot} f) = \int (f \cdot \operatorname{rot} v)$$

показывают, что равенство (1) эквивалентно соотношению

$$\int (f \cdot \operatorname{rot} v) = 0$$

* The method of orthogonal projection in potential theory.— Duke Math. J., 1940, vol. 7, p. 411—444. Перевод А. Г. Кушниренко.

для всех v, обладающих описанным выше свойством. Такая характеризация уже отвечает нашим запросам. Хотя само поле f однозначно, потенциал φ, существование которого обеспечивается равенством (1), может быть многозначным с некоторыми «периодами» в случае, когда область G неодносвязна. Отказ от требования однозначности потенциала удобен, поскольку делает нашу постановку задачи более общей.

После этих предварительных замечаний перейдем теперь к постановке задачи в точных терминах. В качестве G мы будем рассматривать произвольное открытое множество в трехмерном пространстве. Мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции определены в G, а их квадраты интегируемы по Лебегу. Под равенством функций мы будем понимать равенство почти всюду, т. е. равенство за исключением множества меры 0. Непрерывную функцию ψ мы будем называть функцией класса Г, если она имеет непрерывные первые производные и обращается в нуль в окрестности края, т. е. вне некоторого компактного подмножества G^* области G. Будем говорить, что векторное поле имеет класс Г, если его компоненты таковы. Векторное поле f будем называть *безвихревым* (соответственно *соленоидальным*), если оно удовлетворяет условию

$$\int (f \cdot \operatorname{rot} v) = 0 \tag{3}$$

для всякого векторного поля v класса Г или

$$\int (f \cdot \operatorname{grad} \psi) = 0 \tag{4}$$

для всякого скалярного поля ψ класса Г соответственно.

Сформулируем почти тривиальную лемму.

Лемма 1.

$$\int (\operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{rot} v) = 0 \tag{5}$$

для любого скалярного поля ψ и векторного поля v класса Г.

Кардинальный пункт наших рассуждений — следующая теорема:

Теорема I. *Если векторное поле одновременно является и безвихревым и соленоидальным, то оно равно векторному полю f, имеющему производные всех порядков и удовлетворяющему уравнениям*

$$\operatorname{div} f = 0, \quad \operatorname{rot} f = 0. \tag{6}$$

Применяя оператор Лапласа к полю f покомпонентно, мы получаем тождество

$$\Delta f = \operatorname{grad} \operatorname{div} f - \operatorname{rot} \operatorname{rot} f, \tag{7}$$

из которого следует, что компоненты f являются гармоническими функциями.

Обозначим через $\mathfrak{F}_0$ полное Гильбертово пространство, состоящее из всех векторных полей f на G с конечной нормой $\| f \|$. Те элементы $\mathfrak{F}_0$, которые являются безвихревыми, соленоидальными, или одновременно и теми, и другими, образуют замкнутые подпространства $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{C}$ пространства $\mathfrak{F}_0$. Наша теорема I описывает элементы подпространства $\mathfrak{C}$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ замыкание в смысле метрики $\| f \|^2$ полей вида

$$\operatorname{grad} \psi \quad (\psi \text{ — любое скалярное поле класса Г}). \tag{8}$$

Обозначим через $\mathfrak{G}'$ замыкание полей вида

$$\operatorname{rot} v \quad (v \text{ — любое векторное поле класса } \Gamma). \tag{9}$$

По лемме 1 $\mathfrak{G}$ лежит в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}'$ лежит в $\mathfrak{F}'$. Из определений (3), (4) вытекают следующие разложения на попарно ортогональные слагаемые.

Теорема II.

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G} + \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{F}' = \mathfrak{G}' + \mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{G}' + \mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{F}_0 = \mathfrak{G} + \mathfrak{F}'.$$

Первое уравнение и дает в основном решение нашей краевой задачи в обобщенной постановке. Второе уравнение имеет не меньшую важность. Мы будем далее рассматривать обе задачи параллельно.

В (8) потенциал ψ класса Г однозначно определяется полем $f = \operatorname{grad} \psi$. По другому обстоит дело в (9). Здесь, для того чтобы однозначно определить f, нужно фиксировать не только $\operatorname{rot} v$, но и $\operatorname{div} v$. Таким образом, мы приходим, к необходимости рассмотреть пространство $\mathfrak{F}^+$ пар $\mathfrak{f} = (f, \varphi)$, где f — любое соленоидальное поле и φ — любое скалярное поле. В $\mathfrak{F}^+$ вводится метрика полного гильбертового пространства формулой

$$\| \mathfrak{f} \|^2 = \int f^2 + \int \varphi^2.$$

Обозначим через $\mathfrak{G}^+$ замыкание (в смысле этой метрики) множества пар следующего вида:

$$f = \operatorname{rot} v, \ \varphi = \operatorname{div} v \quad (v \text{ — любое поле класса } \Gamma).$$

Скажем, что элемент (f, φ) пространства $\mathfrak{F}^+$ лежит в пространстве $\mathfrak{E}^+$, если он удовлетворяет уравнению

$$\int (f \cdot \operatorname{rot} v) + \int \varphi \cdot \operatorname{div} v = 0 \tag{10}$$

для любого v класса Г. Мы имеем разложение

$$\mathfrak{F}^+ = \mathfrak{G}^+ + \mathfrak{E}^+ \tag{III}$$

на два попарно ортогональных слагаемых. Теорема I параллельна следующему утверждению относительно $\mathfrak{E}^+$:

Теорема III. *Всякий элемент пространства* $\mathfrak{E}^+$ *равен паре* (f, φ), *компоненты которой имеют производные всех порядков и удовлетворяют уравнениям*

$$\operatorname{div} f = 0, \qquad \operatorname{rot} f = \operatorname{grad} \varphi. \tag{11}$$

Эти уравнения показывают сразу, что и φ, и компоненты поля f являются гармоническими функциями. Мы будем называть разложение (III) решением третьей краевой задачи.

Доказательства наших трех теорем занимают § 2. Лемма 1 будет доказана в § 3 в связи с общим обзором по векторному анализу. В § 4 будут обсуждаться некоторые важные дополнительные неравенства, первое из которых принадлежит А. Пуанкаре. После этой предварительной работы в § 5 и 6 мы рассмотрим новый вопрос, а именно вопрос о топологических периодах (впервые сформулиро-

ванный в конце § 2). § 7 будет посвящен поведению на границе, а § 8 будет содержать заключительные замечания о дву- и n-мерном случаях.

Идея замены принципа Дирихле построением ортогональной проекции на подходящее гильбертово пространство впервые появилась, по-видимому, у О. Никодима [1], применявшего ее к более простой задаче, чем наша. Шевалле сообщил мне, что он вместе с Посселом несколько лет назад развил теорию потенциала примерно в том же направлении, но не публиковал результатов этих исследований. Кроме всего прочего, на меня оказали влияние две статьи Фридрихса [2]. В частности, доказательство леммы 2 представляет собой модификацию конструкции, данной Фубини, Курантом и Фридрихсом. В своей второй статье Фридрихс преодолевает трудности, связанные с наличием дифференцирования $\varphi \to \text{grad}\,\varphi$ с помощью некоторых тщательным образом выбираемых «сглаживателей» J_a. Наш способ непосредственной работы с пространством векторных полей f и описанием безвихревых полей с помощью (3) уничтожает нежелательные ограничения и позволяет рассматривать обе наши краевые задачи параллельно. В части, относящейся к периодам, наши исследования связаны с конструкцией Ходжа гармонических дифференциальных форм с предписанными периодами [3].

Две конструкции, которые нужны для доказательства леммы 2 и теоремы VII, образуют основу настоящей статьи.

§ 2. Доказательства центральных теорем

Предположим, что поле f одновременно является безвихревым и соленоидальным. Пусть w — векторное поле класса Γ_2, т. е, w обращается в нуль в окрестности границы и имеет непрерывные частные производные до порядка два включительно. Заменим в (4) ψ на $\text{div}\, w$, а в (3) v на $\text{rot}\, w$. Вычтем получившиеся равенства. Из (7) получим

$$\Delta w = \text{grad div}\, w - \text{rot rot}\, w,$$

откуда вытекает соотношение

$$\int (f \cdot \Delta w) = 0.$$

Разделяя в этом соотношении три компоненты, мы видим, что нам нужно доказать следующее утверждение:

Лемма 2. *Если скалярная функция* η *удовлетворяет уравнению*

$$\int \eta \Delta \zeta = 0 \qquad (12)$$

для любой скалярной функции ζ *класса* Γ_2, *то* ζ *равно гармонической функции.*

---

[1] Sur un théorème de M. S. Zaremba concernant les fonctions harmoniques.— J. math. (9), 1933, vol. 12, p. 95—109.

[2] On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables.— Trans. Amer. Math. Soc., 1937, vol. 41, p. 321—364; On differential operators in Hilbert spaces.— Amer. J. Math., 1939, vol. 61, p. 523—544.

[3] *Hodge W. V. D.* A Dirichlet problem for harmonic functionals, with applications to analitic variesties.— Proc. London Math. Soc. (2), 1933, vol. 36, p. 257—303.

Из этой леммы мы получаем, что компоненты f являются гармоническими функциями и имеют производные всех порядков. Следовательно, из (2), соотношения

$$\operatorname{div}(\psi f) = (f \cdot \operatorname{grad} \psi) + \psi \cdot \operatorname{div} f, \tag{13}$$

и уравнений (4) и (3) вытекает, что

$$\operatorname{div} f = 0 \text{ и } \operatorname{rot} f = 0.$$

Доказательство леммы 2 опирается на тонкую конструкцию некоторой скалярной фукции ζ класса Γ_2. Рассмотрим сферу K радиуса R, лежащую в G, центр которой мы поместим в начале координат. Пусть x' некоторая точка внутри K. Функция Грина $G(x, x'; R)$, представляющая потенциал в K точечного заряда, размещенного в x', является разностью двух членов: сингулярного члена

$$\frac{1}{|x - x'|} \tag{14}$$

и компенсирующего члена

$$L(x, x'; R) = \begin{cases} \dfrac{R}{\left(R^4 - 2R^2(x \cdot x') + x^2 \cdot x'^2\right)^{1/2}} & \text{для } |x| \leqq R, \\[2ex] \dfrac{1}{\left(x^2 - 2(x \cdot x') + x'^2\right)^{1/2}} & \text{для } |x| \geqq R. \end{cases}$$

Здесь через x обозначим вектор, исходящий из начала координат и кончающийся в точке x. Поверхностная плотность

$$-\frac{1}{R} \cdot \frac{R^2 - x^2}{|x - x'|^3}$$

экранируется вне K. Заменим металлическую поверхность слоем той же плотности и, таким образом, позволим радиусу R меняться в пределах от a до $b > a$. Положим

$$L^*(x, x') = \int_a^b L(x, x'; R)\, dR \Big/ \int_a^b dR, \tag{15}$$

предполагая, что x' лежит в полости $|x| < a$. Пространственная плотность

$$-\frac{1}{b - a} \cdot \frac{x^2 - x'^2}{|x - x'|^3} \cdot \frac{1}{|x|},$$

распределенная по слою $a \leqq |x| \leqq b$, экранируется теперь в области $|x| > b$. Возвращаясь к сингулярной части (13), мы заменяем точечный источник x' маленьким сферическим проводником радиуса ρ с центром в точке x'. Таким образом, мы заменяем функцию (14) на функцию

$$g(x; \rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x - x'|} & \text{для } |x - x'| \geqq \rho, \\[2ex] \dfrac{1}{\rho} & \text{для } |x - x'| \leqq \rho \end{cases}$$

с равномерной поверхностной плотностью ρ^{-2} на границе. Мы снова хотим перейти к пространственному, а не к поверхностному распределению зарядов: заряды, равномерно распределенные по шару радиуса c с центром в точке x', порождают потенциал

$$g^*(x) = \int_0^c g(x;\rho)\,\rho^2\,d\rho \Big/ \int_0^c \rho^2\,d\rho. \tag{16}$$

Более явно

$$g^*(x, x'; c) = \begin{cases} \frac{3}{2}\frac{1}{c} - \frac{1}{2}\frac{|x-x'|^2}{c^3} & \text{для } |x-x'| \leqslant c, \\ \frac{1}{|x-x'|} & \text{для } |x-x'| \geqslant c. \end{cases}$$

Подставив в (12) функцию

$$\zeta(x) = g^* - L^*, \tag{17}$$

мы находим

$$\mathfrak{M}\eta(x) = \frac{1}{4\pi(b-a)} \cdot \int_x \frac{x^2 - x'^2}{|x-x'|^3} \cdot \frac{\eta(x)}{|x|}. \tag{18}$$

Здесь $\mathfrak{M}$ — среднее значение функции $\eta(x)$ по сфере $|x - x'| = c$, а интеграл в правой части распространен на слой. Правая часть этого равенства является гармонической функцией $\eta^*(x')$ аргумента x' и не зависит от c (в то время как левая часть не зависит от a и b). Поскольку среднее значение гармонической функции $\eta^*(x)$ по сфере, окружающей x'; равно $\eta^*(x')$, мы получаем, что интеграл

$$\int (\eta(x) - \eta^*(x)),$$

взятый по любому шару, лежащему в G, равен нулю. Следовательно, $\eta(x)$ и $\eta^*(x)$ совпадают почти всюду, т. е. $\eta(x)$ равно некоторой гармонической функции на G.

При интегрировании по R (15) выбор дифференциала dR в значительной степени произволен. Мы могли бы заменить dR на $\mu(R)\cdot R\,dR$, где $\mu(R)$ — положительная непрерывная функция. То же замечание применимо и к (16). Вместо (18) мы могли бы взять

$$\frac{\int \lambda(|x-x'|)\cdot\eta(x)}{\int \lambda(\rho)\,\rho^2\,d\rho} = \int \frac{x^2 - x'^2}{|x-x'|^3}\,\mu(|x|)\,\eta(x) \Big/ \int \mu(R)\,R\,dR, \tag{19}$$

где $\lambda(\rho)$ и $\mu(R)$ — функции, определенные на интервалах $0 \leqslant \rho \leqslant c$ и $a \leqslant R \leqslant b$ соответственно. Даже и такое равенство не является практически более сильным, чем (18), в котором позволено менять независимо c, a и b.

Функция (17) не обязана принадлежать классу Γ_2. Можно, однако, расширить определение класса Γ в (3) и (4), включив в него все непрерывные функции, производные которых кусочно-непрерывны и терпят разрывы на регулярных поверхностях, таких, как сферы. Либо, оставив старое определение класса Γ, можно было бы использовать формулу (19) с такими непрерывными функциями $\lambda(\rho)$ и $\mu(R)$, которые обращаются в нуль в концах c и a, b соответствующих интервалов определения.

Для доказательства теоремы III нужна только небольшая модификация этой конструкции. Сделав те же подстановки $\psi = \operatorname{div} w$ и $v = \operatorname{rot} w$ в (4) и (10) соответственно, мы получим

$$\int (f \cdot \Delta w) = 0,$$

а подстановка $v = \operatorname{grad} \zeta$ (ζ класса Γ_2) в (10) дает

$$\int \varphi \cdot \Delta \zeta = 0.$$

Следовательно, лемма 2 показывает, что φ и компоненты поля f — гармонические функции. Используя дифференцируемость этих функций, мы можем переписать соотношение (4) как справедливость для всех ψ класса Γ соотношения

$$\int \psi \cdot \operatorname{div} f = 0, \text{ или } \operatorname{div} f = 0,$$

аналогично (10) переписывается как справедливость для всех v соотношения

$$\int v\, (\operatorname{rot} f - \operatorname{grad} \varphi) = 0, \text{ или } \operatorname{rot} f - \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

Мы приведем еще кое-какие простые наблюдения, касающиеся локальной структуры гармонического поля f, удовлетворяющего уравнениям (6).

Возьмем куб T, лежащий в G. Будем считать, что его центр находится в начале координат. Поскольку $\operatorname{rot} f = 0$, поле f является градиентом определенной на T скалярной функции η, обращающейся в нуль в начале координат. Эту функцию $\eta(x)$ можно построить как некоторый интеграл от f вдоль отрезка r, соединяющего x с началом координат

$$\eta = \int_0^r f_r\, dr,$$

или, более явно,

$$\eta(x) = \int_0^1 F(x; \tau)\, d\tau, \tag{20}$$

где мы использовали обозначение

$$\sum_i x_i \cdot f_i(\tau x_1, \tau x_2, \tau x_3) = F(x; \tau).$$

Используя условие $\operatorname{rot} f = 0$, легко проверить соотношение

$$f_i = \frac{\partial \eta}{\partial x_i},$$

а так как $\operatorname{div} f = 0$, то $\Delta \eta = 0$. Следовательно, функция η сама гармонична. Кроме того, для любой гармонической функции η радиальное поле

$$j = x \cdot \eta^*, \qquad \text{где } \eta^* = \frac{1}{r} \int_0^r \eta\, dr,$$

является, как легко проверить, решением уравнения

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} j = \operatorname{grad} \eta.$$

В более явном виде мы получаем

$$\eta^*(x) = \int_0^1 \eta(\tau x_1, \tau x_2, \tau x_3)\, d\tau;$$

в частности, для η из формулы (20)

$$\eta^*(x) = \int_0^1 F(x; \tau)(1 - \tau)\, d\tau.$$

Функция η является скалярным потенциалом, а векторное поле h

$$h = \operatorname{rot} j = [\operatorname{grad} \eta^*, x]$$

является векторным потенциалом поля f:

$$\operatorname{grad} \eta = f, \ \operatorname{rot} h = f.$$

Заметим, что наш векторный потенциал обладает дополнительным свойством

$$\operatorname{div} h = 0,$$

и, кроме того, его радиальная компонента равна нулю. Уравнения

$$\operatorname{rot} h = \operatorname{grad} \eta, \qquad \operatorname{div} h = 0,$$

которые мы предлагаем читателю сравнить с уравнениями (11), показывают, что $\Delta h = 0$, т. е. и скалярный, и векторный потенциалы гармоничны.

Повторим еще раз содержание первых двух уравнений в теореме II. Всякое безвихревое поле f с конечной нормой $\| f \|$ разлагается единственным образом в сумму двух ортогональных слагаемых

$$f = g + e, \tag{21}$$

где e лежит в $\mathfrak{E}$, и, следовательно, может быть локально записано с помощью гармонического скалярного потенциала

$$e = \operatorname{grad} \eta,$$

в то время как $\mathfrak{G}$-компонента g является пределом (в смысле метрики $\| f \|^2$) последовательности полей вида

$$g_\nu = \operatorname{grad} \psi_\nu, \quad (\psi_\nu \text{ класса } \Gamma;\ \nu = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

В обоих случаях имеем

$$\| f \|^2 = \| g \|^2 + \| e \|^2. \tag{23}$$

Любые свойства регулярности, предполагаемые для f (например, дифференцируемость до некоторого порядка) будут переходить также и на g, поскольку компонента e ведет себя вполне регулярно.

Теперь мы можем сформулировать *проблему периодов*. Интеграл формы $(e \cdot dx)$, распространенный по одномерному циклу (полигону) C в G, называется *периодом* $\pi(C)$. Этот период является топологическим инвариантом поля e, поскольку его значение не меняется при непрерывных деформациях цикла C (это

вытекает из равенства $\operatorname{div} e = 0$). В решении (21) нашей первой краевой задачи слагаемое g является пределом полей (22), 1-периоды которых равны нулю. Следовательно, естественно приписать f те же значения периодов, что и у e. Однако если поле f непрерывно, то мы можем взять интеграл по C от $(f \cdot dx)$, и возникает вопрос, будут ли эти собственные периоды поля f совпадать с периодами поля e. Пусть теперь C^2 — двумерный ориентированный цикл, лежащий в G и состоящий из плоских треугольных кусков. Так как $\operatorname{rot} e = 0$, то интеграл $\int e_n do$ нормальной компоненты поля e по поверхности C^2 является топологическим инвариантом $\pi\,(C^2)$. Этот инвариант называется двумерным периодом. В нашей второй краевой задаче слагаемое g является пределом полей (23), у которых двумерные периоды равны нулю. Следовательно, соленоидальному полю f естественно приписать те же значения 2-периодов, что и у поля e. Снова если поле f само непрерывно, то мы можем спросить, совпадают ли его собственные 2-периоды $\pi\,(C^2) = \int f_n do$ по C^2 с 2-периодами поля e.

§ 3. Обзор векторного анализа[4]

Для того чтобы подготовить ответ на поставленные выше вопросы, мы займемся в этом разделе *непрерывными* векторными полями. Слова «куб, «блок», «квадрат», «прямоугольник» будут использоваться для обозначения кубов, параллелепипедов, квадратов и прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Мы будем прибавлять прилагательное «наклонный» для того, чтобы показать, что соответствующая фигура произвольным образом расположена в пространстве.

Непрерывное векторное поле f, определенное в области G, будем называть *безвихревым*, если для каждой точки x^0 области G найдется окрестность N (куб с центром в x^0) такая, что криволинейный интеграл выражения $f \cdot dx$, взятый по границе Q' любого квадрата Q, лежащего в N, обращается в нуль:

$$\int (f \cdot dx) = \int f_s ds = 0. \qquad (24)$$

Здесь s обозначает параметр вдоль Q', а через f_s обозначена компонента f в направлении отрезка интегрирования. Равенство (24) будет тогда справедливо для любого квадрата Q, лежащего в G, независимо от его размеров. Это легко получается из разбиения Q на меньшие квадраты. То же равенство будет верно для любого прямоугольника R. Будем называть его стороны длины a и b соответственно горизонтальными и вертикальными. Разделим горизонтальную сторону на большое число m равных частей и покроем прямоугольник квадратами со стороной $\varepsilon = a/m$, начиная снизу. Криволинейный интеграл по границе каждого из этих маленьких квадратов равен нулю. Теперь нужно разобраться с узкой полосой, состоящей из m прямоугольников $r_1, \ldots, r_m$ высоты, меньшей ε,

---

[4] Здесь я близко следую лекциям векторному анализу, которые я прочел в Технической высшей школе Цюриха. Отражение этого метода можно увидеть в некоторых из моих ранних статей, например: Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze.— J. reine und angew. Math., 1913, Bd. 143, S. 182 [сноска]; S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., 1917, S. 265.

прилегающей к верхней стороне прямоугольника R. Рассмотрим один из этих прямоугольников, скажем r_1. Выберем в r_1 какую-нибудь точку и обозначим через f^1 значение f в этой точке. Для любого сколь угодно малого положительного числа δ можно найти столь большое m, что на r_1 будет выполнено неравенство $|f - f^1| < \delta$. Используя *равномерную* непрерывность f, можно выбрать это δ одновременно для всех $r_1, \ldots, r_m$. Поскольку периметр r_1 меньше 4ε, мы получаем, что криволинейный интеграл по границе r_1 поля $f - f^1$ по абсолютной величине меньше $4\varepsilon\cdot\delta$. Но интеграл от постоянного поля f^1 равен нулю. Следовательно, наша оценка справедлива для самого поля f. Таким образом, сумма криволинейных интегралов от f по прямоугольникам $r_1, \ldots, r_m$ по абсолютной величине меньше $\delta\cdot 4\varepsilon m = 4a\delta$. Суммируя вклад всех маленьких кусков, на которые разбит прямоугольник R, мы получаем, что та же оценка справедлива для криволинейного интеграла от f по границе R, что и доказывает наше утверждение. Это характерное рассуждение очень полезно при строгом обосновании векторного анализа.

Рассмотрим куб T, лежащий в G, и будем считать, что его центр лежит в начале координат. Мы построим в T решение φ уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = f_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{25}$$

принимающее заданное значение φ^0 в начале координат. Будем строить решение интегрированием по отрезкам, параллельным осям координат. В рассматриваемой общей ситуации эта процедура более естественна, чем интегрирование гармонических полей по радиусам, использованное в § 2. Мы положим

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi^0 + \int_0^{x_1} f_1(\xi, 0, 0)\,d\xi + \int_0^{x_2} f_2(x_1, \xi, 0)\,d\xi + \int_0^{x_3} f_3(x_1, x_2, \xi)\,d\xi.$$

По определению

$$\varphi(x_1, x_2, x_3 + \delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_3}^{x_3+\delta x_3} f_3(x_1, x_2, \xi)\,d\xi.$$

Аналогичные равенства верны и для приращения x_2 при условии $x_3 = 0$, а также приращения x_1 при условии $x_3 = 0$, $x_2 = 0$. Но, используя тот факт, что интеграл от f по периметру любого прямоугольника равен нулю, мы получаем, что эти равенства верны без указанных ограничений, что и доказывает (25). Как только (25) установлено, мы можем утверждать, что криволинейный интеграл поля f вдоль замкнутой спрямляемой кривой, целиком лежащей в кубе T, равен нулю; в частности, это верно для границы любого плоского треугольника или любого наклонного квадрата. Последнее замечание показывает, что наше определение безвихревого поля не зависит от выбора декартовой системы координат. В предположении, что цикл C эквивалентен нулю, мы можем провести суммирование по конечному множеству треугольников, каждый из которых лежит в кубе $T \subset G$, и получим, что криволинейный интеграл f по любому 1-циклу $C \sim 0$, лежащему в C, равен нулю. Как было сказано выше, мы предполагаем, что наши 1-цепи, 1-циклы, 2-цепи и 2-циклы состоят только из прямолинейных отрезков и плоских треугольных граней. Соотношение $C \sim 0$ означает, что C

ограничивает некоторую 2-цепь в G. Сделав подразбиение каждой грани заданной двумерной цепи, мы можем считать, что каждая грань лежит в некотором кубе $T \subset G$.

Удобно использовать универсальное абелево накрывающее многообразие $\overline{G}$ области G, на котором цикл C области G становится замкнутым, если и только если $C \sim 0$ в G. Накрывающие преобразования S накрывающего многообразия $\overline{G}$ над G образуют абелеву группу. Процедура непрерывного продолжения дает решение φ уравнения (25)]

$$\operatorname{grad} \varphi = f$$

на всем накрывающем многообразии $\overline{G}$. Потенциал φ периодичен, разность $\varphi(Sx) - \varphi(x)$ значений φ в двух точках x, Sx накрывающего многообразия S, накрывающих одну и ту же точку G и получающихся одна из другой с помощью накрывающего преобразования S, равна некоторой константе π_S. Если накрывая 1-цикл мы приходим из точки x^0 в точку Sx^0, лежащую над x^0, то период π_S равен криволинейному интегралу f по C.

Непрерывное поле f, определенное в области G, называется полем *без источников*, если для любой точки x^0, лежащей в G, найдется окрестность $N \subset G$ такая, что поток

$$\mathcal{F}[T] = \int f_n do$$

обращается в нуль для границы T' любого куба T, лежащего в N. Разбиением на достаточно малые кубы мы докажем обращение потока в нуль для любого куба $T \subset G$. Сколь общим будет это свойство обращения потока в нуль? Рассмотрим часть V области G, ограниченную одной или несколькими поверхностями V'. Покроем пространство сеткой кубов с малым ребром ε и разложим V на малые куски. Поток по каждому кубу сетки, который целиком лежит в V (внутренний кусок), равен нулю. К каждому из обрезанных граничных кусков мы применим тот же метод, который мы описали в случае малых граничных прямоугольников r_i. Суммируя, мы получаем, что поток

$$\mathcal{F}(V) = \int_V f_n \, do$$

обращается в нуль при выполнении двух условий:

(i) Мы можем быть уверены, что поток *постоянного* вектора f^0 обращается в нуль на каждом граничном куске (проекция в направлении f^0).

(ii) Число граничных кусков равно $O(1/\varepsilon^2)$.

Таким образом, это действительно верно для любого выпуклого многогранника V, лежащего в G вместе с границей, в частности для тетраэдра и для любого наклонного куба. Последнее замечание показывает, что наше определение не зависит от выбора декартовой системы координат. Суммируя по множеству тетраэдров, мы получаем, что поток по любому 2-циклу C^2 обращается в нуль, если $C^2 \sim 0$.

В рассматриваемом случае не проходит трюк, аналогичный использованию универсального абелева накрывающего многообразия для работы с одномерными периодами невихревого поля.

Наша следующая цель — определить операторы div и rot без предположения дифференцируемости. Мы будем обозначать эти обобщения дифференциальных операторов div и rot через div* и rot* соответственно. Для непрерывного поля f существование

$$\operatorname{div}^* f = \rho$$

означает по определению существование непрерывной в G функции ρ, такой, что равенство

$$\int_{T'} f_n\, do = \int_{T} \rho \qquad (T' \text{— граница } T) \tag{26}$$

справедливо для любого куба T, лежащего в некоторой окрестности точки $x^0 \in G$. Сразу видно, что такая функция определена однозначно и что предположение о принадлежности T некоторой окрестности N может быть опущено. Более того, можно проверить, что в основном соотношении (26) T можно заменить на любую часть V области G, удовлетворяющую двум выше сформулированным требованиям (i) и (ii). Следовательно, в частности, для любого тетраэдра и любого наклонного блока выполнено соотношение (26). В терминах div* поле без источников f характеризуется условием

$$\operatorname{div}^* f = 0.$$

Для непрерывного поля f существование

$$\operatorname{rot}^* f = u$$

означает по определению существование непрерывного в G векторного поля u такого, что равенство

$$\int_{Q} u_n\, do = \int_{Q'} (f \cdot dx) \tag{27}$$

выполнено для любого квадрата Q, лежащего в некоторой окрестности N точки $x^0 \in G$. Направление обхода границы Q в правой части этого равенства должно быть согласовано с направлением нормали n в левой части с помощью ориентации объемлющего пространства. Поле u определено однозначно. В терминах rot* невихревое поле характеризуется равенством

$$\operatorname{rot}^* f = 0.$$

Таким же образом, как и раньше, равенство (27) можно проверить для любого выпуклого многоугольника, параллельного одной из координатной плоскостей. Попробуем теперь доказать то же самое для произвольно расположенного плоского многоугольника. Рассмотрим какую-нибудь плоскость E. Так как она не может быть параллельна сразу трем координатным осям, мы можем предположить, что E не содержит «вертикального» x_3-направления. Те параллелограммы, лежащие в E, которые при ортогональной проекции на плоскость (x_1, x_2) переходят в квадраты (со сторонами, параллельными осям), мы будем временно называть клетками в E. Пусть x^0 — точка G, лежащая в E, и N — куб с центром в точке x^0, лежащий в G. Пусть Z — какая-нибудь клетка в E, лежащая в N. Спроектируем Z вертикально на горизонтальное основание N.

Мы получим маленькую трубку, основанием которой является горизонтальный квадрат, четыре вертикальные стенки параллельны плоскостям (x_1, x_3) и (x_2, x_3), а клетка Z закрывает эту трубку сверху. Поле u удовлетворяет условию обращения в нуль потока

$$\int u_n \, do = 0$$

на поверхности любого куба T, и, следовательно, на поверхности нашей трубки:

$$\sum_F \int_F u_n \, do + \int_Z u_n \, do = 0. \qquad (28)$$

Пусть грань F — либо основание, либо одна из четырех стенок нашей трубки. Поскольку F правильно расположена в пространстве, мы получаем уравнение

$$\int_F u_n \, do = \int_{F'} f_s \, ds.$$

Учитывая (28) и суммируя по пяти указанным граням нашей трубки, мы получаем

$$-\int_Z u_n \, do = -\int_{Z'} f_s \, ds.$$

Проделав с клетками в E те же рассуждения, которые мы проделывали с квадратами, в плоскости, параллельной координатным осям, мы получаем, что равенство

$$\int_P (\mathrm{rot}^* f)_n \, do = \int_{P'} f_s \, ds \qquad (29)$$

справедливо для любого плоского выпуклого многоугольника P, лежащего в G. Этим методом можно также проверить выполнение формулы Стокса (29) для любой криволинейной поверхности.) Если поле f имеет непрерывные первые производные, то $\mathrm{div}^* f$ и $\mathrm{rot}^* f$ можно получить из f действием дифференциальных операторов div и rot соответственно.

Подобно тому как безвихревое поле f локально задается скалярным потенциалом φ, $f = \mathrm{grad}\ \varphi$, поле без источников f задается векторным потенциалом u

$$f = \mathrm{rot}^* u. \qquad (30)$$

Вообще говоря, потенциал u не будет дифференцируемым, следовательно, важно писать rot* вместо rot. Мы имитируем конструкции, проведенные нами ранее для скалярного потенциала. Поместим начало координат в центр куба T, лежащего в G. Положим $u_1 = 0$ на x_1-оси, $u_2 = 0$ в плоскости $x_3 = 0$ и $u_3 = 0$ на всем T. Проинтегрируем уравнение

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = f_3$$

в плоскости $x_3 = 0$ по формуле

$$u_1(x_1, x_2, 0) = -\int_0^{x_2} f_3(x_1, \xi, 0) \, d\xi, \qquad (31_0)$$

и уравнения

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = f_1, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = f_2$$

по формулам

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_2, x_3) &= -\int_0^{x_3} f_1(x_1, x_2, \xi)\, d\xi, \\ u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2, 0) + \int_0^{x_3} f_2(x_1, x_2, \xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{31}$$

Равенство

$$\int_Q f_n\, do = \int_{Q'} u_s\, ds \tag{32}$$

остается доказать только для произвольного горизонтального квадрата Q, лежащего в T. Проектируя такой квадрат Q перпендикулярно на плоскость $x_3 = 0$, мы получаем блок B. Пусть F — либо основание B, либо одна из четырех боковых стенок, тогда равенство

$$\int_F f_n\, do = \int_{F'} u_s\, ds \tag{33}$$

верно по построению. Поскольку f — поле без источников, суммарный поток f через поверхность блока, а именно через пять упомянутых выше граней и через квадрат Q, равен нулю. Следовательно, суммируя равенство (33) по основанию и четырем боковым стенкам F, мы получаем требуемое равенство (32).

Следующим шагом мы проверим справедливость формул (13) и (2) для операторов rot* и div*. Таким образом, мы собираемся доказать два утверждения: если функция φ имеет непрерывные производные и для непрерывного векторного поля f существует $\operatorname{div}^* f$, то $\operatorname{div}^* (\varphi f)$ существует и дается формулой

$$\operatorname{div}^* (\varphi f) = \varphi \cdot \operatorname{div}^* f + (f \cdot \operatorname{grad} \varphi). \tag{34}$$

Далее, если поле f непрерывно и существует $\operatorname{rot}^* f$, а поле g имеет непрерывные первые производные, то

$$\operatorname{div}^* [f, g] = (g \cdot \operatorname{rot}^* f) - (f \cdot \operatorname{rot} g). \tag{35}$$

Отметим асимметрию в предположениях относительно f и g. Для того чтобы доказать (34), разобьем куб T на m^3 малых кубов t с ребрами ε. Для любой функции φ обозначим через φ^0 значение φ в центре x^0 куба t. Через (ε) мы будем обозначать величину, стремящуюся к нулю равномерно по всем m^3 кубам t. В кубе t справедливо равенство

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi_1^0(x_1 - x_1^0) + \varphi_2^0(x - x_2^0) + \varphi_3^0(x_3 - x_3^0) + (\varepsilon) \cdot \varepsilon,$$

где $\varphi_i = \partial\varphi/\partial x_i$. Следовательно, с ошибкой порядка $(\varepsilon) \cdot \varepsilon^3$ справедливо равенство

$$\int_{t'} \varphi f_n\, do = \varphi^0 \cdot \int_{t'} f_n\, do + \int_{t'} \sum_i \varphi_i^0 (x_i - x_i^0) \cdot f_n\, do.$$

Чтобы преобразовать левую часть равенства, напишем

$$\int_{t'} f_n\,do = \int_t \operatorname{div}^* f = \{(\operatorname{div}^* f)^0 + (\varepsilon)\}\cdot\varepsilon^3.$$

Заменив в правой части поле f на постоянное векторное поле f^0, мы допустим ошибку порядка $(\varepsilon)\cdot\varepsilon^3$; таким образом, правая часть с указанной ошибкой равна

$$\varepsilon^3\cdot\sum_i \varphi_i^0 f_i^0 = \varepsilon^3\cdot(f\cdot\operatorname{grad}\varphi)^0.$$

Следовательно,

$$\int_{t'} \varphi f_n\,do = \varepsilon^3\{(\varphi\cdot\operatorname{div}^* f + (f\cdot\operatorname{grad}\varphi))^0 + (\varepsilon)\},$$

и суммируя по всем m^3 кубам t, мы получаем

$$\int_{T'} \varphi f_n\,do = \sum(\varphi\cdot\operatorname{div}^* f + (f\cdot\operatorname{grad}\varphi))^0\cdot\varepsilon^3 + (\varepsilon).$$

При $\varepsilon\to 0$ правая часть последнего равенства стремится к

$$\int_T (\varphi\cdot\operatorname{div}^* f + (f\cdot\operatorname{grad}\varphi)).$$

Аналогично доказывается и (35).

Если f — поле без источников и ψ принадлежит классу Г, то равенство (34) принимает вид

$$\operatorname{div}^*(\psi f) = (f\cdot\operatorname{grad}\psi). \tag{36}$$

Таким образом, интегрируя по G, мы получаем

$$\int (f\cdot\operatorname{grad}\psi) = 0. \tag{4}$$

Действительно, пусть G^* — компактное подмножество в G, вне которого ψ обращается в нуль. Построим сеть кубов такого малого размера, чтобы всякий куб сети, пересекающийся с G^*, целиком лежал в G. Проинтегрируем (36) по каждому из таких кубов t:

$$\int_t (f\cdot\operatorname{grad}\psi) = \int_t \psi f_n\,do,$$

и возьмем сумму. Таким же образом мы выводим из (35), что для безвихревого поля выполняется равенство

$$\operatorname{div}^*[v, f] = (f\cdot\operatorname{rot} v)$$

и, следовательно,

$$\int (f\cdot\operatorname{rot} v) = 0 \tag{3}$$

справедливо для любого векторного поля v класса Г. Иными словами, *всякое поле без источников f является соленоидальным*, уравнение (4), *а всякое невихревое поле f является безвихревым*, уравнение (3). *Лемма 1 является частным случаем каждого из этих двух фактов.*

Мы не можем полностью удовлетвориться, пока не удостоверимся в справедливости обратных утверждений: *всякое непрерывное поле, являющееся безвихревым или соленоидальным, является также невихревым или полем без источников соответственно.* Я набросаю доказательство только в двумерном случае. Пусть Q — квадрат, лежащий внутри «горизонтальной» двумерной области G. Введем третью вертикальную координату z и построим над Q прямолинейную пирамиду, которую мы обрежем на высоте $z = \varepsilon$. Пусть усеченная пирамида, верхнее основание которой проектируется строго внутрь Q, описывается уравнением $z = \psi_\varepsilon(x_1, x_2)$ и $\psi_\varepsilon = 0$ вне Q. Производные функции ψ_ε имеют простые особенности. Однако мы можем подставить ψ_ε вместо функции ψ в уравнение (4), характеризующее соленоидальность непрерывного векторного поля f. Предел выражения

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int\limits_Q (f\cdot\operatorname{grad}\psi_\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0$ есть поток $\int f_n\,do$ через Q'.

Докажем наконец модификацию равенства (7):

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} f) - \Delta^* f = \operatorname{rot}^*(\operatorname{rot} f). \tag{37}$$

Мы утверждаем, что если f и $\operatorname{div} f$ имеют непрерывные первые производные, то из существования $\operatorname{rot}^*(\operatorname{rot} f)$ следует существование

$$\Delta^* f_i = \operatorname{div}^*(\operatorname{grad} f_i) \qquad [i = 1, 2, 3]$$

и обратно. Рассмотрим вертикальную компоненту и восставим над горизонтальным квадратом $Q \subset G$ в плоскости $x_3 = x_3^0$ вертикальный блок $B \subset G$ высоты h. Обозначим его горизонтальные грани через Q и Q_h. Проинтегрируем вертикальную компоненту левой части (37) по B. Первый член дает вклад

$$\int\limits_B \frac{\partial}{\partial x_3}(\operatorname{div} f) = \Big[\int \operatorname{div} f\,do\Big]_Q^{Q_h} = \int\limits_{Q_h} \operatorname{div} do - \int\limits_Q \operatorname{div} f\,do. \tag{38}$$

Заметим, что

$$\int\limits_Q \operatorname{div} f\,do = \int\limits_Q \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\,do + \int\limits_Q \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big)do = \int\limits_Q \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\,do + \int\limits_{Q'} f_n\,ds.$$

Второй член в правой части есть интеграл по границе Q' квадрата Q. Подставляя полученное выражение в (38), мы видим, что рассматриваемый вклад равен сумме

$$\int \frac{\partial f_3}{\partial n}\,do + \iint \frac{\partial f_n}{\partial x_3}\,ds\,dx_3,$$

в которой первый интеграл берется по основаниям Q и Q_h, а второй интеграл по четырем боковым стенкам. Второй член левой части (37) дает вклад

$$\int\limits_B \Delta^* f_3 = \int\limits_{B'} \frac{\partial f_3}{\partial n}\,do.$$

Вычитание дает интеграл выражения

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_n} = (\text{rot}\, f)_s,$$

взятый по четырем боковым стенкам, или интеграл по z в пределах от $x_3{}^0$ до $x_3{}^0 + h$ от интеграла

$$\int (\text{rot}\, f)_s ds,$$

взятого по сечению Q_z блока B на высоте $x_3 = z$. Поделим, наконец, на h и перейдем к пределу при $h \to 0$.

Пусть ρ — непрерывная функция в G и $T \subset G$ — некоторый куб. Определим потенциал $\Phi(x)$ распределения масс с плотностью $\rho(x)$ следующей формулой:

$$\Phi(x) = \int \frac{\rho(x')}{|x - x'|},$$

где интеграл берется по x', пробегающему T. Вне T потенциал Φ не только непрерывен, но и имеет непрерывные производные

$$F = \text{grad}\, \Phi = -\int \frac{x - x'}{|x - x'|} \cdot \rho(x').$$

(Между прочим, F удовлетворяет условию Гёльдера с произвольным показателем < 1.) Для любого куба t, лежащего внутри T, имеем

$$\int_{t'} F_n do = -4\pi \int_t \rho. \tag{39}$$

Действительно, вычисляя интеграл

$$\int_{t'} \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} do,$$

когда x пробегает поверхность t' нашего куба t, мы видим, что он равен телесному углу, под которым поверхность t' видна из точки x'. Этот телесный угол равен 4π или 0, в зависимости от того, лежит ли точка x' внутри или вне t'. Таким образом, левая часть формулы (39) равна

$$-4\pi \int \rho(x') \quad (x' \text{ пробегает } t).$$

Формула (39) может быть еще сформулирована и так:

$$\text{div}^* F = \Delta^* \Phi = -4\pi\rho \quad \text{внутри } T.$$

Вернемся к произвольному полю f без источников, определенному в области G. Локальное существование векторного потенциала u поля f в уравнении (30) мало что дает, пока мы не установили, что u можно нормировать условием $\text{div}^* u = 0$. Вот путь, на котором это можно проделать. Для любой точки x куба T образуем интеграл

$$j(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(x')}{|x - x'|} \quad (x' \text{ пробегает } T).$$

Тогда

$$\Delta^* j = -f \quad \text{в} \quad T. \tag{40}$$

С другой стороны,

$$\operatorname{div} j = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(x-x')\cdot f(x')}{|x-x'|^3} \qquad (x' \text{ пробегает } T).$$

Подставим на время x^0, x вместо x, x'. Тогда значение $(\operatorname{div} j)^0$ в точке x^0 дается формулой

$$-\frac{1}{4\pi} \int_T \left(\operatorname{grad} \frac{1}{|x^0-x|} \cdot f(x)\right).$$

Подставим в равенство (34)

$$\varphi(x) = \frac{1}{|x^0-x|}$$

и проинтегрируем по кубу T, из которого исключена малая кубическая окрестность t точки x^0. Учитывая, что $\operatorname{div}^* f = 0$ и устремляя t к x^0, мы получаем

$$(\operatorname{div} j)^0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{T'} \frac{1}{|x^0-x|} f_n(x)$$

или

$$\theta = -\operatorname{div} j = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f_n(x')}{|x-x'|} \qquad (x' \text{ пробегает } T').$$

Так определенная функция θ гармонична в T и обладает производными всех порядков. Следовательно, мы выводим из (40) и (37) равенство

$$\operatorname{rot}^* (\operatorname{rot} j) = f - \operatorname{grad} \theta.$$

Мы видели в конце § 2, как можно построить такое гармоническое векторное поле h в кубе T, что

$$\operatorname{grad} \theta = \operatorname{rot} h, \ \operatorname{div} h = 0.$$

Поле

$$\operatorname{rot} j + h = u$$

удовлетворяет всем нашим требованиям. Эта конструкция гораздо лучше, чем конструкция, предлагаемая равенствами (31), и, результат, являющийся целью этого длинного параграфа, заслуживает выделения в отдельную теорему.

Теорема IV. *Для любой гармонической в кубе T функции η можно найти такое гармоническое векторное поле h*, что

$$\operatorname{grad} \eta = \operatorname{rot} h, \qquad \operatorname{div} h = 0.$$

Для любого поля без источников, заданного на кубе T, можно найти такое непрерывное в T поле u (*которое даже удовлетворяет условию Гёльдера с произвольным показателем* < 1), *что*

$$f = \operatorname{rot}^* u, \qquad \operatorname{div}^* u = 0. \tag{41}$$

§ 4. Вспомогательные неравенства

Перейдем теперь к более интересным подготовительным утверждениям. Возьмем куб T с ребром l, описываемый неравенствами:

$$0 \leqq x_1 \leqq l, \quad 0 \leqq x_2 \leqq l, \quad 0 \leqq x_3 \leqq l.$$

Пусть φ — функция на T, частные производные которой непрерывны вплоть до границы. Градиент $f = \operatorname{grad} \varphi$ определяет функцию φ с точностью до аддитивной постоянной. Разложим φ в сумму двух векторов. Первый, φ^0, кратен 1, а второй, φ^*, ортогонален 1:

$$\varphi(x) = \varphi^0 + \varphi^*(x), \qquad \int_T \varphi^*(x) = 0.$$

Положим

$$H_T[\varphi] = \int_T (\varphi^*)^2, \qquad D_T[\varphi] = \int_T (\operatorname{grad} \varphi)^2.$$

Л е м м а 3. *Существует константа L, зависящая только от l, для которой верно неравенство Пуанкаре* [5]

$$H_T[\varphi] \leqslant L^2 \cdot D_T[\varphi]. \tag{42}$$

Наилучшее значение константы L равно

$$L = l/\pi.$$

Попытка минимизировать $D_T[\varphi]$ при ограничении $\int_T \varphi^2 = 1$ приводит к акустической задаче о собственных тонах колебаний T. Это верно не только для куба, но и тогда, когда T — любая достаточно регулярная область:

$$\Delta\varphi + \lambda^2\varphi = 0 \text{ в } T, \ \partial\varphi/\partial n = 0 \text{ на границе } T' \text{ области } T.$$

Следовательно, наилучшее значение константы L в неравенстве (42) обратно частоте λ наинизшего собственного тона. Это наблюдение указывает следующий путь доказательства неравенства.

Возьмем $l = 1$. Для любого набора $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ неотрицательных целых чисел определим собственную функцию

$$\mathrm{co}(\nu) = \mathrm{co}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \cos \pi\nu_1 x_1 \cdot \cos \pi\nu_2 x_2 \cdot \cos \pi\nu_3 x_3$$

и собственные вектора

$$\mathrm{co}^{(1)}(\nu), \ \mathrm{co}^{(2)}(\nu), \ \mathrm{co}^{(3)}(\nu); \ \mathrm{sn}^{(1)}(\nu), \ \mathrm{sn}^{(2)}(\nu), \ \mathrm{sn}^{(3)}(\nu).$$

Вторая и третья компоненты собственных векторов с $\mathrm{co}^{(1)}(\nu)$ и $\mathrm{sn}^{(1)}(\nu)$ обращаются в нуль, а третьи компоненты равны

$$\sin \pi\nu_1 x_1 \cdot \cos \pi\nu_2 x_2 \cdot \cos \pi\nu_3 x_3 \text{ и } \cos \pi\nu_1 x_1 \cdot \sin \pi\nu_2 x_2 \cdot \sin \pi\nu_3 x_3$$

---

[5] *Poincaré H.* Sur le équations de la physique mathématique.— Rend. Circ. mat. Palermo, 1894, vol. 8, p. 70—76.

соответственно. Определим коэффициенты Фурье φ и $f = \operatorname{grad} \varphi$ по отношению к $\text{co}(\nu)$, $\text{co}^{(1)}(\nu)$, $\text{co}^{(2)}(\nu)$, $\text{co}^{(3)}(\nu)$ и формулами

$$a = a(\nu) = \int_T \varphi \cdot \text{co}(\nu), \quad a_i = a_i(\nu) = \int_T f \cdot \text{co}^{(i)}(\nu) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Функция φ^* имеет те же коэффициенты Фурье, что и φ, за одним исключением: коэффициент a (0, 0,0) нужно заменить на 0. Положим

$$2(\nu) = 1 \text{ или } 2 \text{ для } \nu = 0 \text{ или } \nu = 1, 2, \ldots \text{ соответственно}$$

и

$$\delta = \delta(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2(\nu_1) \cdot 2(\nu_2) \cdot 2(\nu_3).$$

Каждая собственная функция $\text{co}(\nu)$ дает вклад в $H_T[\varphi]$, равный $\delta \cdot a^2$. Согласно равенству Парсеваля число $H_T[\varphi]$ равно сумме вкладов по всем наборам $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, за исключением набора (0, 0, 0).

Связь между φ^* и f можно охарактеризовать формулами

$$\int_T \varphi^* = 0,$$

$$\int_T \varphi^* \cdot \operatorname{div} p = -\int_T (f \cdot p),$$

последняя из которых справедлива для любого векторного поля p, частные производные которого непрерывны на T, а нормальная компонента p_n обращается в нуль на T'. В дальнейшем буква p всегда будет обозначать поле, обладающее этими свойствами. Взяв

$$p = \text{co}^{(1)}, \text{co}^{(2)}, \text{co}^{(3)},$$

получим

$$a_i = -\pi \nu_i a \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Поскольку

$$\pi^2 \cdot \sum_\nu{}' (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2) \cdot \delta a^2 = \sum_\nu{}' \delta \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \leqslant \int_T f^2,$$

где штрих означает исключение индекса (0, 0, 0) из множества суммирования, мы получаем искомый результат

$$\pi^2 \cdot H_T[\varphi] \leqslant \int_T f^2.$$

Видно, что изложенное доказательство опиралось на тот факт, что функции

$$[2(\nu)]^{1/2} \cdot \cos \pi \nu x \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

образуют полную ортогональную систему на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Для блока T с произвольными ребрами l_1, l_2, l_3:

$$0 \leqq x_1 \leqq l_1, \quad 0 \leqq x_2 \leqq l_2, \quad 0 \leqq x_3 \leqq l_3,$$

можно получить то же неравенство (42) с константой L, равной

$$L = \frac{1}{\pi} \max(l_1, l_2, l_3). \tag{43}$$

Неравенство (42) можно, кроме того, переписать в таком виде:

$$\iint (\varphi(x) - \varphi(x'))^2 \leqq 2L^2T \cdot D_T[\varphi]. \tag{44}$$

В левой части интегрирования по x и x' производится по всему T. В правой части объем куба T обозначен той же буквой T.

Есть ли аналогичное соотношение для rot вместо grad? Поле rot u не меняется при добавлении к u слагаемого grad φ. Следовательно, предварительно мы должны провести следующую конструкцию [6], в которой T играет роль G. Пусть $\mathfrak{T}$ — полное гильбертово пространство всех векторов u с конечной нормой

$$\| u \|_T^2 = \int_T u^2$$

и $\overline{\mathfrak{T}} \subset \mathfrak{T}$ — замыкание множества всех векторных полей вида grad σ, где потенциал σ имеет на T непрерывные производные вплоть до границы. Обозначим через $\mathfrak{T}^*$ множество элементов u^* пространства $\mathfrak{T}$, которые ортогональны всем таким полям вида grad σ:

$$\int_T (u^* \cdot \operatorname{grad} \sigma) = 0. \tag{45}$$

Это ортогональное разложение $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^* + \overline{\mathfrak{T}}$ позволяет записать любой вектор u пространства $\mathfrak{T}$ в виде

$$u = u^* + \bar{u}.$$

Перепишем соотношение $f = \operatorname{rot} u$ в более универсальной форме:

$$\int_T (u \cdot \operatorname{rot} q) = \int_T (f \cdot q),$$

где последнее равенство должно быть справедливо для любого поля q, которое имеет в T производные, непрерывные вплоть до границы, и у которого тангенциальная составляющая обращается в нуль на T'. Это равенство справедливо для u^*, поскольку поля вида grad σ аппроксимируют $\bar{u}$ и, следовательно, $\bar{u}$ само ортогонально rot q. В этих предположениях мы, следовательно, приходим к такому утверждению.

Лемма 4. *Пусть f и u^* — векторные поля в T с конечными нормами $\| f \|_T$, $\| u^* \|_T$. Предположим, что равенства*

$$\begin{gathered} \int_T (u^* \cdot \operatorname{grad} \sigma) = 0, \\ \int_T (u^* \cdot \operatorname{rot} q) = \int_T (f \cdot q) \end{gathered} \tag{46}$$

справедливы для любой непрерывно дифференцируемой вплоть до границы функции σ и любого непрерывно дифференцируемого вплоть до границы векторного поля q, тангенциальная составляющая которого обращается в нуль на границе T.

---

[6] Это и есть та задача, к которой О. Никодим применил метод ортогональной проекции (см. выше, примеч. 1).

Тогда поле u^* однозначно определяется полем f и справедливо универсальное неравенство

$$\| u^* \|_T^2 \leqslant M^2 \cdot \| f \|_T^2, \tag{47}$$

где константа M зависит только от l. Наилучшее значение M определяется формулой

$$M^2 = l^2/2\pi^2.$$

Соответствующая задача минимизации — это задача излучения, точнее, задача о стоячих электромагнитных волнах в объеме T. Это замечание указывает путь доказательства.

Пусть a_i ($i = 1, 2, 3$) — коэффициенты Фурье поля f относительно $\mathrm{sn}^{(i)}$ и b_i ($i = 1, 2, 3$) — коэффициенты Фурье поля u относительно $\mathrm{co}^{(i)}$. Подставив в уравнение (46) $\sigma = \mathrm{co}\,(\nu)$, $q = \mathrm{co}^{(1)}, \mathrm{co}^{(2)}, \mathrm{co}^{(3)}$, мы получаем

$$b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 = 0, \tag{48}$$

$$\pi\,(\nu_2 b_3 - \nu_3 b_2) = a_1, \quad \pi\,(\nu_3 b_1 - \nu_1 b_3) = a_2, \quad \pi\,(\nu_1 b_2 - \nu_2 b_1) = a_3.$$

Отсюда следует, что

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \pi\,(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Не только $(0, 0, 0)$, но и те комбинации (ν_1, ν_2, ν_3), в которых две компоненты равны нулю, могут быть опущены. Действительно, если $\nu_2 = \nu_3 = 0$, $\nu_1 \neq 0$, то $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $b_2 = b_3 = 0$ и согласно (48) $b_1 = 0$. Таким образом, наименьшее возможное значение $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2$ равно 2. Это доказывает наше утверждение.

Для блока T с ребрами l_1, l_2, l_3 верно аналогичное неравенство, и в этом случае наилучшее значение M определяется формулой

$$M^2 = \frac{1}{\pi^2} \max\left(\frac{l_2^2 l_3^2}{l_2^2 + l_3^2}, \frac{l_3^2 l_1^2}{l_3^2 + l_1^2}, \frac{l_1^2 l_2^2}{l_1^2 + l_2^2} \right).$$

Вопрос существования поля u^* для заданного соленоидального поля f будет разрешен в связи с приложением нашего неравенства к той ситуации, которая нас преимущественно интересует (§ 6).

Аналогичные неравенства верны для сферы K радиуса R. Наилучшее значение L в (42) равно R/α, где α — наименьший положительный корень уравнения

$$\tan\alpha = \frac{2\alpha}{2 - \alpha}.$$

Наилучшее значение M в (47) равно $2R/\pi$. Элементарные доказательства неравенства (42) для выпуклых тел и шаров, не дающие, однако, наилучшие значения констант, были даны А. Пуанкаре и автором [7]. Представляется маловероятным, чтобы эти доказательства позволили получить и неравенство (47).

---

[7] См. примеч. 5: *Poincaré H.* См. также: *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. B., 1937, Bd. 2, S. 488, 517—519; *Weyl H.* Die Idee der Riemannschen Fläche. Leipzig, 1913, S. 89—90. Еще одно доказательство можно провести по образцу рассуждений из § 7.

§ 5. Периоды безвихревых полей

1. Вернемся теперь к нашей первой краевой задаче, т. е. к задаче разложения $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} + \mathfrak{E}$, $f = g + e$ элемента f пространства $\mathfrak{F}$. Здесь g является пределом последовательности полей вида $g_\nu = \operatorname{grad} \psi_\nu$. Забудем на время, что нам известны однозначность ψ_ν во всей области G и обращение в нуль в полосе вокруг границы. Возьмем куб $T \subset G$ и вычтем из ψ_ν его среднее значение на T. Тогда $\psi_\nu^* = \psi_\nu - \psi_\nu^0$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_T \psi_\nu^* = 0.$$

Применим лемму 3:

$$\int_T (\psi_\nu{}^* - \psi_\mu)^2 \leqslant L^2 \cdot \| g_\nu - g_\mu \|^2.$$

Следовательно, интеграл в левой части стремится к нулю при $\mu, \nu \to \infty$. Значит, существует функция ψ^*, интеграл от квадрата которой конечен, такая, что

$$\int_T (\psi^* - \psi_\nu{}^*)^2 \to 0 \quad \text{для } \nu \to \infty.$$

Функция ψ^* связана с g уравнениями $\int_T \psi^* = 0$ и

$$\int_T \psi^* \cdot \operatorname{div} p = -\int_T (g \cdot p), \tag{49}$$

последнее выполняется для любого поля p описанной выше природы. Если мы напишем $e = \operatorname{grad} \eta$, то f будет равно $\operatorname{grad} \varphi^* + \eta$.

2. Мы изучаем произвольную функцию φ на G с непрерывными производными и соответствующее векторное поле $f = \operatorname{grad} \varphi$. Мы предполагаем, что

$$\| f \|^2 = \int_G f^2 = D[\varphi] \leqslant \varepsilon^2. \tag{50}$$

Фиксировав в G куб T_0 с ребром l_0, мы нормируем произвольную аддитивную постоянную в φ условием

$$\int_{T_0} \varphi = 0, \tag{51}$$

и тогда

$$\int_{T_0} \varphi^2 \leqslant L_0{}^2 \varepsilon^2 \qquad (L_0 = l_0/\pi). \tag{52}$$

Л е м м а 5. *Пусть T, T_1 — два любых пересекающихся куба в G. Тогда при выполнении неравенства* (50)

$$\text{из } \int_T \varphi^2 \leqslant A^2 \varepsilon^2 \text{ следует } \int_{T_1} \varphi^2 \leqslant A_1{}^2 \varepsilon^2, \tag{53}$$

где A_1 зависит от A и T, T_1, но не зависит от ε и φ.

Доказательство. По лемме 3 существует константа φ^1 (среднее значение φ по кубу T_1) такая, что

$$\int_{T_1} (\varphi - \varphi^1)^2 \leqslant L_1^2 \varepsilon^2 \qquad (L_1 = l_1/\pi). \tag{54}$$

Обозначим через t общую часть T и T_1. Из предположения в (53) и формулы (54) следует

$$\int_t \varphi^2 \leqslant A^2\varepsilon^2, \quad \int_t (\varphi^1 - \varphi^2) \leqslant L_1^2\varepsilon^2.$$

Применяя неравенство Шварца к

$$\varphi^1 = A^{1/2} \cdot \frac{\varphi}{A^{1/2}} + L_1^{1/2} \cdot \frac{\varphi^1 - \varphi}{L_1^{1/2}},$$

мы получаем

$$(\varphi^1)^2 t \leqslant (A + L_1)^2 \varepsilon^2.$$

Поскольку

$$\int_{T_1} \varphi^2 = \int_{T_1} (\varphi - \varphi^1)^2 + (\varphi^1)^2 T_1,$$

мы получаем результат (53) с

$$A_1^2 = L_1^2 + (A + L_1)^2 \cdot \frac{T_1}{t}.$$

Пусть T — произвольный куб в G. Соединим T_0 и T цепочкой кубов, в которой каждые два последовательных пересекаются [8]. (Строго говоря, мы работаем здесь в связной компоненте области G, а не в самой области G.) Начав с (52) и продолжая с помощью последней леммы, мы получаем константу A_T такую, что неравенство

$$\int_T \varphi^2 \leqslant A_T^2 \cdot \varepsilon^2 \tag{55}$$

следует из соотношения

$$\int_{T_0} \varphi = 0 \quad \text{и} \quad D[\varphi] \leqslant \varepsilon^2.$$

Применение леммы в нашей ситуации очевидно. Мы вычитаем из ψ_ν его среднее значение ψ_ν^0 на T. Таким образом, $\psi_\nu^* = \psi_\nu - \psi_\nu^0$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{T_0} \psi_\nu^* = 0. \tag{56}$$

Тогда для любого куба $T \subset G$

$$\int_T (\psi_\nu^* - \psi_\mu^*)^2 \leqslant A_T^2 \cdot \| g_\nu - g_\mu \|^2.$$

[8] Это рассуждение взято из работы автора по римановым поверхностям (см. примеч. 7), с. 103—104.

Следовательно, мы нашли функцию ψ^* на всей области G такую, что

$$\int_T (\psi^* - \psi_\nu^*)^2 \to 0 \text{ для каждого куба } T. \tag{57}$$

Соотношение (49) верно теперь для всякого куба T. Гармоника e имеет гармонический скалярный потенциал η, $e = \operatorname{grad} \eta$ на $\bar{G}$. Положим $\varphi^* = \psi^* + \eta$ и будем считать оправданным приписывать значение $\varphi^*(b) - \varphi^*(a)$ криволинейному интегралу $\int (f \cdot dx)$, взятому по любому пути $\mathfrak{l}$ в G, соединяющему точку a с точкой b. Здесь a в то же время обозначает и какую-нибудь точку из $\bar{G}$, лежащую над точкой a, а b — ту точку $\bar{G}$, в которую мы приходим вдоль пути $\mathfrak{l}$, начиная из точки a.

3. Предположим, что поле f само является непрерывным, так что лучше называть его невихревым, чем безвихревым. Мы можем написать $f = \operatorname{grad} \varphi$, где φ — периодическая функция на $\bar{G}$ с непрерывными производными. Наш последний результат подвел нас вплотную к доказательству того, что φ имеет те же периоды, что и η. Чтобы сделать это утверждение совершенно ясным, мы применим лемму 5 к функции φ на $\bar{G}$, что мы, разумеется, имеем право сделать, и к цепочке кубов, соединяющей на $\bar{G}$ куб T_0 с кубом T, получаемым из T_0 с помощью накрывающего преобразования S. Используем нормировку (51). Из неравенств

$$\int_{T_0} \varphi^2 \leqq L_0^2 \varepsilon^2, \qquad \int_T \varphi^2 = \int_{T_0} (S\varphi)^2 \leqq A_T^2 \cdot \varepsilon^2$$

вытекает следующее соотношение для разности $\pi_S = S\varphi - \varphi$:

$$\pi_S^2 \cdot T_0 \leqq (L_0 + A_T)^2 \varepsilon^2.$$

Следовательно, справедлива теорема:

Т е о р е м а V. *Для всякого накрывающего преобразования S многообразия $\bar{G}$ найдется константа H_S такая, что период $\pi_S[f]$ любого невихревого векторного поля f удовлетворяет неравенству*

$$\pi_S^2 \leqq H_S^2 \cdot \| f \|^2.$$

Применим эту теорему к полю $g - g_\nu$ с потенциалом $\varphi - \eta - \psi_\nu$. Его периоды не зависят от ν, так как равны периодам k_S потенциала $\varphi - \eta$. Следовательно, мы получаем

$$k_S^2 \leqq H_S^2 \cdot \| g - g_\nu |^2,$$

и это доказывает требуемый результат: $k_S = 0$.

Т е о р е м а VI. *Если разложение $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} + \mathfrak{E}$ применить к невихревому полю f, $f = \operatorname{grad} \varphi$, то периоды его потенциала φ будут совпадать с периодами гармонического потенциала η его $\mathfrak{E}$-части e.*

Функция $\psi^* = \varphi - \eta$, однозначная на G, является пределом функций ψ^* в смысле соотношения (57), при условии, что произвольная аддитивная постоянная в η нормирована условием

$$\int_{T_0} \psi^* = 0.$$

Наша теорема доказывает, в частности, что для любой периодической функции φ на $\overline{G}$ с непрерывными производными мы можем найти гармоническую функцию η, имеющую те же периоды. Это утверждение можно усилить, сказав, что в некотором смысле η имеет те же граничные значения, что и φ.

§ 6. Периоды соленоидальных полей

Мы попытаемся повторить, с минимумом отклонений, рассуждения предыдущего параграфа для второй краевой задачи, т. е. для получения разложения

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{G}' + \mathfrak{E},\ f = g + e$$

соленоидального векторного поля f. Мы не встретим трудностей в пункте 1. Поле g является пределом полей $g_\nu = \operatorname{rot} v_\nu$, и мы применяем к v_ν и к заданному кубу $T \subset G$ разложение, которое мы ранее обозначали $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^* + \overline{\mathfrak{T}}$. Лемма 4 дает

$$\int_T (v_\nu{}^* - v_\mu{}^*)^2 \leqslant M^2 \cdot \| g_\nu - g_\mu \|^2,$$

и, следовательно, $v_\nu{}^*$ стремится в T к v^* в том смысле, что

$$\int_T (v^* - v_\nu{}^*)^2 \to 0 \quad \text{для} \quad \nu \to \infty.$$

Для v^* выполняются равенства

$$\int_T (v^* \cdot \operatorname{grad} \sigma) = 0,$$

$$\int_T (v^* \cdot \operatorname{rot} q) = \int_T (g \cdot q)$$

с теми же условиями на σ и q, что и в (46). Представим e в виде $e = \operatorname{rot} h$. Тогда поле f будет так же связано с $v^* + h^*$, как поле g связано с v^*. (Между прочим, h^* равнялось бы h, если мы использовали бы сферу K вместо куба T. Это вытекает из того, что $\operatorname{div} h$ и радиальная компонента h равняются нулю.)

Мы не можем надеяться получить что-то аналогичное пункту 2.

Пункт 3 может быть повторен, хотя рассуждения должны подвергнуться модификации, ввиду отсутствия понятия, параллельного понятию накрывающего многообразия $\overline{G}$.

Рассмотрим 2-цикл C в G, грани которого являются плоскими треугольниками Δ, каждый из которых заключен в куб $T \subset G$. (Точнее говоря, мы предполагаем, что все точки замкнутого треугольника лежат внутри T.) Наша цель — получить неравенство для периода

$$\pi_C = \int_C f_n\, do$$

любого векторного поля без источников f, определенного в области G:

$$\pi_C{}^2 \leqq H_C{}^2 \cdot \| f \|^2.$$

В этом неравенстве константа H_C должна зависеть от C и не зависеть от f. С этой целью мы заключим T в несколько больший куб $T \subset G$, и построим для f векторный потенциал u, непрерывный внутри T и удовлетворяющий условиям

$$f = \operatorname{rot}^* u, \quad \operatorname{div}^* u = 0. \tag{58}$$

Теперь вернемся к T и применим к u разложение $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^* + \overline{\mathfrak{T}}$;

$$u = u^* + \bar{u}.$$

Мы утверждаем, что $\bar{u} = \operatorname{grad} \vartheta$, где ϑ гармонична внутри T. Действительно, по определению

$$\int_T (\bar{u} \cdot \operatorname{rot} q) = 0.$$

Более того, из второго уравнения (58) следует что равенство

$$\int_T (u \cdot \operatorname{grad} \psi) = 0$$

справедливо для любого поля ψ, имеющего непрерывные производные в замкнутом кубе T и обращающегося в нуль на границе T. Отсюда и из (45) вытекает, что

$$\int_T (\bar{u} \cdot \operatorname{grad} \psi) = 0.$$

Наша фундаментальная теорема 1, примененная к T вместо G, показывает тогда, что поле $\bar{u}$ является гармоническим и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0, \ \operatorname{rot} \bar{u} = 0.$$

Следовательно, поле u^* непрерывно внутри T и для u^* выполняются соотношения (58). Таким образом,

$$\int_\Delta f_n \, do = \int_{\Delta'} u_s d_s = \int_{\Delta'} u_s^* \, ds. \tag{59}$$

Поскольку выполнены условия (46), мы получаем из леммы 4, что

$$\int_T (u^*)^2 \leqslant M^2 \cdot \| f \|^2. \tag{60}$$

[Добавление от 17 ноября 1940 г. Когда я писал это доказательство, я имел в виду, что комбинаторная схема нашего 2-цикла есть комбинаторная схема некоторого абстрактного ориентируемого *α-многообразия*. Однако с очевидными изменениями доказательство проходит и для тех двумерных циклов, которые принадлежат произвольным *2-комплексам*. Теоремы VII и VIII будут далее пониматься в этом расширенном смысле].

Рассмотрим теперь две прилегающие грани Δ_1, Δ_2 цикла C вместе с их общим ребром δ и охватывающими их кубами T_1, T_2, в которых определены поля u_1^*, u_2^*.

При вычислении π_C сумма (59) берется по всем граням C. Ребро δ дает вклад

$$\int_\delta (u_1^* - u_2^*)_s \, ds. \tag{61}$$

Кубы T_1 и T_2 имеют общую часть T_δ. Все кубы T, отвечающие граням Δ, имеющим общую вершину a, имеют общую чать T_a. Множества T_δ и T_a не являются кубами, но являются блоками. Поскольку в T_δ выполнены равенства

$$f = \mathrm{rot}^* u_1^* = \mathrm{rot}^* u_2^*,$$

разность $u_2^* - u_1^*$ является невихревым полем в T_δ, и, следовательно, представима в виде $\mathrm{grad}\, \varphi_\delta$, где $\varphi_\delta = \varphi_{12}$ — функция в T_δ с непрерывными производными. В действительности функция φ_δ гармоническая, поскольку поле $u_2^* - u_1^*$ не только невихревое, но и поле без источников, что вытекает из раренств

$$\mathrm{div}^* \, u_1^* = 0, \quad \mathrm{div}^* \, u_2^* = 0.$$

Из неравенства (60) для u_1^* в T_1 и u_2^* в T_2 следует, что

$$\int_{T_\delta} (u_1^*)^2 \leqslant M_1^2 \cdot \|f\|^2, \qquad \int_{T_\delta} (u_2^*)^2 \leqslant M_2^2 \cdot \|f\|^2$$

и, значит,

$$\int_{T_\delta} (\mathrm{grad}\, \varphi_\delta)^2 = \int_{T_\delta} (u_1^* - u_2^*)^2 \leqslant (M_1 + M_2)^2 \cdot \|f\|^2. \tag{62}$$

Пусть ребро δ соединяет вершину a с вершиной b. Пусть ориентация δ такова, что при переходе от Δ_1 к Δ_2 мы пересекаем δ слева направо. При обратном переходе $\Delta_2 \to \Delta_1$ мы получаем $\varphi_{21} = -\varphi_{12}$, $\varphi_{-\delta} = -\varphi_\delta$. Интеграл (61) равен

$$-\int_\delta (\mathrm{grad}\, \varphi_\delta)_s \, ds = \varphi_\delta(a) - \varphi_\delta(b) = \varphi_\delta(a) + \varphi_{-\delta}(b).$$

Суммируя по всем ребрам δ цикла C, мы получаем формулу

$$\pi_C = \sum_\delta \{\varphi_\delta(a) - \varphi_\delta(b)\} \sum_a \chi_a(a). \tag{63}$$

Последняя сумма берется по всем вершинам a и используется обозначение

$$\chi_a(a) = \sum_\delta{}' \varphi_\delta(a),$$

где $\sum_\delta{}'$ означает суммирование по всем ребрам δ, выходящим из вершины a.

Обозначим через $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ грани вокруг точки a. Поскольку

$$\mathrm{grad}\, \varphi_{12} = u_2^* - u_1^*, \quad \mathrm{grad}\, \varphi_{23} = u_3^* - u_2^*, \ \ldots,$$

градиент суммы $\varphi_{12} + \varphi_{23} + \ldots + \varphi_{m1}$ обращается в нуль на T_a. Следовательно, эта сумма является константой. Обозначив через x_a точку, пробегающую T_a, мы, таким образом, находим, что сумма

$$\chi_a(x_a) = \sum_\delta{}' \varphi_\delta(x_a)$$

является постоянной функцией, и соотношение (63) переходит в более общее соотношение

$$\pi_C = \sum_a \chi_a(x_a) = \sum_\delta \{\varphi_\delta(x_a) - \varphi_\delta(x_b)\}. \tag{64}$$

Это равенство делает очевидным тот факт, что значение π_C не меняется при изменении каждой вершины a в окружающем ее блоке T_a.

Применив неравенство (44) к φ_δ и блоку T_δ, мы получаем, что неравенство

$$\iint (\varphi_\delta(x) - \varphi_\delta(x'))^2 \leqslant L_\delta{}^2 \cdot \int\limits_{T_\delta} (\operatorname{grad} \varphi_\delta)^2$$

выполняется для некоторой константы L_δ, зависящей только от длин ребер T_δ (см. уравнение (43)). Интегрирование в левой части проводится по x и x' пробегающим T_δ. Комбинируя это неравенство с неравенством (62) и учитывая, что пределы интегрирования в левой части лежат по x в T_a и по x' в T_b, мы получаем неравенство

$$\int\limits_{T_a} \int\limits_{T_b} (\varphi_\delta(x_a) - \varphi_\delta(x_b))^2 \leqslant A_\delta{}^2 T_a T_b \cdot \| f \|^2.$$

Константа A_δ, явное значение которой может быть легко найдено, не зависит от f. Если теперь мы используем для выражения π_C правую часть (64) и проинтегрируем, меняя каждую точку x_a в ее блоке T_a, мы получим

$$\pi_C{}^2 \leqslant H_C{}^2 \cdot \| f \|^2, \quad \text{где } H_C = \sum_\delta A_\delta.$$

Теорема VII. *Для всякого 2-цикла $C \subset G$ найдется такая константа H_C, что период π_C по циклу C любого векторного поля без источников f, определенного в G, удовлетворяет неравенству*

$$\pi_C{}^2 \leqq H_C{}^2 \cdot \| f \|^2.$$

Возвращаясь к нашей второй краевой задаче, мы замечаем, что период k_C поля g по любому 2-циклу C равен периоду по C поля

$$g - g_\nu = g - \operatorname{rot} v_\nu.$$

Последнее полученное нами неравенство

$$k_C{}^2 \leqslant H_C{}^2 \cdot \| g - g_\nu \|^2 \text{ для } \nu = 1, 2, \ldots$$

показывает, что $k_C = 0$, т. е. f имеет те же периоды, что и его гармоническая часть e:

Теорема VIII. *Если разложение $\mathfrak{F}' = \mathfrak{G}' + \mathfrak{E}$ применено к векторному полю без источников f, то период поля f по любому 2-циклу совпадает с периодом $\mathfrak{E}$- части e поля f по тому же циклу.*

§ 7. Поведение на границе

До сих пор мы использовали лишь факт, что аппроксимации g_ν в наших двух задачах имеют скалярный и векторный потенциалы соответственно, и эти потенциалы однозначны на G. Как нам учесть тот факт, что они обращаются в нуль в окрестности границы?

В нашей первой задаче

$$g_\nu = \operatorname{grad} \psi_\nu \quad (\psi_\nu \text{ класса } \Gamma),$$

мы положим $\psi_\nu = 0$ вне G, так что ψ_ν становится функцией с непрерывными производными, определенной на всем пространстве. Выберем произвольно большой куб T, не предполагая более, что он принадлежит G. Мы собираемся доказать, что функции ψ_ν сами по себе, без нормировки с помощью вычитания константы, описываемой уравнением (56), сходятся к пределу $\overline{\psi}$ в том смысле, что

$$\int_T (\overline{\psi} - \psi_\nu)^2 \to 0 \quad \text{для } \nu \to \infty.$$

С этой целью рассмотрим функцию ψ класса Γ и потенциал $\overline{\Phi}$ распределения масс с плотностью

$$\rho(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{в } T, \\ 0, & \text{вне } T, \end{cases} \qquad \Phi(x) = \int_{x'} \frac{\rho(x')}{|x - x'|}.$$

Образуем интеграл

$$J = \frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{grad} \Phi \cdot \operatorname{grad} \psi).$$

Взяв G в качестве области интегрирования, мы находим

$$J = -\frac{1}{4\pi} \int \psi \cdot \Delta^* \Phi = \int \psi \rho = \int_T \psi^2. \tag{65}$$

Взяв в качестве области интегрирования все пространство, мы получаем

$$J^2 \leqslant \frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{grad} \Phi)^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{grad} \psi)^2.$$

Первый интеграл в правой части сходится, поскольку при стремлении аргумента к бесконечности порядок убывания Φ равен 1, а порядок убывания $\operatorname{grad} \Phi$ равен 2. И этот интеграл равен

$$-\frac{1}{4\pi} \int \Phi \cdot \Delta^* \Phi = \int \int \frac{\rho(x) \rho(x')}{|x - x'|}.$$

В правой части можно интегрировать по x и x', пробегающим T и заменить тогда $\rho(x)$ на $\psi(x)$. По неравенству Шварца квадрат этого интеграла не превосходит

$$E^2 \int_T \int_T (\psi(x) \psi(x'))^2 = E^2 \left(\int_T \psi^2 \right)^2,$$

где

$$E^2 = \int_T \int_T \frac{1}{|x - x'|^2}.$$

Таким образом,

$$J^2 \leqslant \frac{E}{4\pi} \int_T \psi^2 \cdot \int_G (\operatorname{grad} \psi)^2.$$

Соединим это с (65). В результате мы получим следующее неравенство, которое следует сравнить с леммой 3:

$$\int_T \psi^2 \leqslant \frac{E}{4\pi} \int_G (\operatorname{grad} \psi)^2.$$

Применение его к $\psi_\nu - \psi_\mu$ дает

$$\int_T (\psi_\nu - \psi_\mu)^2 \to 0 \quad \text{для } \mu, \nu \to \infty.$$

Следовательно, ψ_ν сходится к некоторому пределу ψ в том смысле, что для любого куба T

$$\int_T (\psi - \psi_\nu)^2 \to 0 \quad \text{для } \nu \to \infty.$$

ψ обращается в нуль вне G. Равенство

$$\int_T \psi_\nu \cdot \operatorname{div} p = -\int_T (g_\nu \cdot p)$$

справедливо для всякого p, удовлетворяющего условиям, которым у нас удовлетворяют поля, обозначаемые этой буквой. Перейдя к пределу, мы получаем

$$\int_T \psi \cdot \operatorname{div} p = -\int_T (g \cdot p). \tag{66}$$

Снова g равно нулю вне G. Это и есть искомый эквивалент для условий $g = \operatorname{grad}\psi$ и $\psi = 0$ на границе. Действительно, если G имеет достаточно регулярную границу γ, и функция ψ, обращающаяся в нуль вне G, непрерывна вплоть до границы, то равенство (66) не будет справедливо для $g = \operatorname{grad} \psi$ до тех пор, пока мы не добавим в левую часть член $\int \psi \cdot p_n do$, распространенный на ту часть границы γ, которая заключена в T.

По очевидным причинам эта процедура не проходит для второй краевой задачи. Однако та же идея снова прекрасно работает, когда мы переходим от второй к третьей задаче. Рассмотрим векторное поле v класса Γ и положим $v = 0$ вне G. Точнее говоря, положим

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{в } T, \\ 0, & \text{вне } T. \end{cases}$$

Образуем векторный потенциал

$$V(x) = \int_{x'} \frac{\tilde{v}(x')}{|x - x'|}$$

и интеграл

$$J = \frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{div} V \cdot \operatorname{div} v + \operatorname{rot} V \cdot \operatorname{rot} v).$$

С помощью преобразований, аналогичных только что проведенным, мы получаем неравенство

$$\int_T v^2 \leqslant \frac{E}{4\pi} \int_G \{(\operatorname{rot} v)^2 + (\operatorname{div} v)^2\},$$

которое можно сравнить с леммой 4.

Всякая пара (g, ψ) в G^+ является пределом пар

$$g_\nu = \operatorname{rot} v_\nu, \psi_\nu = \operatorname{div} v_\nu \quad (v_\nu \text{ класса } \Gamma).$$

Применение нашего неравенства к $v_\nu - v_\mu$ дает векторное поле v, обращающееся в нуль вне G и такое, что для любого куба T справедливо соотношение

$$\int_T (v - v_\nu)^2 \to 0 \quad \text{для} \quad \nu \to \infty.$$

Это поле v удовлетворяет условиям

$$\int_T (v \cdot \operatorname{rot} q) = \int_T (g \cdot q), \qquad \int_T (v \cdot \operatorname{grad} \sigma) = -\int_T \psi \cdot \sigma,$$

где σ — любая функция, производные которой непрерывны в T вплоть до границы и которая обращается в нуль на границе, а q — любое векторное поле, удовлетворяющее тем ограничениям, которым у нас удовлетворяют поля, обозначаемые этой буквой. Эти интегральные соотношения эквивалентны дифференциальным соотношениям

$$g = \operatorname{rot} v, \qquad \psi = \operatorname{div} v$$

и граничному условию $v = 0$.

§ 8. Заключительные замечания

В двумерном пространстве условия (3) и (4) для безвихревого и соленоидального полей переписываются в виде

$$\left.\begin{aligned} &\int \left(f_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + f_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) = 0, \\ &\int \left(f_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) = 0 \end{aligned}\right. \qquad (\psi \text{ класса } \Gamma).$$

Если мы рассмотрим (f_1, f_2) как ковариантный вектор, эти условия окажутся инвариантными относительно конформных преобразований координат x_1, x_2. Следовательно, теория применима к произвольной римановой поверхности, т. е. к двумерному многообразию, конформная структура которого локально евклидова. Это замечание дает, среди прочих, следующий результат: если φ периодическая функция, имеющая непрерывные произвольные на унирверсальном абелевом накрывающем многообразии $\overline{G}$ компактной римановой поверхности G, то существует гармоническая функция η, имеющая те же периоды, что и φ. Это утверждение практически эквивалентно, а если воспользоваться одним хорошо известным результатом де Рама, то и полностью эквивалентно существо-

ванию абелева интеграла первого рода с предписанными периодами его вещественной части. Другая процедура построения этих интегралов изложена в цитированной выше книге автора по римановым поверхностям. Метод ортогональной проекции в гильбертовом пространстве является красивым вариантом принципа минимизации Дирихле. Нужно, однако, сказать, что представленный нами метод демонстрирует свою мощь только тем общим подходом, с помощью которого он учитывает граничные условия. Рассуждения последнего параграфа не идут в двумерном пространстве, за исключением тех случаев, когда область G ограничена, или по крайней мере когда интеграл по G функции $1/(1+|x|^2)$ конечен.

Предложенный метод может быть легко приспособлен для нужд двумерной и трехмерной *теории упругости*.

В случае n измерений условия (3) и (4) переходят в

$$\int \sum_i f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0,$$

$$\int \sum_{i,k} f_i \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_k} = 0,$$

где ψ — произвольный скаляр класса Г и v_{ik} — произвольный кососимметрический тензор ранга 2 и класса Г. Нетрудно видеть, как формулируются соответствующие условия для пфаффовых форм высшего ранга. Здесь мы пересекаемся с упомянутыми выше исследованиями Ходжа. Он заметил, что в $2k$-мерном пространстве условие на пфаффову форму ранга k выражается в конформных терминах и не использует всех свойств римановой структуры пространства. Таким образом, теория таких форм и их периодов разворачивается в «конформно плоских» пространствах (в пространствах, снабженных римановой метрикой, для которых конформная кривизна равна нулю).

О ГЕОМЕТРИИ ЧИСЕЛ*

1. Минковский следующим образом сформулировал свою фундаментальную теорему о взаимоотношениях между выпуклыми телами и решетками. Пусть в n-мерном пространстве векторов $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ дана решетка, состоящая из всевозможных векторов с целыми координатами, и пусть $f(\mathfrak{x})$ — произвольная «калибровочная функция», т. е. непрерывная функция на векторном пространстве, обладающая следующими свойствами:

$$f(\mathfrak{x}) > 0, \text{ исключая начало } \mathfrak{x} = \mathfrak{o} = (0, \ldots, 0);$$

$$f(t\mathfrak{x}) = |t| f(\mathfrak{x}) \text{ для любого вещественного множителя } t;$$

$$f(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}') \leqslant f(\mathfrak{x}) + f(\mathfrak{x}').$$

Условие $f(\mathfrak{x}) < 1$ определяет тогда (открытое) выпуклое тело $\mathfrak{K}$ с центром в $\mathfrak{o}$. Если V — объем тела $\mathfrak{K}$ и $2M$ — минимум функции $f(\mathfrak{a})$ на всех векторах решетки $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, то универсальное неравенство Минковского состоит в том, что

$$M^n V \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Если $\mathfrak{S}$ — произвольное подмножество векторного пространства, то его можно поместить около любой заданной точки a n-мерного аффинного пространства точек. Получающееся в результате точечное множество $\mathfrak{S}_a$ состоит из таких точек x, что вектор $\mathfrak{x} = \mathrm{ax}$ лежит в $\mathfrak{S}$. Рассуждение Минковского основано на простом замечании, что если поместить выпуклое тело

$$\mathfrak{K}(q)\colon\ f(\mathfrak{x}) < q,$$

подобное $\mathfrak{K}$, около каждой из точек a решетки, то в результате не будет перекрытий, пока $q \leqslant M$, и, следовательно, до этой границы объем $q^n V$ тела будет оставаться меньше или равным 1. Когда q превзойдет M, тела решетки начнут перекрываться.

Рассматривая покрываемую ими часть пространства, Минковский приходит к более точному неравенству [1]

$$M_1 \ldots M_n V \leqslant 1, \tag{1.2}$$

где числа M_k описываются следующим образом. Шарик формы $\mathfrak{K}$, если его раздувать, проходит с ростом q через последовательность фигур $\mathfrak{K}(q)$. $q = 2M = 2M_1$ является первым моментом, когда в него входит точка $\mathfrak{d}_1 \neq \mathfrak{o}$ решетки. $2M_k$ — это уровень, когда в шарик впервые входит точка $\mathfrak{d}_k$ решетки, не входящая в $(k-1)$-мерное линейное многообразие $[\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_{k-1}]$, порожденное

* On geometry of numbers.— Proc. London Math. Soc., 1942, vol. 47, p. 268—289. Перевод А. Н. Паршина.

[1] Geometrie der Zahlen. Leipzig, 1896, 1910, S. 211—218.

векторами $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_{k-1}$. Ясно, что $M_1 \leqslant M_2 \leqslant \ldots \leqslant M_n$. Иначе говоря, вектор $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}_k$ является тем вектором решетки вне многообразия $[\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_{k-1}]$, на котором $f(\mathfrak{a})$ принимает наименьшее возможное значение $2M_k$. Пока $q \leqslant 2M_k$, тело $\mathfrak{K}(q)$ содержит меньше чем k линейно независимых векторов решетки, в то время как для $q > 2M_k$ их число равно по крайней мере k.

Векторы

$$\pm\mathfrak{d}_1/2M_1, \pm\mathfrak{d}_2/2M_2, \ldots, \pm\mathfrak{d}_n/2M_n$$

и, следовательно, их выпуклое замыкание, содержатся в $\mathfrak{K}$. Если $P = |\mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{d}_n|$ — объем параллелепипеда, порожденного векторами $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$, то объем рассматриваемого замыкания равен

$$\frac{2^n}{n!} \frac{P}{2M_1 \ldots 2M_n} = \frac{P}{n!} \frac{1}{M_1 \ldots M_n}.$$

Поэтому

$$\frac{P}{n!} \leqslant M_1 \ldots M_n V \leqslant 1,$$

и, следовательно, для положительного целого P имеем $P \leqslant n!$.

Эта заметка состоит из двух частей. В первой содержится формулировка задачи Минковского на языке характеристических функций Φ, принимающих лишь два «истинностных значения», и ее дальнейшее обобщение на вероятностные функции, значения которых меняются в пределах $0 \leqslant \Phi \leqslant 1$. При этом не исключаются перекрывания, что учитывается использованием вместо обычных булевых сумм. Суть аргументов остается неизменной, хотя наиболее существенные моменты выступают более ясно.

Если P равно 1, то неравенство (1.2) должно бы содержать важные сведения о приведении относительно арифметической эквивалентности, именно о нормализации базиса нашей решетки в терминах данного выпуклого тела $\mathfrak{K}$. В имеющейся форме оно, однако, относится к несколько иной ситуации. Тем не менее почти тривиальной перестройкой его можно превратить в утверждение, относящееся к проблеме приведения. Это делается во второй части, которая завершается несколькими замечаниями о частном случае приведения квадратичных форм.

[*Добавлено* в январе 1940 г. Проф. Л. Дж. Морделл, которому я послал копию рукописи, любезно указал мне две работы, которые я посмотрел. Одна, Г. Давенпорта в «Quart. J. Math.» (1939, vol. 10, p. 119—121), имеет тесное отношение к части I, так как содержит другое доказательство неравенства (1.2), в то время как другая, К. Малера в «Quart. J. Math.» (1938, vol. 9, p. 259—262), в действительности предвосхищает основной результат части II, именно теорему V. Я все еще поражен тем обстоятельством, что открытие этого утверждения в 1938 г. д-ром Малером, равно как и лежащего в его основе простого наблюдения, произошло лишь через сорок два года после того как Минковский установил свое неравенство (1.2).]

I.

2. Множества точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в аффинном пространстве можно описывать их характеристическими функциями, равными 1 внутри множества и 0 вне его. Характеристическая функция φ объединения двух множеств с характеристическими функциями φ_1 и φ_2 является их «булевой» суммой

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1\varphi_2,$$

которая сводится к обычной сумме, если множества не пересекаются. Числа a из интервала $0 \leqslant a \leqslant 1$ будем называть *вероятностями*. Если a и b — вероятности двух статистически независимых событий A и B, то их булева сумма

$$c = a \vee b = a + b - ab = 1 - (1 - a)(1 - b)$$

снова удовлетворяет неравенству $0 \leqslant c \leqslant 1$ и является вероятностью события «А или В». Булева сумма коммутативна и ассоциативна. Из $a' \leqslant a$ вытекает неравенство $(a' \vee b) \leqslant (a \vee b)$, что сразу видно из выражения $a \vee b = a(1 - b) + b$.

Таким образом,

$$a' \leqslant a,\ b' \leqslant b \text{ влечет } (a' \vee b') \leqslant (a \vee b). \tag{2.1}$$

Булева сумма конечного числа вероятностей $a_1, \ldots, a_h$ равна

$$\underset{i}{S} a_i = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_h = 1 - \prod_{i=1}^{h}(1 - a_i) = \sum_{(i)} a_i - \sum_{(i,k)} a_i a_k + \\ + \sum_{(i,k,l)} a_i a_k a_l - \ldots = \frac{1}{1!}\sum_{i} a_i - \frac{1}{2!}\sum_{i,k} a_i a_k + \frac{1}{3!}\sum_{i,k,l} a_i a_k a_l - \ldots$$

Суммирование распространено на все выборки, состоящие из одного или двух или трех или... различных индексов, из множества $1, \ldots, h$, причем во второй строке без учета их порядка, а в третьей строке с учетом порядка. Скобки вида (i, k, l) указывают на первый способ суммирования.

Назовем функцию $\varphi(x)$ на нашем пространстве вероятностной функцией, если она удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Пусть теперь $\varphi(x)$ — (интегрируемая) вероятностная функция, исчезающая вне конечной области $\mathfrak{H}$ x-пространства. Последнюю можно считать параллелепипедом

$$A_i < x_i < B_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Перенос $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ решетки, имеющий целые компоненты a_i,

$$x_i' = x_i + a_i,$$

переводит функцию $\varphi(x)$ в

$$\varphi(x, \mathfrak{a}) = \varphi(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n).$$

В этой ситуации имеет смысл булева сумма

$$\psi(x) = \underset{\mathfrak{a}}{S} \varphi(x, \mathfrak{a}),$$

распространенная на переносы решетки, поскольку для каждого x лишь конечное число ее членов не обращается в нуль. $\psi(x)$ является вероятностной функцией с периодом 1 по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Образуем интеграл

$$J[\varphi] = \int_E \psi(x)\, dx, \qquad dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

по фундаментальной области решетки

$$\mathrm{E} : 0 < x_1 < 1, \ldots, 0 < x_n < 1.$$

Из $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$, очевидно, следует, что

$$0 \leqslant J[\varphi] \leqslant 1. \tag{2.2}$$

Более того, для любых двух вероятностных функций φ_2 и $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ в силу закона монотонности для булевых сумм (2.1) имеем $\psi_1 \leqslant \psi_2$, и потому

$$J[\psi_1] \leqslant J[\psi_2]. \tag{2.3}$$

Явное выражение для ψ таково:

$$\psi(x) = 1 - \prod_{\mathfrak{a}} \{1 - \varphi(x, \mathfrak{a})\} = \frac{1}{1!} \sum_{\mathfrak{a}}' \varphi(x, \mathfrak{a}) - \frac{1}{2!} \sum_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}}' \varphi(x, \mathfrak{a})\, \varphi(x, \mathfrak{b}) + \\ + \frac{1}{3!} \sum_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}}' \varphi(x, \mathfrak{a})\, \varphi(x, \mathfrak{b})\, \varphi(x, \mathfrak{c}) - \ldots,$$

где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — векторы решетки. Подставляя $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}, \ldots$ вместо $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}, \ldots$, мы видим, что $\psi(x)$ можно записать в виде обычной суммы

$$\psi(x) = \sum_{\mathfrak{a}} \varphi^*(x, \mathfrak{a}),$$

где

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) \left\{ \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \sum_{\mathfrak{b}}' \varphi(x, \mathfrak{b}) + \frac{1}{3!} \sum_{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}}' \varphi(x, \mathfrak{b})\, \varphi(x, \mathfrak{c}) - \ldots \right\},$$

а $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}, \ldots$ — векторы решетки, не равные $\mathfrak{o}$. Этот трюк работает, поскольку переносы решетки образуют *группу*. Если вернуться к «комбинациям», рассматриваемым без учета их порядка, то в последней формуле второй множитель справа будет равен

$$\varphi^{**}(x) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{(\mathfrak{a})}' \varphi(x, \mathfrak{a}) + \frac{1}{3} \sum_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}' \varphi(x, \mathfrak{a})\, \varphi(x, \mathfrak{b}) - \ldots, \tag{2.4}$$

где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}, \ldots$ — векторы решетки не равные $\mathfrak{o}$. Возьмем вещественный параметр t, меняющийся от 0 до 1, и введем произведение

$$\prod_{\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}} \{1 - t\varphi(x, \mathfrak{a})\} = 1 - t \sum_{(\mathfrak{a})} \varphi(x, \mathfrak{a}) + t^2 \sum_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})} \varphi(x, \mathfrak{a})\, \varphi(x, \mathfrak{b}) - \ldots$$

Интегрируя его от $t = 0$ до 1, приходим к выражению (2.4). Окончательно наши определения выглядят так:

$$\varphi^*(x) = \varphi(x)\,\varphi^{**}(x), \quad \varphi^{**}(x) = \int_0^1 \prod_{\mathfrak{a}\neq 0} \{1 - t\varphi(x, \mathfrak{a})\}\, dt, \tag{2.5}$$

$$J[\varphi] = \int_\infty \varphi^*(x)\, dx, \tag{2.6}$$

где значок ∞ указывает, что интеграл берется по всему пространству переменных x. Заметим, что $0 < \varphi^{**}(x) \leqslant 1$ и $\varphi_1^{**} \geqslant \varphi_2^{**}$, если $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$. Из (2.6) находим, что интеграл $j[\varphi]$ инвариантен относительно переносов, именно:

$$J[\varphi'] = J[\varphi], \quad \text{для} \quad \varphi'(x) = \varphi(x - x^0). \tag{2.7}$$

Если $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi$ и $\varphi - \varphi_1 \leqslant \varepsilon$, то получаем, что

$$\varphi^*(x) = \varphi(x)\,\varphi^{**}(x) \leqslant \varphi(x)\,\varphi_1^{**}(x),$$

и, следовательно, из (2.6) находим окончательно

$$J[\varphi] - J[\varphi_1] \leqslant \int_{\mathfrak{H}} \{\varphi(x) - \varphi_1(x)\}\,\varphi_1^{**}(x)\, dx \leqslant H\varepsilon, \tag{2.8}$$

где H — объем области $\mathfrak{H}$. Подытожим полученное.

Теорема 1. *Для любой вероятностной функции* φ, *исчезающей вне конечной области*, *интеграл* (2.6) *меньше или равен* 1. *Величина* $J[\varphi]$ *инвариантна относительно переносов и*

$$J[\varphi_1] \leqslant J[\varphi_2] \quad \textit{если} \quad \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x).$$

Частный случай, когда φ — характеристическая функция (открытого) множества $\mathfrak{S}$, имеющего жорданов объем V, дает простую теорему Минковского—Блихфельдта—Шеррера: если $\mathfrak{S}_0$ не имеет общих точек с множествами $\mathfrak{S}_a$, помещенными около других точек решетки, $a \neq 0$, или если $\mathfrak{S}_0$ никогда не содержит одновременно начало x и конец $x + a$ вектора a решетки (это то же самое, что и выше), то объем V меньше или равен 1. Я рассматриваю теорему 1 как естественную общую формулировку этого утверждения, причем наше доказательство есть не что иное, как краткая аналитическая форма простого соображения, которым это утверждение было доказано [2].

[Наше аффинное пространство x-ов можно заменить произвольным дифференцируемым многообразием U точек x, на котором заданы бесконечно малый элемент объема и группа G сохраняющих объем взаимно однозначных преобразований, заменяющая группу переносов решетки и удовлетворяющая условиям:

1) G дискретна в самом сильном смысле, т. е. множество точек, эквивалентных любой выбранной точке x, не обладает предельными точками.

[2] *Hajós G.*— Acta litt. sci. Szeged, 1934. vol. 6, p. 224—225; *Blichfeldt H. F.*— Trans. Amer. Math. Soc., 1914, vol. 15, p. 227—235; *Scherrer W.*— Math. Ann., 1922, Bd. 86, S. 99—107.

2) G имеет компактную фундаментальную область, т. е. многообразие, возникающее из U отождествлением эквивалентных точек, предполагается компактным.]

3. Введем вместе с Зигелем[3] коэффициенты Фурье периодической функции $\psi(x)$:

$$J_{\mathfrak{l}} = \int\limits_E \psi(x)\, e(l_1x_1 + \ldots + l_nx_n)\, dx,$$

отвечающие различным векторам $\mathfrak{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ из двойственной решетки (здесь $e(x)$ — сокращение для $e^{2\pi i x}$), и запишем равенство Парсеваля

$$\int\limits_E (\psi(x))^2\, dx = \sum_{\mathfrak{l}} |J_{\mathfrak{l}}|^2.$$

Нулевой коэффициент J_0 есть наше $J = J[\varphi]$. Используя тождество

$$\int\limits_E \psi(x)\, \omega(x)\, dx = \int\limits_\infty \varphi^*(x)\, \omega(x)\, dx,$$

выполняющееся для любой периодической функции $\omega(x)$, получаем

$$J_{\mathfrak{l}} = \int\limits_\infty \varphi^*(x)\, e(l_1x_1 + \ldots + l_nx_n)\, dx \tag{3.1}$$

и

$$\int\limits_E (\psi(x))^2\, dx = \int\limits_\infty \varphi^*(x)\, \psi(x)\, dx.$$

Отсюда находим, что

$$\varphi^*\psi = \varphi^* \left\{1 - \prod_{\mathfrak{a}} (1 - \varphi(x, \mathfrak{a}))\right\} = \varphi^* - \varphi^*(1 - \varphi) \prod_{\mathfrak{a} \neq 0} \{1 - \varphi(x, \mathfrak{a})\}$$

и, следовательно,

$$\varphi^*\psi = \varphi^* - \varphi(1 - \varphi)\, \varphi_*\varphi^{**}, \tag{3.2}$$

где

$$\varphi_*(x) = \prod_{\mathfrak{a} \neq 0} \{1 - \varphi(x, \mathfrak{a})\}.$$

Теорема II. *Если* Φ_* *и* φ^{**} *определены формулами* (3.2), (2.4) *и* $J_{\mathfrak{l}}$ *обозначает интеграл* (3.1), *то для* $J = J[\varphi]$ *выполняется следующее равенство*:

$$J(1 - J) = \int\limits_\infty \varphi(1 - \varphi)\, \varphi_*\varphi^{**}\, dx + \sum_{\mathfrak{l} \neq 0} |J_{\mathfrak{l}}|^2.$$

Оно очень ясно показывает, как из $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ вытекает $0 \leqslant J \leqslant 1$.

[Это соображение работает и для произвольного дифференцируемого многообразия U, на котором имеется транзитивная группа Γ взаимно однозначных дифференцируемых преобразований, а решетка заменяется дискретной подгруппой в Γ, имеющей компактную фундаментальную область. Гармоники,

[3] Acta math., 1935, Bd. 65, p. 307—323.

заменяющие $e(l_1x_1 + \ldots + l_nx_n)$, получаются с помощью небольшого изменения процесса, описанного автором в «Ann. Math.» (1934, vol. 35, p. 486—499).]

4. Введем теперь условие *выпуклости*, предположив, что $\{\varphi(x) \geqslant r\}_x$, т. е. множество $\mathfrak{F}_r$ точек x, где $\varphi(x) \geqslant r$, является выпуклым множеством для всех $r > 0$. Соотношения $\varphi(x) \geqslant r$ и $\varphi(x') \geqslant r$ влекут тогда

$$\varphi(tx + (1-t)x') \geqslant r \tag{4.1}$$

для всех чисел t, заключенных между 0 и 1. *Функция* φ, *обладающая этим свойством в нашем n-мерном пространстве, сохраняет его на любом линейном подпространстве.* «Терраса» $\{r \leqslant \varphi(x) < r'\}_x$, заключенная между уровнями r и $r' > r$, имеет определенный жорданов объем, ибо она есть разность двух выпуклых множеств $\mathfrak{F}_{r'}$ и $\mathfrak{F}_r$. Пусть

$$0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_h = 1 \tag{4.2}$$

— произвольное разбиение интервала $0 \leqslant r \leqslant 1$ на подынтервалы длины $r_{i+1} - r_i \leqslant \varepsilon$ и пусть $\varphi_\Delta(x)$, $\varphi^\Delta(x)$ — соответствующие ступенчатые функции, приближающие φ снизу и сверху с погрешностью не большей ε. Они исчезают вне $\mathfrak{H}$, а внутри $\mathfrak{H}$ определяются соотношениями

$$\varphi_\Delta(x) = r_i \text{ и } \varphi^\Delta(x) = r_{i+1}, \text{ если } r_i \leqslant \varphi(x) < r_{i+1}.$$

Интегралы Римана функций φ_Δ и φ^Δ отличаются друг от друга, очевидно, не больше, чем на $H\varepsilon$. Это доказывает, что функция φ интегрируема по Риману. Более того, из (2.3) и (2.8) имеем

$$J[\varphi_\Delta] \leqslant J[\varphi] \leqslant J[\varphi^\Delta] \text{ и } J[\varphi^\Delta] - J[\varphi_\Delta] \leqslant H\varepsilon,$$

Так что эти неравенства могут служить определением $J[\varphi]$ через римановы интегралы $J[\varphi_\Delta]$ и $J[\varphi^\Delta]$ подходящих ступенчатых функций.

Повторим наши предположения (А) относительно φ:

(i) $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$;

(ii) $\varphi(x) = 0$ вне конечной области $\mathfrak{H}$;

(iii) множества $\mathfrak{F}_r : \{\rho(x) \geqslant r\}_x$ выпуклы.

Дальнейшие соображения Минковского основаны на процессе растяжения

$$\varphi_q(x_1, \ldots, x_n) = \varphi\left(\frac{x_1}{q}, \ldots, \frac{x_n}{q}\right) \tag{4.3}$$

и приводят при подходящем обобщении к следующему результату.

Теорема III. *В предположениях* (А)

$$J[\varphi_q] \geqslant J[\varphi] \quad \text{для } q \geqslant 1. \tag{4.4}$$

Доказательство. Допустим, что имеется точка x^0, где $\varphi(x)$ принимает свое максимальное значение. Если x — произвольная точка и $\varphi(x) = r$, то $\varphi(x^0) \geqslant r$ и в силу (4.1)

$$\varphi\left(\frac{1}{q}x + \left(1 - \frac{1}{q}\right)x^0\right) \geqslant r = \varphi(x) \quad \text{для всех } q \geqslant 1. \tag{4.5}$$

Временно обозначим стоящую слева функцию через $\varphi_q'(x)$. Формула (4.5) влечет

$$J[\varphi_q'] \geqslant J[\varphi],$$

и, следовательно,

$$J[\varphi_q] = J[\varphi_q'] \geqslant J[\varphi],$$

поскольку φ_q' получается сдвигом из φ_q.

Так как мы не предполагали функцию $\varphi(x)$ непрерывной или множества $\mathfrak{F}_r$ замкнутыми, можно сомневаться в существовании максимума. Достаточно применить, однако, следующее небольшое видоизменение наших рассуждений. Пусть r_i — наибольшее из чисел, входящих в конечную последовательность (4.2), для которых множество $\mathfrak{F}_{r_i}$ непусто. Обрежем верхушку горы на высоте r_i, *т. е.* образуем функцию

$$\hat{\varphi}(x) = \min(r_i, \varphi(x))$$

и выберем в качестве x^0 точку из $\mathfrak{F}_{r_i}$. Тогда мы получим вместо (4.5)

$$\varphi_{q'}(x) \geqslant \hat{\varphi}(x) \quad (q \geqslant 1),$$

и, следовательно,

$$J[\varphi_a] \geqslant J[\hat{\varphi}].$$

Согласно (2.8) имеем

$$J[\hat{\varphi}] \geqslant J[\varphi] - H\varepsilon,$$

и, таким образом, неравенство (4.4) будет снова обосновано, если устремить ε к нулю (вместо обезглавленной вершины можно было бы использовать гору φ_Δ, имеющую на склонах террасы).

Поскольку $(\varphi_{q'})_q = \varphi_{q'q}$, можно сказать, что теорема III утверждает, что

$$J[\varphi_q] = J(q)$$

является монотонно возрастающей функцией параметра растяжения q.

5. Нашим следующим намерением будет такое изменение всей процедуры, чтобы ввести в рассмотрение лишь те векторы решетки

$$(a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0) \quad (a_i \text{ — целые, } k \geqslant 1), \tag{5.1}$$

которые принадлежат линейному подпространству

$$x_{k+1} = \ldots = x_n = 0.$$

Определим тогда $\varphi^* = \varphi^{(k)}$ последним соотношением в (2.5), в котором произведение берется по всем векторам $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ упомянутой k-мерной решетки. Тогда

$$J^{(k)}[\varphi] = \int\limits_{\infty} \varphi^{(k)}(x)\, dx.$$

Интегрирование удобно провести затем в два этапа: сначала по отношению к $x_1, \ldots, x_k$ при постоянных $x_{k+1}, \ldots, x_n$ и затем по $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Таким образом, находим, что

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \text{ влечет } J^{(k)}[\varphi_1] \leqslant J^{(k)}[\varphi_2].$$

В то же время выполняющееся при условии $0 \leqslant \varphi - \varphi_1 \leqslant \varepsilon$ неравенство

$$J^{(k)}[\varphi] \leqslant J^{(k)}[\varphi_1] + H\varepsilon$$

получается без раздельного интегрирования, теми же соображениями, что и (2.8).

Так же как и φ, функция k переменных

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \varphi(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

удовлетворяет условиям (A) и потому

$$J[\Phi_q] \geqslant J[\Phi] \text{ для } q \geqslant 1. \tag{5.2}$$

Заметим, что $\Phi_q(x_1, \ldots, x_k) = \overline{\varphi}_q(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$, где

$$\overline{\varphi}_q(x) = \varphi\left(\frac{x_1}{q}, \ldots, \frac{x_k}{q}, x_{k+1}, \ldots, x_n\right).$$

Интегрируя (5.2) по переменным $x_{k+1}, \ldots, x_n$, находим, что

$$J^{(k)}[\overline{\varphi}_a] \geqslant J^{(k)}[\varphi].$$

Подстановка

$$\frac{x_{k+1}}{q} = x'_{k+1}, \ldots, \frac{x_n}{q} = x'_n, \tag{5.3}$$

производимая над последними $n - k$ переменными, дает соотношение

$$J^{(k)}[\varphi_q] = q^{n-k} J^{(k)}[\overline{\varphi}_q],$$

откуда

$$J^{(k)}[\varphi_q] \geqslant q^{n-k} J^{(k)}[\varphi] \text{ для } q \geqslant 1.$$

Для наших римановых интегралов проведение интегрирования в два этапа $x_1, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, \ldots, x_n$ и применение подстановки (5.3) не составляли никаких трудностей. Может быть, предпочтительнее сначала иметь дело со ступенчатой функцией φ_Δ, устраняя тем самым упомянутые выше трудности с максимумом функции φ и затем комбинировать получающееся неравенство

$$J^{(k)}[\varphi_q] \geqslant q^{n-k} J^{(k)}[\varphi_\Delta]$$

с неравенством

$$J^{(k)}[\varphi_\Delta] \geqslant J^{(k)}[\varphi] - H\varepsilon.$$

Для $k = 0$ положим $\varphi^{(0)} = \varphi$, и, следовательно,

$$J^{(0)}[\varphi_q] = q^n \int_\infty \varphi(x)\,dx.$$

Вместо (5.1) можно рассматривать произвольную k-мерную дискретную решетку $\mathfrak{L}_k$, поскольку всегда можно выбрать в качестве ее образующих первые k координатных векторов $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ (это означает, что решетка состоит из векторов $a_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + a_k\mathfrak{e}_k$ с целыми компонентами a_i).

Теорема IV. *Положим для k-мерной решетки $\mathfrak{L}_k$*

$$\varphi^{(k)}(x) = \varphi(x) \int_0^1 \prod_{\mathfrak{a}} \{1 - t\varphi(x, \mathfrak{a})\}\, dt,$$

где произведение распространено на все векторы $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ решетки $\mathfrak{L}_k$, и

$$J^{(k)}[\varphi] = \int_{\infty} \varphi^{(k)}(x)\, dx, \quad J_k(q) = J^{(k)}[\varphi_q].$$

Тогда $J_k(q)/q^{n-k}$ — возрастающая функция q и, в частности,

$$J_0(q)/q^n = \int_{\infty} \varphi(x)\, dx.$$

Отсюда немедленно получаем применение к ситуации, рассматриваемой Минковским. Теперь φ будет характеристической функцией выпуклого тела $\mathfrak{K} : f(x) < 1$. Пусть $\mathfrak{L}_k$ — решетка, состоящая из векторов, принадлежащих $[\mathfrak{d}_1, \ldots \mathfrak{d}_k]$. Пока $q \leqslant M_{k+1}$, имеем

$$\varphi_q^{(k)} = \varphi_q^*, \ J_k(q) = J(q).$$

В самом деле, тела $\mathfrak{K}(q)$ и $\mathfrak{K}_a(q)$ не перекрываются, если a — точка решетки, не принадлежащая $[\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_k]$ и $q \leqslant M_{k+1}$. Отсюда находим, что для $q \leqslant M_1$

$$J(q) = q^n V$$

и, в частности, $J(M_1) = M_1{}^n V$. Тогда

$$J(q) \geqslant \left(\frac{q}{M_1}\right)^{n-1} J(M_1) = M_1 q^{n-1} V \quad \text{для} \quad M_1 \leqslant q \leqslant M_2,$$

и, следовательно,

$$J(M_2) \geqslant M_1 M_2{}^{n-1} V.$$

Продолжая в том же духе, получаем

$$J(q) \geqslant M_1 \ldots M_{k-1} q^{n-k+1} V \ \text{для} \ M_{k-1} \leqslant q \leqslant M_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

и окончательно

$$J(q) \geqslant M_1 \ldots M_n V \ \text{для} \ q \geqslant M_n.$$

Поскольку $J(q)$ всегда не превосходит 1, неравенство Минковского (1.2) тем самым доказано.

II.

6. В противоположность построениям части 1, доставляющим векторы $\mathfrak{d}_k$ и параметры растяжения $2M_k$, *задача приведения* состоит в определении векторов $\mathfrak{e}_k$ и чисел N_k согласно следующему индуктивному правилу:

Пусть $\mathfrak{a}$ пробегает все такие векторы решетки, не принадлежащие $(k-1)$-мерному многообразию $[\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{k-1}]$, что каждый вектор из k-мерного мно-

гообразия $[\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{k-1}, \mathfrak{a}]$

$$\mathfrak{x}_{k-1} + x\mathfrak{a} \text{ с } \mathfrak{x}_{k-1} \text{ из } [\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{k-1}],$$

принадлежащий решетке, имеет целочисленную $\mathfrak{a}$-компоненту x. Тогда $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_k$ — вектор рассматриваемой совокупности $\mathfrak{R}_k$, на котором $f(\mathfrak{a})$ принимает наименьшее возможное значение N_k.

В качестве первого шага можно взять $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{d}_1$, так что $N_1 = 2M_1$. Легко заключаем по индукции, что векторы $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ порождают (*т. е.* образуют базис) полную решетку в многообразии $[\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k]$. Следовательно, векторы $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ порождают полную n-мерную решетку. В этой системе координат векторы нашей решетки

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + x_n\mathfrak{e}_n = (x_1, \ldots, x_n)$$

снова имеют целочисленные компоненты x_i, и приведение эквивалентно следующим условиям:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant f(\delta_1^k, \ldots, \delta_n^k) = N_k, \tag{6.1}$$

выполняющимся в предположении, что $x_1, \ldots, x_n$ — целые и $x_k, \ldots, x_n$ не имеют общего делителя. Здесь δ_i^k — это символы Кронекера, а $\mathfrak{e}_k = (\delta_1^k, \ldots, \delta_n^k)$ — k-й единичный вектор.

Условия (6.1) влекут, очевидно, неравенства

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant \ldots \leqslant N_n.$$

Тем самым мы нормализовали базис нашей n-мерной решетки по отношению к выпуклому телу с помощью n множеств (6.1), состоящих из бесконечного числа неравенств, и это то, что нужно для задачи приведения. Возникает вопрос, можно ли установить универсальную верхнюю границу для $N_1 \ldots N_nV$. Я докажу, что имеет место

Теорема V. *Если приведенный базис* $\mathfrak{e}_k$ *решетки выбран так, чтобы удовлетворить условиям* (6.1), *то*

$$N_1 \ldots N_nV \leqslant \mu_n, \tag{6.2}$$

где

$$\mu_n = 2^n\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2(n-1)(n-2)}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Один из векторов $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_k$, скажем $\mathfrak{d}$, лежит вне линейного многообразия

$$E_{k-1} = [\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{k-1}].$$

В многообразии

$$E_k^* = [\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{k-1}, \mathfrak{d}]$$

можно найти вектор решетки $\mathfrak{e}^*$, порождающий вместе с $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{k-1}$ решетку в E_k^*. Из конечного множества векторов решетки вида

$$x_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + x_{k-1}\mathfrak{e}_{k-1} + y\mathfrak{d}, \tag{6.4}$$

где

$$-1/2 < x_i \leqslant 1/2 \ (i = 1, \ldots, k-1), \quad 0 < y \leqslant 1,$$

выберем какой-то один вектор $\mathfrak{e}^*$ с наименьшим y. Так как сам вектор $\mathfrak{d}$ должен быть целочисленной композицией векторов $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{k-1}, \mathfrak{e}^*$, то число y должно быть обратным $1/e$ к положительному целому e. Если $e = 1$, то $\mathfrak{e}^*$ совпадает с $\mathfrak{d}$. Вектор $\mathfrak{e}^*$ принадлежит $\mathfrak{R}_k$, где наименьшим значением $f(\mathfrak{a})$ является N_k. Но, поскольку $f(\mathfrak{d})$ как одно из чисел

$$2M_1, \ldots, 2M_k$$

наверняка не превосходит $2M_k$, мы заключаем отсюда и (6.4), что

$$f(\mathfrak{e}^*) \leqslant 2M_k, \text{ если } e = 1$$

$$f(\mathfrak{e}^*) \leqslant \frac{2M_k}{e} + \frac{1}{2}(N_1 + \ldots + N_{k-1}) \leqslant M_k + \frac{1}{2}(N_1 + \ldots + N_{k-1}), \text{ если } e \geqslant 2.$$

Следовательно, N_k не может превосходить большее из двух чисел

$$M_k + {}^1/_2 (N_1 + \ldots + N_{k-1}) \text{ и } 2M_k. \tag{6.5}$$

Это позволяет нам установить универсальные неравенства вида

$$N_i \leqslant 2\theta_i M_i. \tag{6.6}$$

Действительно, (6.6) выполняется при $i = 1$ с $\theta_1 = 1$. Как только оно верно для $i = 1, \ldots, k - 1$, оценка (6.5) для N_k дает аналогичное неравенство при $i = k$ с θ_k, являющимся наибольшим из двух чисел

$$1 \text{ и } {}^1/_2 (1 + \theta_1 + \ldots + \theta_{k-1}).$$

Тем самым множители θ_k определяются рекуррентным образом и легко проверяется, что

$$\theta_1 = 1, \ \theta_k = ({}^3/_2)^{k-2} \text{ для } k \geqslant 2,$$

Поэтому из (1.2) вытекает

$$N_1 \ldots N_n V \leqslant 2^n \theta_1 \ldots \theta_n = \mu_n.$$

Было бы интересно выяснить, какова наименьшая константа μ_n, для которой выполняется неравенство (6.2).

Дальнейшее использование метода показывает, что верна следующая

Обобщенная теорема V. *Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — заданные положительные числа, большие или равные* 1. *Если неравенства*

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) \geqslant \frac{1}{q_k} f(\delta_1^k, \ldots, \delta_n^k)$$

выполняются для всех целых $x_1, \ldots, x_n$, для которых $x_k, \ldots, x_n$ не имеют общего множителя $(k = 1, \ldots, n)$, то значения

$$N_k = f(\delta_1{}^k, \ldots, \delta_n{}^k)$$

удовлетворяют соотношениям

$$q_k N_{k+1} \geqslant N_k \quad (k = 1, \ldots, n - 1)$$

и

$$N_1 \ldots N_n V \leqslant 2q_1 \ldots q_n (1 + q_1)^{n-1} (1 + {}^1/_2 q_2)^{n-2} \ldots (1 + {}^1/_2 q_{n-1}).$$

Доказательство практически то же, что и выше. Рекуррентные уравнения для θ_k превратятся теперь в

$$\theta_1 = q_1 \text{ и } 2\theta_k/q_k = 1 + \theta_1 + \ldots + \theta_{k-1} \quad (k \geqslant 2),$$

т. е.

$$2\theta_2/q_2 = 1 + q_1,\ 2\theta_k/q_k + \theta_k = 2\theta_{k+1}/q_{k+1} \quad (k \geqslant 2),$$

а их решением будет

$$\theta_k = {}^1/_2 q_k (1 + q_1)(1 + {}^1/_2 q_2)\ldots(1 + {}^1/_2 q_{k-1}) \quad (k \geqslant 2).$$

7. Вот другое похожее утверждение.

Теорема VI. *Положим*

$$h_\nu = \nu^2 - {}^1/_2 \nu - 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\rho_n = 2^{2\nu - n}(2\nu + 2)(2\nu + 3)\ldots(\nu + n + 1), \text{ для } h_\nu \leqslant n \leqslant h_{\nu+1}.$$

Можно найти такой базис решетки $\mathfrak{e}_1^*, \ldots, \mathfrak{e}_n^*$, *что расстояния* $f(\mathfrak{e}_k^*) = M_n^*$ *удовлетворяют неравенству*

$$M_1^* \ldots M_n^* V \leqslant \rho_n. \quad (7.1)$$

Константа ρ_n гораздо меньше, чем константа из теоремы V. Ее рост в зависимости от n хорошо оценивается из рекуррентной формулы

$$\rho_n = \frac{n + \nu + 1}{2}\rho_{n-1}, \quad \text{если} \quad 1 + h_\nu \leqslant n \leqslant h_{\nu+1},$$

и

$$\rho_n = \frac{(n+\nu)(n+\nu+1)}{2(n+\nu)+1}\rho_{n-1} \quad \text{для нечетных } \nu \text{ и } n = h_\nu + \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Пользуясь рекуррентными соотношениями

$$\mathfrak{e}_k^* = 1/e_k \mathfrak{d}_k + a_{k,k-1}\mathfrak{d}_{k-1} + \ldots + a_{k,1}\mathfrak{d}_1 \quad (7.2)$$

с условиями

$$-\frac{1}{2e_i} < a_{k,i} \leqslant \frac{1}{2e_i} \quad (i < k)$$

(e_k — положительные целые числа), можно построить из векторного базиса $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ базис решетки $\mathfrak{e}_1^*, \ldots, \mathfrak{e}_n^*$. Если $e_k = 1$, то все коэффициенты $a_{k,k-1}, \ldots, a_{k,1}$ исчезают и $f(\mathfrak{e}_k^*) = 2M_k$. Однако если $e_k \geqslant 2$, то

$$M_k^* = f(\mathfrak{e}_k^*) \leqslant \frac{2}{e_k}M_k + \sum_{i=1}^{k-1} M_i/e_i \leqslant \eta_k M_k$$

с

$$\eta_k = \frac{2}{e_k} + \left(\frac{1}{e_{k-1}} + \ldots + \frac{1}{e_1}\right) \quad (e_k \geqslant 2).$$

Чтобы охватить оба случая, положим $\eta_k = 2$ для $e_k = 1$. Из (1.2) тогда получаем

$$M_1^* \ldots M_n^* V \leqslant \eta_1 \ldots \eta_n,$$

и остается рассмотреть произведение $\eta_1 \ldots \eta_n$.

Возьмем

$\delta_k = 2$ или $\delta_k = 1$, если соответственно $e_k = 1$ или $e_k \geqslant 2$;

$$\eta_k' = 2, \text{ если } \delta_k = 2 \text{ и } \eta_k' = \delta_k + {}^1/_2(\delta_{k-1} + \ldots + \delta_1),$$

если $\delta_k = 1$.

Тогда

$$\eta_k \leqslant \eta_k' \text{ и } \eta_1 \ldots \eta_n \leqslant \eta_1' \ldots \eta_n'.$$

Среди 2^n значений произведения

$$\eta_1' \ldots \eta_n', \qquad (7.3)$$

получающихся из 2^n возможных последовательностей $\delta_1, \ldots, \delta_n$ из 1 и 2, нам надлежит найти наибольшее. Перестановка двух следующих друг за другом чисел 1 и 2 из этой последовательности, именно

$$\delta_k = 1, \ \delta_{k+1} = 2 \text{ переходит в } \delta_k = 2, \ \delta_{k+1} = 1$$

(и остальные числа не меняются), влияет лишь на два множителя $\eta_k'\eta_{k+1}'$ в (7.3), превращая их значения

$$[1 + {}^1/_2(\delta_{k-1} + \ldots + \delta_1)]2 \text{ в } 2[2 + {}^1/_2(\delta_{k-1} + \ldots + \delta_1)],$$

и тем самым увеличивая (7.3). Для заданного числа ν всех двоек в последовательности максимум достигается, когда они все стоят сначала ($\delta_1, \ldots, \delta_\nu$). В этом случае (7.3) равняется

$$2^\nu \frac{2\nu+2}{2} \cdot \frac{2\nu+3}{2} \cdots \frac{2\nu+1+\mu}{2} \qquad (\mu = n - \nu),$$

т. е.

$$2^{2\nu-n}(2\nu+2)(2\nu+3)\ldots(\nu+1+n) = w_\nu.$$

Пусть теперь ν пробегает значения $\nu = 0, 1, \ldots, n$. Так как

$$w_\nu = \frac{4(\nu+1+n)}{2\nu(2\nu+1)} w_{\nu-1},$$

то w_ν возрастает ($w_\nu > w_{\nu-1}$ или $w_\nu \geqslant w_{\nu-1}$), пока

$$\nu(2\nu+1) < 2(\nu+1+n) \text{ или } \nu(2\nu+1) \leqslant 2(\nu+1+n),$$

и затем начинает уменьшаться. Тем самым максимум достигается для последнего ν, такого, что $\nu(\nu - {}^1/_2)$ не превосходит $n+1$.

Вот таблица первых значений для ρ_n:

$n=$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7, ...
$\rho_n=$	2,	4,	12,	42,	168,	756,	3960, ...

Оценки сверху, например

$$\rho_n = (n+1)! \text{ или } \rho_n = 2n!,$$

можно получить гораздо легче. Снова встает вопрос наилучшей оценки для ρ_n в неравенстве (7.1).

8. Положительно-определенная *квадратичная форма*

$$f(x) = \Sigma g_{ik} x_i x_k \quad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{8.1}$$

называется *приведенной*, если она удовлетворяет неравенствам

$$f(x) \geqslant g_{kk} \text{ для всех } x \text{ из } \mathfrak{R}_k,\ k = 1, \ldots, n, \tag{8.2}$$

где $\mathfrak{R}_k$ — множества всех точек решетки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, координаты $x_k, \ldots$ $\ldots, x_n$ которых не имеют общего делителя. В то время как для любой положительной формы дискриминанта $D = \det(g_{ik})$

$$g_{11} \cdot \cdot \cdot g_{nn} \geqslant D,$$

для приведенной формы

$$\lambda_n g_{11} \ldots g_{nn} \leqslant D, \qquad \lambda_n = (\omega_n/\mu_n)^2. \tag{8.3}$$

Здесь ω_n обозначает объем единичной n-мерной сферы, который удобнее всего описать рекуррентным соотношением

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2} \text{ и } \omega_0 = 1,\ \omega_1 = 2.$$

В самом деле, если выбрать $\sqrt{f}$ в качестве калибровочной функции, то выпуклое тело $\mathfrak{K} : f < 1$ становится эллипсоидом объема $\omega_n/\sqrt{D}$ (это легко показать с помощью линейного преобразования $f(x)$ в нормальную форму $x_1^2 + \ldots + x_n^2$).

Линейные подстановки S переменных x_i с целочисленными коэффициентами s_{ik} определителя $|s_{ik}| = \pm 1$ (или только определителя 1) образуют группу $\{S\}$. Две квадратичные формы f и S_f, возникающие друг из друга с помощью подстановки группы, называются *эквивалентными*. Каждая положительная форма эквивалентна приведенной форме.

Все квадратичные формы $f = \{g_{ik}\}$ с вещественными коэффициентами $g_{ik} = g_{ki}$ образуют линейное пространство R размерности $N = \frac{1}{2}n(n + 1)$, в котором положительные формы составляют открытую выпуклую область $G \subset R$, а приведенные формы — выпуклое относительно замкнутое подмножество Z в G. Оба множества G и Z суть конусы и поэтому могут рассматриваться как подмножества в $(N - 1)$-мерной сфере лучей пространства R, выходящих из начала координат. Выпуклый конус H — это множество, обладающее тремя свойствами:

(i) $f = 0$ не лежит в H;

(ii) если $f \in H$, то также $tf \in H$, где t — произвольный положительный множитель;

(iii) вместе с f и f' из H сумма $f + f'$ также принадлежит H.

Мы будем действовать целиком внутри G; все топологические термины, применяемые к подконусам области G, будут относиться к G (но не R).

Каждое из неравенств (8.2) для переменных g_i имеет форму

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} g_{ij} \geqslant 0 \tag{8.4}$$

с целыми коэффициентами α_{ij}. Удалим из множества $\mathfrak{Z}$ неравенств (8.2) те неравенства, для которых все коэффициенты α_{ij} исчезают, именно неравенства (8.2) с $x = \pm(\delta_1{}^k, \ldots, \delta_n{}^k)$. Каждое отдельное неравенство (8.4) из $\mathfrak{Z}$ определяет полупространство, ограниченное плоскостью

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} g_{ij} = 0. \tag{8.5}$$

Подстановка S переводит центральную клетку Z в эквивалентную клетку Z_S, которая также выпукла. Эквивалентные клетки покрывают совместно все пространство G. Z_J совпадает с Z для любой из 2^n подстановок

$$J : x_1 \to \pm x_1, \ldots, x_n \to \pm x_n,$$

и S и SJ имеют одинаковое действие на Z.

Из (8.3) Минковский выводит две важные теоремы конечности:

I. *Чтобы определить клетку Z, достаточно конечного числа неравенств из $\mathfrak{Z}$.*

II. *Существует лишь конечное число подстановок S, переводящих какую-либо точку из Z снова в точку из Z* (говоря точнее, условие, вызывающее конечность числа элементов S из $\{S\}$, состоит в том, что существуют две точки $f, f' \in Z$, для которых $f' = Sf$).

Минковский дает прямое алгебраическое доказательство утверждения II в § 7 его работы «Область разрывности для арифметической эквивалентности» [4]. Его доказательство утверждения I более окольно, поскольку он одновременно устанавливает I и неравенство типа (8.3) с помощью сложной индукции. Это затруднение было преодолено в совместной работе Л. Бибербаха и И. Шура [5] (oh tempi passati) [6]. Они усовершенствовали I, разбив его на две теоремы:

I*. *Существует лишь конечное число точек решетки x из $\mathfrak{R}_k$, для которых можно найти приведенную форму $f_0 = \{g_{ij}{}^0\}$, удовлетворяющую уравнению*

$$f_0(x) = g_{kk}{}^0. \tag{8.6}$$

I**. *Если мы последовательно подставим в качестве x каждую из точек, описываемых в теореме* I*, *то соответствующие неравенства*

$$f(x) \geqslant g_{kk}, \tag{8.7}$$

$k = 1, \ldots, n$, полностью замкнуты в клетке Z в G.

В то время как доказательство I*, снова непосредственное и алгебраическое, основано на (8.3), I** опирается на топологическое соображение о том, что прямая, соединяющая точку внутри выпуклой области с точкой вне ее, должна пересечь границу. Я объясню соображение Бибербаха—Шура для I** в упрощенной форме.

Будем говорить, что те точки f (из G), для которых неравенства $\mathfrak{Z}$ выполняются со знаком $>$, не только $\geqslant$, образуют *ядро* клетки Z. Любая диагональ-

[4] J. reine und angew Math., 1905, Bd. 129, S. 220—274; Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1911, Bd. 2, S. 53—100.
[5] S.-Ber. Berlin Akad., 1928, S. 519—523; 1929, S. 508.
[6] О, прошедшие времена.

ная форма

$$g_1x_1^2 + \ldots + g_nx_n^2, \quad 0 < g_1 < g_2 < \ldots < g_n,$$

очевидно, принадлежит ядру Z. Это же верно и для внутренних точек из Z. Я утверждаю, что обратно каждая точка ядра является внутренней точкой в Z. Действительно, если f — положительная форма, U_ε — достаточно малая окрестность f и A — произвольное положительное число, то те точки xx-пространства, для которых $f_\varepsilon(x) \leqslant A$ по крайней мере для одной формы f из U_ε, принадлежат ограниченной области. Поэтому все точки решетки x за конечным числом исключений удовлетворяют неравенствам $f_\varepsilon(x) > A$ для всех f_ε из U_ε. Это легко вытекает из способа Якоби последовательного преобразования формы f_ε к сумме квадратов. Таким образом, имеется такое конечное подмножество $\mathfrak{Z}^0$ в $\mathfrak{Z}$, что каждая форма f_ε из U_ε удовлетворяет всем неравенствам из $\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^0$. Допуская, что неравенства $\mathfrak{Z}^0$ выполняются для f со знаком $>$, можно так сузить окрестность U_ε, что во всей ней будут справедливы неравенства $\mathfrak{Z}^0$. Ввиду упомянутого выше тонологического соображения это доказывает I**.

Пусть снова f_0 — точка границы клетки Z и пусть x пробегает конечное число точек решетки из $\mathfrak{R}_k$, удовлетворяющих (8.6). Рассматривая выпуклый клин, определяемый совместно соответствующими неравенствами (8.7), находим [7], что достаточно тех неравенств $\mathfrak{Z}$, которые выполняются со знаком $=$ для $N-1$ линейно независимых точек f из Z. В то же время без них нельзя обойтись, и соответствующие уравнения описывают $(N-1)$-мерные плоскости, содержащие грани пирамидальной клетки Z в G.

Другой способ построения этих граней состоял бы в нахождении общих границ клетки Z с прилегающими к ней эквивалентными клетками Z_S. Но Z и Z_S имеют общую точку f_0 только в том случае, когда обе точки f_0 и $S^{-1}f_0$ принадлежат Z. Конечность числа плоских граней должна быть поэтому следствием II, так что утверждение I следовало бы выводить из II. Рассмотрим эту ситуацию более аккуратно.

Точку ядра клетки Z перевести снова в точку из Z способны лишь подстановки J. Поэтому две выпуклые клетки Z и Z_S не имеют общих внутренних точек, если S не совпадает ни с одним из J. Общие точки, если они есть, образуют выпуклый конус W в линейном многообразии $N-1$ или... 1 измерений. Если $N-1$ — правильное число измерений, то будем говорить о стенке, отделяющей Z от Z_S. Выберем в качестве формы f_0 внутреннюю точку из W в $(N-1)$-мерной плоскости. Она удовлетворяет одному из неравенств $\mathfrak{Z}$, скажем (8.4), со знаком $=$, в то время как все точки из W удовлетворяют ему со знаком $\geqslant$. Таким образом, вся W лежит, очевидно, в плоскости (8.5), что устанавливает I, *если допустить, что каждая точка f границы клетки Z лежит на стенке, отделяющей Z от прилежащей клетки Z_S*. Мы выведем это из того, важного самого по себе, факта, что эквивалентные клетки могут сгущаться лишь к границе области G.

Более тщательное изучение доказательства Минковского утверждения II показывает, что существует не более конечного числа подстановок S, способ-

[7] Элементарный подход см. в: *Weyl H.*— Comment. math. helv., 1934/35, vol. 7, p. 290—306.

ных перевести точку из Z в точку из $G(\rho, \mu)$. Здесь ρ — произвольное число, большее 1, и μ — любое положительное число. Если D_k обозначает определитель формы $f(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, то подконус $G(\rho, \mu)$ в G задается всеми следующими неравенствами:

$$D_k \geqslant \frac{\lambda_k}{\rho} g_{11} \ldots g_{kk},$$

$$g_{kk} \geqslant \frac{1}{\rho} g_{k-1,\, k-1} \qquad (g_{00} = 0) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0) \geqslant g_{kk} - \mu g_{11},$$

где $x_1, \ldots, x_{k-1}$ — всевозможные целые.

Все точки Z суть *внутренние* точки конуса $G(\rho, \mu)$. Этого более чем достаточно для разрешения нашего вопроса. Выберем определенные $\rho > 1$ и $\mu > 0$. Пусть f — точка границы Z и $f_1, \ldots, f_\nu, \ldots$ — последовательность точек вне Z, сходящаяся к f. Можно считать, что они лежат в $G(\rho, \mu)$. Некоторые подстановки S_ν^{-1} из $\{S\}$ переводят точки f_ν в $f_\nu' = S_\nu^{-1} f_\nu$, лежащие в Z. В силу наших предположений об области $G(\rho, \mu)$ некоторая подстановка S встречается среди S_ν бесконечное число раз. S не совпадает ни с одной из подстановок J. Все точки f_ν соответствующей последовательности лежат в Z_S, как и их предел f. Следовательно, любая точка границы Z принадлежит общей границе Z и эквивалентной клетки Z_S. Область $G(\rho, \mu)$ возрастает с ростом ρ и μ и $\rho \to \infty$, $\mu \to \infty$ исчерпывает все G. На каждом шаге область $G(\rho, \mu)$ имеет общие точки лишь с конечным числом клеток Z_S. Элементарное рассуждение, подобное использованному выше, показывает, что среди общих границ $Z \mid Z_S$ (которых имеется конечное число) встречаются лишь «стенки», т. е. размерности $N-1$. Подстановки S, переводящие Z в клетки Z_S, граничащие с Z вдоль стенки, порождают вместе с подстановками J всю группу $\{S\}$.

Обобщенная теорема V показывает, что все наши утверждения относительно области $G(\rho, \mu)$ остаются верными, если ее определить следующими *линейными* неравенствами:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \frac{1}{\rho} g_{kk},$$

где x_t — целые и $x_k, \ldots, x_n$ не имеют общих делителей,

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant g_{kk} - \mu g_{11},$$

где x_i — целые и $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = (1, 0, \ldots, 0)$. Оценки можно существенно улучшить, если с помощью рассуждений § 6 провести сравнение коэффициентов g_{kk}, g_{kk}' двух эквивалентных форм f, f' соответственно в Z и $G(\rho, \mu)$ не для эллипсоидов, а для произвольных выпуклых тел.

Все время мы изучали Z по отношению к G, и это в действительности наиболее естественная точка зрения. Утверждения I и I** верны тем не менее по отношению ко всему пространству R квадратичных форм. Z не замкнуто в R, и в Z существуют граничные точки f относительно R, не являющиеся положительными формами. Я утверждаю, что для такой формы выполняется уравнение $g_{11} = 0$. Так как форма f неотрицательна, ее можно привести пре-

образованием с вещественными коэффициентами к виду

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \quad (m < n).$$

Используя теоремы Минковского (1.1) для параллелепипедов или же применяя принцип Дирихле распределения $\nu + 1$ объектов по ν ящикам, можно найти точку решетки $x \neq 0$, в которой m линейных форм $\xi_1, \ldots, \xi_m$ меньше по абсолютной величине любого наперед заданного положительного числа ε. Поэтому $g_{11} > 0$ должно противоречить неравенству $f(x) \geqslant g_{11}$, выполняющемуся для всех точек решетки $x \neq 0$, и можно определить Z относительно R неравенствами, описываемыми в I* и I** наряду с $g_{11} \geqslant 0$. Но даже условие $g_{11} \geqslant 0$ становится излишним, если $n \geqslant 2$. Подстановка

$$x_1 = 1, \ x_2 = \pm 1, \ x_3 = \ldots = x_n = 0$$

доставляет неравенство

$$g_{11} \pm 2g_{12} + g_{22} \geqslant g_{22}$$

для любой приведенной формы, т. е. $2 \mid g_{12} \mid \leqslant g_{11}$. То же верно для $g_{13}, \ldots$ $\ldots, g_{1n}$. Следовательно, граничная форма f удовлетворяет даже n уравнениям

$$g_{11} = g_{12} = \ldots = g_{1n} = 0. \qquad (8.8)$$

Тот факт, что клетка Z граничит с плоскостью $g_{11} = 0$ лишь вдоль линейного многообразия (8.8) на n измерений меньше, доказывает наше утверждение.

Исследования Минковского возникли из задачи приведения квадратичных форм. Ввиду некоторых «неожиданных трудностей» вторая часть его книги «Геометрия чисел» никогда не появилась, и он опубликовал свою теорию приведения четырнадцать лет спустя после открытия основной идеи геометрии чисел в строго арифметической форме без единого намека на геометрический подход. На какое же препятствие он натолкнулся? Или, преодолев основные трудности с общим неравенством (1.2), он не заметил простое обстоятельство, приведшее нас к (6.2), или же он был не в состоянии распутать индуктивный узел, которым в его окончательной публикации связывается получение неравенства (6.2) с выбором конечного числа неравенств $\mathfrak{Z}$? Теперь об этом бесполезно размышлять. Но о Минковском можно сказать, что он, как и Саул, отправился на поиски ослиц своего отца, а нашел царство.

Для квадратичных форм имеется простой алгебраический способ вывода (1.2) из (1.1). Минковский описывает его в § 51 «Геометрии чисел», и очень похоже, что это подсказало ему общее неравенство (1.2). Итак, каждое улучшение константы γ_n в неравенстве для положительных форм

$$M^n \leqslant \gamma_n D,$$

где M — минимум значений $f(x)$ во всех точках решетки $x \neq 0$, влечет соответственное улучшение в (1.2), а также для констант μ_n и ρ_n в оценках (6.2), (7.1) для эллипсоидов. Наше значение $\gamma_n = (2^n/\omega_n)^2$ Блихфельдт [8] смог улучшить на множитель

$$(1 + {}^1/_2 n)^2 2^{-n}.$$

---

[8] Trans. Amer. Math. Soc., 1914, vol. 15, p. 227—235; *Remak R.*— Math. Ztschr., 1927, Bd. 26, S. 694—699; *Blichfeldt.*— Math. Ann., 1929, Bd. 101, S. 605—608.

Это ведет к следующему значению для λ_n:

$$1/\lambda_n = 2^n (1 + {}^1/_2 n)^2 \omega_n^{-2} ({}^9/_4)^{{}^1/_2 (n-1)(n-2)}. \quad (8.9)$$

Ремак получил недавно [9] лучшую оценку, которая по существу отличается от (8.9) заменой ${}^9/_4$ на ${}^5/_4$. Однако основное преимущество нашей константы μ_n в (6.2) лежит в ее применимости сразу к всем выпуклым телам.

Теорема VI вместе с улучшенной Блихфельдтом константой γ_n показывает, что любая положительная форма имеет эквивалентную форму f, удовлетворяющую соотношению

$$\lambda_n^* g_{11} \cdot \ldots \cdot g_{nn} \leqslant D,$$

где

$$1/\lambda_n^* = (1 + {}^1/_2 n)^2 2^{-n} \omega_n^{-2} \rho_n^2.$$

Такая оценка лучше всего подходит для доказательства существования лишь конечного числа классов эквивалентных положительных форм с целыми коэффициентами.

[9] Compos. math., 1938, vol. 5, p. 368—391.

МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА*

1. Сведение математики к теории множеств: логический аппарат. Приблизительно в 1870—1895 гг. Дедекиндом, Фреге и Кантором было осуществлено сведение математики к теории множеств. На понятие множества (которому, по существу, эквивалентно понятие функции) имеется две противоположные точки зрения: множество либо рассматривается как набор вещей (Кантор), либо считается синонимом свойства (атрибута, предиката) вещи. В последнем случае «x есть элемент множества γ», символически $x \in \gamma$, не означает ничего иного, кроме того, что «x обладает свойством γ». Свойство «быть красным» или «быть нечетным» несомненно предшествует множеству всех красных тел или множеству всех нечетных чисел. С другой стороны, если относительно мешка с картофелем или кривой, начерченной карандашом на бумаге, ввести свойства «быть в мешке» — для картофелины, или «лежать на прямой» — для точки, то множество (или какая-нибудь более конкретная структура, представляющая множество) является первичным по отношению к свойству. Каково бы ни было эпистемологическое значение этого различия, математик может быть спокоен, поскольку для некоторого свойства γ мы можем говорить о множестве γ всех элементов, обладающих этим свойством, а относительно данного множества — о свойстве «быть элементом γ». Отдавая предпочтение термину «*множество*», а не «*свойство*», математик указывает тем самым на свое стремление считать равнообъемные свойства тождественными; два свойства α и β равнообъемны, если каждый элемент, обладающий свойством α, обладает и свойством β, и *наоборот* (множество — «*объем понятия*», Фреге). Так, если каждое красное тело в мире окажется круглым, и *наоборот*, он отождествит красное и круглое, не взирая на различие их «смыслов».

Свойство π «быть простым» представляется пропозициональной функцией $P(x)$, читаемой «x — простое», с аргументом x, область значений которого описывается понятием «число» (натуральные числа 1, 2, 3, . . . будем просто называть числами, к остальным добавлять прилагательные рациональное, действительное и т. д.) В самом деле, смысл (ложного) высказывания «6 — простое число» требует понимания того, что значит быть простым для *любого* числа x. Следовательно, высказывание $P(6)$ получается из функции $P(x)$ подстановкой $x = 6$. Наряду со свойствами мы должны рассматривать бинарные, тернарные и т. д. отношения, представляемые пропозициональными функциями 2, 3 и т. д. аргументов.

Хотя математику не обязательно слишком заботиться о том, какой язык употреблять — язык множеств или свойств, он не может игнорировать другое различие, иногда смешиваемое с этим: различие между тем, что считается *данным*, и тем, что *строится* из данного повторением и комбинированием

* Mathematics and logic.— Amer. Math. Month., 1946, vol. 53, p. 2—13. Перевод З. А. Кузичевой. Краткий очерк, написанный в качестве предисловия к рецензии на книгу «Философия Бертрана Рассела».

некоторых явно описанных конструктивных процессов. Например, в аксиоматическом построении элементарной геометрии данными считаются три категории объектов: точки, линии (=прямые линии) и плоскости, и несколько отношений между этими объектами, например: «точка *лежит на* плоскости». Более сложные отношения должны быть «определены», т. е. построены логически из этих первичных отношений. В этой интуитивной теории натуральных чисел (арифметике), которая по сути дела является базисом для всей математики, объекты даже и не заданы, а строятся из первого числа 1 повторением некоего процесса, именно прибавления 1, тогда как все арифметические отношения, логически строятся из одного основного отношения, задаваемого следующим образом: $y = x + 1$, «y следует за x». С другой стороны, в феноменологии природы приходится иметь дело не только с категориями объектов, такими как «тела» или «события», но и с категориями свойств, предшествующих всей конструкции, например с континуумом цветовых оттенков.

Логическое построение одних пропозициональных функций из других заключается в повторении и комбинировании нескольких элементарных операций. В их числе — применение логических операторов $\sim$ (не), $\cap$ (и), $\cup$ (или) и двух кванторов $(\exists x)$ «существует x такой, что» и $(\forall x)$ «для всех x». Например, из двух пропозициональных функций $S(x)$, $T(x)$ мы образуем

$$\sim S(x),\ S(x) \cap T(x),\quad S(x) \cup T(x),\quad (\exists x)\, S(x),\ (\forall x)\, S(x).$$

Кванторы имеют в качестве индекса какой-либо аргумент x и «уничтожают» этот аргумент в пропозициональной функции, следующей за квантором, совершенно так же, как при подстановке вместо x некоторого конкретного числа, скажем $x = 6$. Арифметические операции $+$ и $\times$ первоначально применяются к числам, а затем уже переносятся на функции, в то время как процесс интегрирования по переменной x по самой своей сути относится к функции $f(x)$. Точно так же логические операции $\sim$, $\cap$, $\cup$ первоначально имеют дело с высказываниями, тогда как (Эa), $(\forall x)$ относятся к пропозициональным функциям, содержащим переменную x. Оператор $\cup$ является простейшим в том смысле, что истинностное значение (истина или ложь) $a \cup b$ зависит лишь от истинностных значений a и b. То же самое верно относительно $\sim$ и $\cap$. Удобно добавить простейший оператор импликации, для которого я использую гильбертовский символ $\rightarrow$; $a \rightarrow b$ ложно, если a истинно, b ложно, и истинно для трех остающихся комбинаций: a истинно, b истинно; a ложно, b истинно; a ложно, b ложно. «Смысл» арифметических высказываний и пропозициональных функций задается самим их построением.

Вводя свойства чисел, мы предполагаем известным, что понимается под выражением «*любое* число»; мы будем говорить, что должна быть задана *категория* элементов, к которой относится аргумент рассматриваемой пропозициональной функции. Мы допускаем, что эта категория есть замкнутая область существующих самих по себе вещей, или, короче говоря,— *экзистенциальная* область; когда мы спрашиваем относительно какого-нибудь свойства элементов этой категории, *существует* ли элемент со свойством γ, мы надеемся, что, каково бы ни было свойство γ, этот вопрос имеет определенный смысл, и что либо такой элемент существует, либо каждый из элементов категории

обладает противоположным свойством $\sim\gamma$. В теории чисел или элементарной геометрии мы допускаем, что числа или соответственно точки, линии, плоскости образуют экзистенциальные в этом смысле категории. Однако мы рассматриваем только простые индивидуальные свойства и отношения и никогда не рассматриваем ничего похожего на «все возможные свойства чисел». При теоретико-множественном подходе ситуация меняется радикально.

Мы вынуждены рассматривать свойства чисел x как *объекты* ξ нового типа, к которым числа находятся в отношении $x \in \xi$. Высказывание «6 есть простое число» воспринимается теперь как возникшее из бинарного отношения $x \in \xi$ подстановкой 6 вместо x и свойства π «быть простым числом» вместо аргумента ξ. «Связка» $\in$ соответствует глаголу «есть» в словесном выражении «6 есть простое число». Какая-нибудь пропозициональная функция $P(x)$, скажем «x есть простое число», порождает соответствующее свойство $\pi = [x]\,P(x)$ (свойство быть простым числом) такое, что $P(x)$ эквивалентна с $x \in \pi$. Оператор $[x]$, осуществляющий переход от пропозициональной функции к соответствующему свойству или множеству, уничтожает аргумент x. Ради единообразия впредь мы будем писать $\in (x;\ \xi)$ вместо $x \in \xi$. Таким же образом двуместная пропозиционная функция $P(x, y)$ определяет отношение $\pi = [x, y]\,P(x, y)$, а $\in (xy;\ \pi)$ выражает то же самое, что и $P(x, y)$, а именно, что x и y стоят в отношении π.

2. Два примера. Предварим дальнейшие рассуждения двумя типичными примерами, взятыми из дедекиндова теоретико-множественного анализа двух решающих этапов построения математики: рассмотрим его анализ последовательности натуральных чисел (в работе «Что такое числа и для чего они служат?», 1887) и континуума действительных чисел (в работе «Непрерывность и иррациональные числа», 1872). Наш критический взгляд будет острее, если мы употребим терминологию Фреге: будем говорить о свойствах, а не о множествах.

I. Говорят, что свойство α чисел является наследственным, если для любого числа x, обладающего свойством α, следующее за ним число $x + 1$ также обладает этим свойством. Дедекинд дает такое определение: число b меньше, чем a, если *существует* наследственное свойство, такое, что им обладает a и не обладает b.

Здесь не только предполагается, что нам известно, что понимается под термином «*какое-то* свойство», но мы ссылаемся на совокупность всех возможных свойств. Применяя кванторы к свойствам чисел, так же как и к самим числам, совершенно обязательно рассматривать свойства как вторичные объекты, соотнесенные связкой-отношением $\in$ нашим первичным объектам, числам. Наследственность является даже свойством свойств. Для того чтобы быть последовательными, нам надо представлять себе объекты типа 1 (числа), типа 2 (свойства чисел), типа 3, ...и основное отношение $\in (x_n;\ x_{n+1})$, связывающее переменную x_n типа n с переменной x_{n+1} типа $n + 1$. Пусть $\mathbf{I}(\xi)$ означает утверждение о наследственности свойства ξ. Определение этой пропозициональной функции таково:

$$\mathbf{I}(\xi) = (\forall x)\,\{\in(x;\ \xi) \to \in (x + 1,\ \xi)\},$$

здесь ξ пробегает категорию «свойств» (или «множеств») чисел. Дедекиндово же определение для $x < y$ выглядит так:

$$(x < y) = (\exists\xi)\{\mathrm{I}(\xi) \cap \in (y;\ \xi) \cap \sim \in (x;\ \xi)\}.$$

II. Дедекинд, так же как Евдокс более чем за 2000 лет до него, характеризует неотрицательное действительное число α множеством положительных рациональных чисел (дробей) $x > \alpha$. Но для него любое произвольно составленное (не пустое) множество α дробей (удовлетворяющее определенному свойству, а именно: вместе с некоторой дробью b оно содержит дробь, большую чем b) образует соответствующее число α. Это действительное число α есть лишь façon de parler [1] для множества α. Множество α состоит из всех дробей x, удовлетворяющих некоторой пропозициональной функции $A(x)$; $\alpha = [x]\ A(x)$. Пусть $\mathrm{I}(\xi)$ — пропозициональная функция, аргумент ξ которой относится к свойствам дробей. Тогда точная нижняя грань $\gamma = [x]\ C(x)$ множества неотрицательных действительных чисел ξ может быть получена как *объединение* всех множеств ξ, для которых выполнена $\mathrm{I}(\xi)$:

$$C(x) = (\exists\xi)\{\mathrm{I}(\xi) \cap (x \in \xi)\}. \quad (1)$$

Таким способом Дедекинд *доказывает*, что некоторое множество неотрицательных действительных чисел имеет нижнюю границу. Квантор $(\exists\xi)$ снова применяется ко «всем возможным свойствам дробей».

3. С уровнями или без них? Конструктивный и аксиоматический походы. Но давайте остановимся и подумаем, что же нам делать. Свойства дробей строятся комбинированием повторных применений элементарных логических операций $O_1, O_2, \ldots, O_h$. О полученном таким образом свойстве будем говорить, что оно *допускает построение*, или является свойством уровня 1. Тогда $(\exists\xi)$ из определения (1) мы можем интерпретировать как: «существует *допускающее построение* свойство ξ», и это использование квантора законно при условии, что мы предполагаем возможность его применения к натуральным числам. В самом деле, различные способы, которыми образуются конечные последовательности повторением h символов $O_1, \ldots, O_h$, не существенно сложнее возможных конечных последовательностей из одного символа 1. Но свойство $\gamma = [x]\ C(x)$, определенное в (1), по своему смыслу, разумеется, не тождественно ни с одним из свойств уровня 1, так как оно определено в *терминах совокупности всех свойств уровня* 1. Следовательно, оно является свойством более высокого уровня 2. Тем не менее оно может быть *равнообъемно* с некоторым свойством уровня 1, а это в точности то, что утверждает «аксиома сводимости» Рассела. Но если эти свойства построены, то тут не остается места для аксиомы, она превращается в вопрос, который должен решаться на основании построения; а в нашем случае это безнадежное дело. С другой стороны, здание нашего классического анализа рушится, если мы вынуждены допустить различные уровни действительных чисел, такие, что действительное число принадлежит уровню $l + 1$, если оно определено в терминах общности действительных чисел уровня l. Если мы хотим спасти дедекиндово доказатель-

[1] Здесь: способ наименования (*фр.*).

ство, мы должны отказаться от конструктивной точки зрения и предположить, что имеется *данная*, независимая от всякого построения, экзистенциальная категория «свойств» или «объектов второго типа» (среди которых свойства, допускающие построение, составляют лишь малую часть), так что вместо определения (1) выполняется следующая аксиома: для каждого объекта $\mathbf{i}$ третьего типа имеется такой объект γ второго типа, что

$$x \in \gamma \cdot \equiv \cdot (\exists \xi)\{(x \in \xi) \cap (\xi \in \mathbf{i})\}.$$

Аргументы x и ξ относятся здесь к объектам первого и второго типов, а $\equiv$ означает «равнообъемность». Это дерзкая и едва ли не фантастическая аксиома; для нее мало оправдания в реальном мире, в котором мы живем, и нет вообще оправдания в основаниях, на которых наш разум базирует свои конструкции. Вместе с допущением о том, что свойства учреждают экзистенциальную категорию данных объектов, мы от Дедекинда, желавшего *построить* действительные числа из рациональных, возвращаемся к Евдоксу, у которого они были *заданы* точками на линии, и вместо доказательства существования нижней границы на основании определения действительных чисел принимаем это в качестве аксиомы.

Размышляя над истоками антиномий, возникающих на границе общей теории множеств Кантора, Рассел осознал необходимость различия отдельных уровней [1]. Нет сомнения в том, что с помощью той фундаментальной догадки, которую он несколько неопределенно выразил своим принципом порочного круга: «Члены целого не могут быть определены в терминах самого целого», он излечил старую болезнь, но, как показывает пример Дедекинда, почти ценой жизни пациента. Классический анализ, та математика действительных чисел, какую мы знаем и какая применяется в геометрии и физике, просто не приспособлена для континуума действительных чисел с разными уровнями. Своей аксиомой сводимости Рассел отошел от пути логического анализа, совершив тем самым полный разворот от конструктивной к экзистенциально-аксиоматической точке зрения [2]. После упразднения отдельных уровней у него, таким образом, остается еще иерархия типов: исходные объекты, их свойства, свойства этих свойств и т. д. И он полагает, что одно это преградит дорогу известным парадоксам. Однако в полученной системе математика базируется уже не на логике, а на своего рода логическом рае, вселенной довольно-таки сложной структуры, снабженной всей «необходимой обстановкой» и управляемой порядочным числом приводящих все в порядок аксиом замыкания. Побуждения очевидны, но вера в этот непостижимый мир ничуть не меньшее испытание для нас, чем вера в доктрины первых отцов церкви или средневековых философов-схоластов.

---

[2] Мне хорошо известно, что эта оценка не соответствует интерпретации самого Рассела; с течением времени он все более склонялся к тому, чтобы мыслить множества как «логические фикции». «Хотя,— добавляет Гедель,— вполне вероятно, что термин „фикция“, означает не то, что этих вещей непременно не существует, а лишь то, что мы не можем воспринимать их непосредственно». Во 2-м издании 1-го тома «Principia mathematica» Расселом сделана попытка доказать, независимо от аксиомы сводимости, что по крайней мере уровни натуральных чисел могут быть сведены к пяти самым низким. Но, как замечает Гедель, это доказательство не убедительно [2].

4. Вселенная Рассела. Опишем эту структуру несколько более подробно. Заданы несколько первичных категорий элементов, это области значения элементов самых низших типов. В n-местном отношении каждый из n ($n = 1$, или $n = 2$, или $n = 3$ и т. д.) аргументов $x_1, \ldots, x_n$ относится к некоторому «типу» $k_1, \ldots, k_n$; само же отношение имеет тип $k^* = \{k_1, \ldots, k_n\}$, определяемый всеми $k_1, \ldots, k_n$, причем этот тип выше, чем тип любой составляющей. Начертим диаграмму, представляя k^{**} точкой, а $k_1, \ldots, k_n$ расположенным ниже рядом точек, соединенных с k^* отрезками прямых, наподобие генеалогического древа, где k^* изображает какого-либо человека, а $k_1, \ldots, k_n$ — его потомков. Спускаясь от k^* к ее составляющим, а от них — снова к их составляющим, мы получим в итоге «топологическое дерево», каждая *конечная точка* которого ассоциирована с одной из исходных категорий; эта диаграмма описывает тип k^*. Исходным отношением системы является $\in (x_1, \ldots, x_n; x^*)$, где $x_1, \ldots, x_n$ относятся к заданным типам $k_1, \ldots, k_n$, а x^* — к $k^* = \{k_1, \ldots, k_n\}$. Предполагается, что каждому возможному типу элементов (исключая самые низшие, первичные типы) соотнесена своя экзистенциальная категория. Мы упомянули в самом начале, какими исходными данными оперирует аксиоматическая элементарная геометрия или могла бы оперировать феноменология природы; имеющаяся теперь перед нами «вселенная Рассела» U выглядит несравненно богаче.

Приведем несколько наиболее очевидных аксиом, на которых воздвигается эта теория. В этой вселенной $\in (x_1 \ldots x_n; a^*)$ — нормальная форма пропозициональной функции n переменных $x_1, \ldots, x_n$ типов $k_1, \ldots, k_n$. В самом деле, само это отношение является элементом a^* типа $k^* = \{k_1, \ldots, k_n\}$. Отношение тождества ($x = y$) между элементами типа k представляет собой отношение типа $\{k, k\}$, обозначим его через $I = I_k$. Аналогично, пусть $E = E_{k_1, \ldots k_n}$ будет ($n + 1$)-местным отношением с аргументами типов $k_1, \ldots, k_n$, $k^* = \{k_1, \ldots, k_n\}$. Существование этих особых элементов должно быть явно обусловлено:

А к с и о м а 1. Существует элемент $I = I_k$ типа $\{k, k\}$ такой, что отношение $\in (xy; I)$ имеет место тогда и только тогда, когда элементы x и y типа k тождественны. Существует элемент $E = E_{k_1 \ldots k_n}$ типа $K = \{k_1, \ldots, k_n; k^*\}$ такой, что $\in (x_1 \ldots x_n x^*; E)$ равнообъемно с $\in (x_1 \ldots x_n; x^*)$, переменные $x_1, \ldots, x_n$ и x^* изменяются по категориям $k_1, \ldots, k_n$ и $k^* = \{k_1, \ldots, k_n\}$ соответственно.

Составное свойство «красный или круглый» не строится больше из дескриптивных свойств «красный» и «круглый», а принадлежит вместе с ними к категории свойств изначально заданных для всей конструкции. Его существование должно быть гарантировано одной из более простых аксиом замыкания:

А к с и о м а 2. Если даны элементы a^* и b^* типа $* = \{k_1, \ldots, k_n\}$, то существует элемент c^* того же типа такой, что $\in (x_{1 \ldots n}; c^*)$ равнообъемно с

$$\in (x_1 \ldots x_n;\ a^*) \bigcup \in (x_1 \ldots x_n;\ b^*)$$

(каждый x_i пробегает свою категорию k_i).

Подстановку определенного элемента b вместо переменной обеспечивает

А к с и о м а 3. Если даны элемент a^* типа $k^* = \{k_1, \ldots, k_n\}$ и элемент b_n типа k_n, то существует элемент c типа $k = \{k_1, \ldots, k_{n-1}\}$ такой, что

$\in (x_1 \ldots x_{n-1}, c)$ равнообъемно с $\in (x_1 \ldots x_{n-1}, b_n; a^*)$ (если $x_1, \ldots, x_{n-1}$ пробегают категории $k_1, \ldots, k_{n-1}$).

Устранение переменной x_n соответствующим квантором $(\exists x_n)$ превращает отношение a^* типа k^* в отношение a типа k:

Аксиома 4. Если дан элемент a^* типа $k^* = \{k_1, \ldots, k_n\}$, то существует элемент a типа $k = (k_1, \ldots, k_{n-1}\}$ такой, что $\in (x_1 \ldots x_{n-1}; a)$ равнообъемно с $(\exists x_n) \in (x_1 \ldots x_{n-1}\, x_n; a^*)$.

Это лишь несколько типичных аксиом. Они приведены для того, чтобы указать направление. Читатель не должен искать их в «Principia mathematica», выдержанных в ином стиле. Но наша система U осуществляет те же самые идеи, но в форме, которая представляется мне более естественной, к тому же она более приспособлена для сопоставления с системами W и Z, которые мы вскоре обсудим.

Наши аксиомы таким же образом служат основой для дедукции, как, скажем, аксиомы геометрии; вывод проводится на основании такой же логики, на какую полагаются в геометрии или анализе, включая свободное использование «существует» и «все» по отношению к некоторому фиксированному типу из иерархии типов и к элементам соответствующих категорий. В то время как эти категории и основное отношение $\in$ считаются неопределяемыми, логические термины вроде «нет» $\sim$, «если, то» $\rightarrow$, «существует» $(\exists x)$ и т. д. не образуют части аксиоматической системы и их надо воспринимать содержательно: формализм символической логики используется просто для краткости.

Если «*Principia mathematica*» намеревались основать математику на чистой логике, то результат, как мы теперь видим, получился совершенно иной: всеобъемлющая аксиоматическая система мира полностью вытеснила логику. Их подлинную структуру — иерархию типов — нельзя описать, не прибегая к интуитивному понятию итерации. Следовательно, развивать из этой системы теорию натуральных чисел в манере Дедекинда и Фреге — предприятие сомнительное.

5. Конструктивный компромисс. Осознавая в высшей степени трансцендентный характер аксиоматической вселенной, из которой эта система выводит математику, хотелось бы знать, нельзя ли, вопреки всему, остаться верным конструктивной точке зрения, кажется наиболее естественной для математика. Мы признает иерархию типов, но допускаем всего одну категорию исходных объектов, числа и одно основное бинарное отношение между ними, именно: «y следует за x». Все другие отношения разных типов строятся явно, кванторы $(\forall x)$ и $(\exists x)$ применяются к числам и не применяются к аргументам более высоких типов. Не постулируется никаких аксиом. Все, что мы можем получить таким путем, составляет основной уровень, или уровень 1. Над ним можно было бы возвести второй уровень, содержащий отношения, получаемые применением кванторов к совокупности отношений того или иного типа, допускающих построение на первом уровне, и таким же образом совершить переход от второго уровня к третьему и т. д. Получилась бы «разветвленная иерархия» типов и уровней. Но, следуя этому пути, как уже было сказано, мы не придем ни к чему, похожему на наш классический анализ. Надо преодолеть соблазн выйти за пределы первого уровня конструкции; вместо этого попытаемся, насколько

это возможно, расширить область допускающих построений отношений, *расширяя область основных операций*. A priori ясно, что, в противоположность программе Дедекинда—Фреге, в числе этих несводимых принципов должна иметься какая-то разновидность *итерации*.

Начнем опять с самого начала. Пусть $R(x, \xi)$ — двуместная функция с аргументами x, ξ типов k и K соответственно, например отношение «x меньше, чем ξ» для чисел. Тогда можно говорить о свойстве числа «быть меньшим, чем ξ» (или о множестве всех чисел, меньших ξ). Это свойство, очевидно, зависит от ξ. В общем случае можно образовать $[x]\,R(x, \xi) = r^*(\xi)$ — элемент типа $\{k\}$, зависящий от ξ и такой, что $R(x, \xi)$ равнообъемна с $\in (x, r^*(\xi))$. Если, кроме $R(x, \xi)$, у нас есть пропозициональная функция $S(x^*)$ с аргументом типа $k^* = \{k\}$, то мы можем образовать $T(\xi) = S(r^*(\xi))$, или, точнее,

$$T(\xi) = S([x]\,R(x, \xi)).$$

Это *процесс подстановки*, порождающий $T(\xi)$ из $R(x, \xi)$ и $S(x^*)$.

Возьмем теперь частный случай $K = \{k\}$. Тогда аргумент и значение функции $r^*(\xi) = [x]\,R(x, \xi)$ принадлежат одному и тому же типу K, и итерация становится всегда возможной. Поэтому мы следующим образом полной индукцией определим отношение $T(n, \xi)$, аргумент n которого принадлежит исходной категории чисел:

$$T(1, \xi) = S(\xi),$$
$$T(n+1, \xi) = T(n, r^*(\xi)) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Добавляя операцию подстановки и итерации к другим элементарным логическим операциям и не применяя кванторы ни к чему, кроме чисел, как показано в этом примере, автору удалось чисто конструктивно, без всяких аксиом получить значительную часть классического анализа, включающую, например, критерий сходимости бесконечной последовательности действительных чисел Коши [3]. В этой системе итерация играет ту же роль, что и неограниченное применение кванторов в теории множеств. Наша конструкция откровенно демонстрирует следствия логической башни уровней Рассела, которую Дедекинд отверг по недосмотру, а сам Рассел, испугавшись ее следствий, разрушил до основания своей аксиомой сводимости. Принимая во внимание их общий источник, мы видим, что аксиоматическая система U, как она обрисована в разделе 4, и этот конструктивный подход существенно различны. Но и теперь мы твердо верим, что «существует» и «все» имеют смысл применительно к натуральным числам: кроме логики мы полагаемся еще на экзистенциальное кредо и идею итерации.

6. Интуиционистская математика Брауэра. Дальнейшим и существенно более радикальным шагом в направлении чистого конструктивизма является интуиционистская математика [3]. С моей точки зрения, Брауэр, вне всякого сомнения, показал, что нет никакой очевидности, поддерживающей веру в экзистенциальный характер совокупности всех натуральных чисел, и, следо-

[3] Разумеется, теорема о нижней грани неотрицательных действительных чисел не может быть подтверждена.

вательно, безоснователен принцип исключенного третьего в форме: «Либо существует число с данным свойством γ, либо все числа имеют свойство $\sim\gamma$». Первая часть этого предложения в действительности является результатом *абстрагирования* от конкретного утверждения вида: «Так-то и так-то построенное число обладает свойством γ». Вторая его часть — *гипотетическое* предложение общего характера, провозглашающее нечто, *только если*..., т. е. если вам действительно дано какое-то число, вы можете быть уверены, что оно обладает свойством $\sim\gamma$. Последовательность чисел, которая развивается безотносительно к уже достигнутому виду прибавлением очередного числа, является многообразием, распахнутым в бесконечность; она навсегда остается в стадии созидания, а не составляет замкнутую область существующих самих по себе вещей. Подлинный источник всех наших трудностей, включая антиномии,— в том, что мы необдуманно превратили одно в другое; источник более глубинный, чем указанный Расселом принцип порочного круга. Брауэр заставил нас увидеть, как далеко классическая математика, воспитанная на вере в «абсолютность» того, что превышает всякие человеческие возможности осуществления, уходит за пределы утверждений, которые могут претендовать на действительный смысл и истинность, основанные на соображениях наглядности. В соответствии с его точкой зрения и свидетельством истории классическая логика абстрагировалась от математики финитных множеств и их подмножеств. (Термин «финитный» взят здесь в точном смысле, означающем, что элементы такого множества предъявляются явно один за другим.) Полное забвение ограниченности происхождения привело впоследствии к ошибочному представлению о том, что логика — нечто высшее и первичное по отношению ко всей математике и в конечном итоге к неоправданному приложению такой логики к математике бесконечных множеств. Это грехопадение и первородный грех теории множеств, за которые она заслуженно карается антиномиями. Удивительно не то, что эти противоречия возникли, а то, что они проявились столь поздно — на последних ходах игры!

Трактовка Брауэром действительных переменных вполне соответствует интуитивной природе континуума благодаря понятию «свободно становящейся последовательности», т. е. последовательности in statu nascendi (находящейся в состоянии возникновения), в которой члены *свободно выбираются* один за другим, а не определяются некоторым законом, это одна из наиболее привлекательных черт его теории. В целом же математика Брауэра менее проста и гораздо менее мощна, чем наша обычная «экзистенциальная» математика. Именно по этой причине подавляющее большинство математиков не решились следовать его радикальной реформе.

§ 7. Аксиоматика Цермело; множества и классы. Вернемся теперь из экскурсии по радикальному крылу «конструктивистов» к вселенной U с ее иерархией типов. Сможет ли тот, кто однажды вверился экзистенциальному или аксиоматическому подходу, двигаться вперед в этом же направлении и даже стереть все различия типов, выбирая лишь те предосторожности, которые абсолютно необходимы, чтобы избежать известные противоречия? Именно это сделал Цермело в своих «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre» (Исследованиях оснований теории множеств) [4]. Его аксиомы касаются един-

ственной (экзистенциальной) категории объектов, называемых элементами или множествами, и одного исходного отношения $x \in y$ «x есть элемент y». Но он вынужден был отказаться от принципа: любое вполне определенное свойство γ обусловливает такой элемент c, что для любого элемента x, обладающего свойством γ, верно $x \in c$, и наоборот, он использует свойства просто для выделения подмножеств *данного множества*. Отсюда его аксиома выделения: «Если даны любое вполне определенное свойство γ и элемент a, то существует элемент a' такой, что $x \in a'$ тогда и только тогда, когда x есть элемент a и в то же время он обладает свойством γ». Фигурирующее в этой формулировке понятие «вполне определенное» довольно смутно. Но мы знаем, что его можно уточнить, комбинируя повторные применения некоторых элементарных процессов построения. Вместо «x обладает свойством γ» условимся говорить, что x есть элемент класса γ, $x \in \gamma$. Так мы различаем элементы или множества, с одной стороны, и классы — с другой, и формулируем аксиомы в терминах двух неопределяемых категорий объектов — элементов и классов. Как только мы постулируем, что два элемента a и b тождественны, если $x \in a$ и $x \in b$ равнообъемны, и как только каждый элемент a соотнесен классу α всех элементов x, таких, что $x \in a$, мы вправе отождествить a с этим классом α. Тогда *каждый элемент является классом*, и аксиома имеет дело с неопределяемым исходным отношением $x \in \xi$: «элемент x принадлежит классу ξ», которое поглощает введенное Цермело отношение между элементами $x \in y$. Принципы построения свойств заменяются соответствующими аксиомами для классов, например если даны два класса α и β, то существует класс γ такой, что для произвольного элемента x утверждение $(x \in \alpha) \bigcup (x \in \beta)$ равнообъемно с $x \in \gamma$.

Поскольку аксиома выбора может создавать лишь меньшие множества из уже имеющихся, мы нуждаемся в каком-то средстве для того, чтобы двигаться в противоположном направлении. Для этого добавляются две аксиомы, гарантирующие существование множества всех подмножеств данного множества и объединения данного множества множеств. При этом существенно, что эти аксиомы распространяются на множества-элементы и не применяются к классам.

В результате введения классов, осуществленного Френкелем, фон Нейманом, Бернайсом и другими, аксиомы приобретают тот же характер самоочевидности, что и аксиомы, например, геометрии; в эту аксиоматику не проникают теперь из внешнего мира такие общие понятия, как «любое вполне определенное свойство». Полный список аксиом этой системы Z, как мы будем ее обозначать, можно найти на первой странице монографии Гёделя «Consistency of the continuum hypothesis» (Непротиворечивость континуум-гипотезы) [5]. Кантор продвинулся в этом направлении еще в конце прошлого столетия, отмечая различие между «непротиворечивыми классами»-множествами и «противоречивыми классами») [6]. Хорошо известные противоречия предотвращаются здесь не иерархией типов, а исключением противоречивых классов из числа подходящих «множеств», как слишком «больших».

Система, подобная Z, не безупречна потому, что она опирается не на реальное проникновение в причины парадоксов, но лишь наскоро латает дыры в первоначальной концепции Кантора, минимальными средствами, необходимыми для устранения известных противоречий. В самом деле, у нас нет ни-

какого подтверждения непротиворечивости Z, кроме того опытного факта, что из нее до сих пор не получено никакого противоречия. Однако и во вселенной Рассела U мы не в лучшем положении. К тому же система Z имеет по сравнению с U большие преимущества: она существенно проще по структуре и представляется более адекватным базисом для того, с чем действительно имеет дело повседневная математика. Из нее, в частности, может быть выведена (Цермело) «экзистенциальная» теория чисел Дедекинда—Фреге, а Гёделю удалось показать (см. [5]), что сильная форма аксиомы выбора Цермело непротиворечива по отношению к другим аксиомам системы.

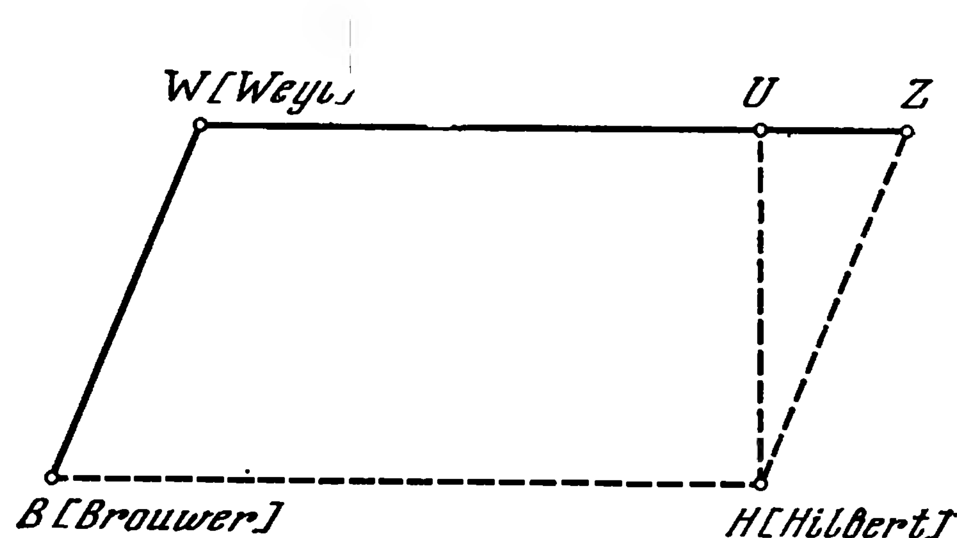
8. **Полная формализация и проблема непротиворечивости. Пессимистические выводы.** Новый исключительно важный период в аксиоматизации математики был начат «Beweistheorie» Гильберта (после 1922 г.) [7]. Гильберт намеревается *доказать* (не истинность, а) *непротиворечивость математики*. Он отчетливо осознает, что с этой целью надо сначала формализовать математику и логику: представить все утверждения формулами, в которые логические операторы $\sim$, $\cap$, $(\exists x)$ и др. входят как неопределяемые символы. Формализованная таким образом логика поглощается математикой [4]. Формулам не приписывается никакого смысла. Математическое доказательство является здесь конкретной последовательностью формул, в которой формула выводится из предшествующих формул в соответствии с определенными правилами, понятными без всякого обращения к смыслу формул,— совершенно так, как при игре в шахматы каждая позиция получается из предыдущей перемещением фигуры, подчиненным вполне определенным правилам. Непротиворечивость, т. е. тот факт, что ни одна партия нашей игры в дедукцию не может окончиться формулой $\sim(1 = 1)$ должна подтверждаться с помощью интуитивно ясного рассуждения о формулах, которое опиралось бы скорее на очевидность, чем на аксиомы, и которое всегда держалось бы в тех рамках очевидности, на которые указал Брауэр. Но в этом размышлении о доказательствах в случае гипотетической последовательности формул, оканчивающейся формулой $\sim(1 = 1)$, наш разум не может не использовать того типа очевидности, которым обусловливается возможность итерации. В аксиоматизации математики Гильберт вынужден действовать более жестко, чем Цермело: обращаясь с аксиомами слишком либерально, он утратил бы все шансы когда-нибудь доказать непротиворечивость; он руководствуется по меньшей мере смутно представляемым планом такого доказательства. Это видно из того, например, что он счел целесообразным различать уровни переменных.

Формулы Гильберта состоят из конкретных символов и имеют конкретную структуру; последовательность, в которой эти символы идут в формуле один за другим, а также их тождественность в одной и той же или разных формулах, должны быть распознаваемы независимо от незначительных изменений в их изображении. Имея дело с такими формулами, мы находимся на том же уровне понимания, каким мы руководствуемся в нашей обыденной жизни при использовании стола, стула или такого инструмента, как молоток. Гильберт усмат-

[4] В этом отношении «Principia mathematica» вполне подготовили почву для Гильберта. Напомню для сравнения другую полностью формализованную систему, именно систему Куайна [8].

ривает в этом наиболее важное дологическое основание математики, фактически, всей науки. Но помимо аксиом математики и интуиции итерации, посредством которых проводится метаматематическое неаксиоматическое рассуждение о математике, в его системе присутствуют и другие внелогические ингредиенты.

Наш краткий обзор можно проиллюстрировать небольшой диаграммой, на которой конструктивная тенденция растет влево, аксиоматическая — вправо, кроме того, указана относительная «глубина» оснований. Фреге, а вслед за ним и Рассел, надеялись 1) развить теорию натуральных чисел на прочном основании, не обращаясь к интуитивной идее бесконечного повторения, и 2) превратить математику в часть логики. Мы видим здесь, что ни одна из рассмотренных систем не подает никаких надежд на осуществление пункта 2) — подчинение математики логике. Базис в U и Z образуют тщательно разработанные системы аксиом; W, B и в меньшей степени U, необходима еще интуитивная идея итерации. Только что речь шла о внелогических основаниях системы Гильберта. Z — единственная система, которая хотя бы в каком-то смысле может претендовать на достижение цели пункта 2). Но даже и в ней теория чисел опирается не на одну только логику, а еще и на в высшей степени неясную систему аксиом (вера в непротиворечивость которой подкрепляется свидетельствами опыта, а не рассуждениями). Защищая математическую индукцию, Пуанкаре показал, что она является необходимым и несводимым к другим инструментом математического рассуждения.



Видимо, все математики вынуждены были бы в конце концов признать, что подход Гильберта может успешно привести к намеченной цели. Первые шаги были вдохновляющими и многообещающими. Но тут Гёдель нанес этой точке зрения сокрушительный удар, от которого она не оправилась до сих пор. Гёдель определенным образом перенумеровал символы, формулы и последовательности формул формализма Гильберта, а затем преобразовал утверждение о непротиворечивости в арифметическое высказывание. Он показал, что это высказывание не может быть ни доказано, ни опровергнуто внутри формализма [9]. Это могло означать лишь две вещи: либо рассуждение, посредством которого получено доказательство непротиворечивости, должно содержать такой довод, который не имеет формального аналога в системе, т. е. нас постигнет неудача в попытке полной формализации математики, либо надо оставить надежду на строго «финитное» доказательство непротиворечивости. И когда Генцен, наконец, добился успеха, доказав непротиворечивость арифметики [10], он действительно нарушил границы финитизма, приняв за очевидный способ рассуждения, существенно опирающийся на «второй числовой класс ординалов» Кантора.

Из этого исторического очерка совершенно ясно одно: мы все менее верим в наличие достаточных оснований логики и математики. Как все и вся в со-

временном мире, мы имеем свой собственный «кризис». И длится он у нас уже около полусотни лет. Извне вряд ли заметно, что он препятствует нашей повседневной работе; однако я, например, должен признаться, что он оставил глубокий след на всем моем математическом творчестве: он вынуждал меня направлять научные интересы в области, считающиеся сравнительно «безопасными», он постоянно охлаждал энтузиазм и решимость, с которыми я принимался за свои научные изыскания. Вероятно, такому опыту причастны и другие математики, которым не безразлично, что означают их усилия в развитии науки в плане всего человеческого существования, исполненного тревог и познания, страданий и творчества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mathematical logic as based on the theory of type.— Amer. J. Math., 1908, vol. 30, p. 228—262; *Rassel B.*, *Whitehead A. N.* Principia mathematica: 3 vol. Cambridge, 1910—1913; 2nd ed. Cambridge, 1935. Vol. 1.
2. *Gödel K.* Russel's mathematical logic.— In: The philosophy of Bertrand Russell, p. 127, 145, 146.
3. Brouwer's thesis Over de grondslagen der wiskunde. 1907 (см.: *Church A.* Bibliography of symbolic logic.— J. Symbol. Log, 1936, vol. 1, p. 121—218).
4. Math. Ann., 1908, Bd. 65, S. 261—281.
5. *Bernays P.*— J. Symbol. Log., 1937, vol. 2, p. 65—77 и приведенные там ссылки.
6. *Cantor G.* Gesammelte Abhandlungen/Red. E. Zermelo. 1932, S. 443—451. (Переписка Кантора и Дедекинда).
7. *Hilbert D.* Collected papers. 1937. Vol. 3; *Hilbert D.*, *Bernays P.*— Grundlag. Math., 1934, Bd. 1; 1939, Bd. 2.
8. Amer. Math. Month., 1937, vol. 44, p. 70—80.
9. Monatsh. Math. Phys., 1931, Bd. 38, S. 173—198.
10. Math. Ann., 1936, Bd. 112, S. 493—565.

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ ДВУМЯ ВИДАМИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ *

Линейному преобразованию n-мерного векторного пространства (матрица порядка $n \times n$ с комплексными элементами $a_{ii'}$) можно сопоставить два вида собственных значений. Во-первых, корни $z = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ характеристического полинома $|zE - A|$ матрицы A (E — единичная матрица), и во-вторых, корни $z = k_1, \ldots, k_n$ характеристического полинома $|zE - K|$ матрицы K, где $K = A^*A$ — эрмитова матрица, получаемая композицией матрицы A и ее эрмитово сопряженной A^*. Числа k_i неотрицательны и естественно сравнить $\lambda_i = |\alpha_i|^2$ с k_i. Если матрица A нормальна, т. е. $A^*A = AA^*$, то эти числа совпадают. В общем случае, однако, это уже неверно. Упорядочим числа k и λ по убыванию:

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n, \quad k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n.$$

Я докажу следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\varphi(\lambda)$ — *возрастающая функция положительного аргумента* λ, $\varphi(\lambda) \geqslant \varphi(\lambda')$ для $\lambda \geqslant \lambda' > 0$, *такая, что функция* $\varphi(e^\xi)$ *выпукла по* ξ *и* $\varphi(0) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \varphi(\lambda) = 0$. *Тогда собственные значения* λ_i *и* k_i, *занумерованные в порядке убывания, удовлетворяют неравенствам*

$$\varphi(\lambda_1) + \ldots + \varphi(\lambda_m) \leqslant \varphi(k_1) + \ldots + \varphi(k_m) \quad (m = 1, 2, \ldots, n); \quad (1)$$

в частности,

$$\lambda_1^s + \ldots + \lambda_m^s \leqslant k_1^s + \ldots + k_m^s \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \quad (2)$$

для любого вещественного показателя $s > 0$.

Хорошо известное рассуждение [1] показывает, что

$$\lambda_1 \leqslant k_1. \quad (3)$$

Действительно, уравнение $Ax = \alpha_1 x$ имеет векторное решение $x = a \neq 0$: $Aa = \alpha_1 a$, $a^*A^* = \bar{\alpha}_1 a^*$; следовательно, $a^*A^*Aa = \bar{\alpha}_1\alpha_1(a^*a)$ или

$$a^*Ka = \lambda_1(a^*a), \quad a^*a > 0.$$

Поскольку всякий вектор удовлетворяет неравенству $x^*Kx \leqslant k_1(x^*x)$, (3) доказано.

Линейное векторное преобразование A индуцирует некоторые линейные преобразования $A^{[1]}, A^{[2]}, A^{[3]}, \ldots, A^{[n]}$ в пространствах кососимметрических тензоров ранга $1, 2, 3, \ldots, n$. Например, преобразование $A^{[3]} = \| a_{JJ'}^{[3]} \|$

---

* Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1949, vol. 35, p. 408—411. Перевод А. Г. Кушниренко.

[1] Обобщение этого неравенства можно найти в работе: *Loewy A.*, *Brauer R.* Über einen Satz für unitäre Matrizen».— Tôhoku Math. J., 1930, vol. 32, p. 44—49 (формула (13), с. 48).

дается формулой

$$a_{JJ'}^{[3]}=\begin{vmatrix} a_{ii'}, & a_{ik'}, & a_{il'} \\ a_{ki'}, & a_{kk'}, & a_{kl'} \\ a_{li'}, & a_{lk'}, & a_{ll'} \end{vmatrix},$$

где J и J' пробегают тройки (i, k, l) и (i', k', l'), удовлетворяющие ограничениям $i<k<l$ и $i'<k'<l'$ соответственно. Применение неравенства (3) к этим матрицам $A^{[1]}$, $A^{[2]}$, . . . дает соотношение

$$\lambda_1 \leqslant k_1, \quad \lambda_1\lambda_2 \leqslant k_1k_2, \ldots, \lambda_1 \ldots \lambda_n \leqslant k_1 \ldots k_n \tag{4}$$

(последнее неравенство можно было бы заменить на равенство). Все, что нужно, будет установлено, как только я докажу следующую лемму:

Лемма. *Пусть* k_i, λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ — *неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m \tag{5}$$

и

$$\lambda_1 \leqslant k_1, \ \lambda_1\lambda_2 \leqslant k_1k_2, \ldots, \lambda_1 \ldots \lambda_m \leqslant k_1 \ldots k_m, \tag{6}$$

тогда

$$\sum_i \varphi(\lambda_i) \leqslant \sum_i \varphi(k_i) \qquad (i=1, \ldots, m) \tag{7}$$

для любой функции φ, *удовлетворяющей ограничениям, описанным в теореме.*

Для двух вещественных чисел α, β $\max(\alpha, \beta) = \alpha$, если $\alpha \geqslant \beta$, и $\max(\alpha, \beta) = \beta$, если $\beta \geqslant \alpha$. Определим функции аргумента $z \geqslant 0$ формулами

$$f(z)=\prod_{i=1}^{m} \max(1, \ k_i z) \ \text{ и } \ g(z)=\prod_{i=1}^{m} \max(1, \lambda_i z),$$

тогда

$$g(z) \leqslant f(z) \ \text{ для } \ z \geqslant 0. \tag{8}$$

Действительно, положим

$$g_i(z) = 1 \text{ для } i = 0 \text{ и } g_i(z) = \lambda_1 \ldots \lambda_i z^i \text{ для } i = 1, \ldots, m.$$

Обозначим через $\{0\}$, $\{1\}$, . . ., $\{m-1\}$, $\{m\}$ интервалы, определяемые неравенствами

$$\lambda_1 z \leqslant 1, \quad \lambda_1 z \geqslant 1 \geqslant \lambda_2 z, \ldots, \lambda_{m-1} z \geqslant 1 \geqslant \lambda_m z, \quad \lambda_m z \geqslant 1.$$

Тогда для z из $\{i\}$ справедливо равенство $g(z) = g_i(z)$. Ввиду (6) $g_i(z) \leqslant f_i(z) \leqslant f(z)$, следовательно, (8) верно в каждом из $m+1$ интервалов.

С помощью некоторой возрастающей функции $\psi(z)$ образуем интеграл Стильтьеса

$$\int_0^\infty \log g(z)\, d\psi(z) = \Sigma_i \varphi(\lambda_i), \tag{9}$$

полагая, что интеграл $\int\limits_0^\infty \log z\, d\psi(z)$ сходится. Здесь

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_0^\infty \log\max(1, \lambda z)\, d\psi(z) = \int\limits_{\lambda z \geqslant 1} \log(\lambda z)\, d\psi(z). \tag{10}$$

Ясно, как из (8) с помощью (9) и соответствующей формулы для $f(z)$ вывести (7).

Положим $\lambda = e^{\xi}$. Если $\varphi(\lambda) = G(\xi)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы, то мы можем ее выразить с помощью неубывающей функции $G'(t)$ в виде

$$G(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} G'(t)\, dt = -\int\limits_{-\infty}^{\xi} (t - \xi)\, dG'(t). \tag{11}$$

(Интегрирование по частям законно, поскольку

$$-t \cdot G'(t) \leqslant 2 \cdot \int\limits_t^{t/2} G'(\tau)\, d\tau$$

сходится к нулю при $t \to -\infty$.) Равенство (11) получается из (10) подстановкой $z = e^{-t}$, $\psi(z) = -G'(t)$.

Неравенства (2), таким образом, доказаны. Наиболее важно последнее из них, $m = n$, которое не зависит от нумерации k_i и λ_i,

$$\lambda_1^s + \ldots + \lambda_n^s \leqslant k_1^s + \ldots + k_n^s. \tag{2$'$}$$

Применение этого неравенства к $A^{[2]}$, $A^{[3]}$ дает новые соотношения

$$\sum_{i_1 < i_2} \lambda_{i_1}^s \lambda_{i_2}^s \leqslant \sum_{i_1 < i_2} k_{i_1}^s k_{i_2}^s, \tag{2$''$}$$

$$\sum_{i_1 < i_2 < i_3} \lambda_{i_1}^s \lambda_{i_2}^s \lambda_{i_3}^s \leqslant \sum_{i_1 < i_2 < i_3} k_{i_1}^s k_{i_2}^s k_{i_3}^s, \tag{2$'''$}$$

где все индексы $i_1, i_2, i_3, \ldots$ меняются от 1 до n. Все эти неравенства можно объединить вместе, сказав, что полином $Q_s(z) = \prod\limits_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i^s(z)$ мажорируется покоэффициентно полиномом $P_s(z) = \prod\limits_{i=1}^{n} (1 + k_i^s z)$. В пределе при $s \to \infty$ мы приходим к соотношениям (4).

Если A — невырожденная матрица, то собственными значениями A^{-1} являются числа α_i^{-1}, а собственные значения $A^{*-1}A^{-1}$ совпадают с собственными значениями $A^*(A^{*-1}A^{-1})A^{*-1} = A^{-1}A^{*-1} = (A^*A)^{-1}$, т. е. совпадают с k_i^{-1}. Следовательно, применение (1) к A^{-1} дает неравенства

$$\sum_{i=m}^{n} \varphi(\lambda_i) \leqslant \sum_{i=m}^{n} \varphi(k_i) \qquad (m = n, \ldots, 1),$$

которые доказывают наш результат для любой *убывающей* функции $\varphi(\lambda)$, такой, что $\varphi(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и такой, что $\varphi(e^{\xi})$ выпукла. Последнее предположение справедливо, в частности, для функции $\varphi(\lambda) = \lambda^s$ с отрицательным показателем s. Это показывает, что для неособой матрицы A неравенство (2′), а также (2″), (2‴), . . . справедливы даже для $s \leqslant 0$.

Наши формулировки и доказательства, исключая последнее замечание, в котором появляется A^{-1}, остаются справедливыми для любого вполне непрерывного линейного оператора A в гильбертовом пространстве, в частности для интегрального оператора с непрерывным ядром.

Довольно давно И. Шур доказал (2′) для $s = 1$ [2]. Недавно С. Чанг показал в своей диссертации [3], что для интегрального оператора из сходимости $\sum_i k_i^s$ следует сходимость $\sum_i \lambda_i^s$. Эти два факта привели меня к гипотезе, что соотношения (2′) справедливы по меньшей мере при $s \leqslant 1$. После того, как у меня появилась простая идея доказательства, я обсуждал ситуацию с К. Л. Зигелем и Дж. фон Нейманом. Их замечания привели к окончательной общей форме, в которой результат представлен здесь [4].

[2] *Schur I.* Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution, mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen.— Math. Ann., 1909, Bd. 66, S. 488—510.

[3] *Chang S. H.* Theory of characteristic values of linear integral equations: Thesis. Cambridge, 1948; also: On the distribution of characteristic values and singular values of L^2 kernels.— Trans. Amer. Math. Soc., 1949.

[4] Во время подготовки этой заметки к печати мне сообщили, что один результат работы: *Karamata J.* Sur une inégalité relative aux fonctions convex.— Publ. math. Univ. Belgrade, 1932, vol. 1, p. 145—148, весьма близок к нашей лемме.

ОСНОВНЫЕ ЧЕРТЫ ФИЗИЧЕСКОГО МИРА. ФОРМА И ЭВОЛЮЦИЯ*

Кит — это рыба, пускающая фонтаны и обладающая горизонтальной лопастью хвоста.

Г. Мелвилл. Моби Дик, гл. XXXII

Жизнь не должна прекращаться; это — прежде всего. Глупо говорить, что тебе нет дела. Тебе есть дело! Это-то и окрыляет твое воображение; воспламеняет твои желания; делает непреклонной твою волю и творит из ничего (Змея — Еве).

Б. Шоу. Назад к Мафусаилу, акт 1

Прощай, прощай! Но, Брачный Гость,
Словам моим поверь!
Тот молится, кто любит всех,
Будь птица то, иль зверь.

Т. Кольридж. Поэма о старом моряке

Откуда это творение появилось:
Может само создало себя, может, нет —
Тот, кто надзирает над этим (миром)
на высшем небе,
Только он знает, или же не знает.

Ригведа, Мандала X, гимн 129 [1]

1. Не удовлетворяясь ответом на вопрос: «Как это устроено?», мы стремимся узнать: «Каким образом это стало тем, что оно есть?» Как только у человека пробуждается сознание и он начинает задумываться о загадках бытия, ему свойственно полагать, что именно *эволюция* прояснит ему суть вещей. Идея эволюции играет ведущую роль уже в мифологии и философской мысли в древние времена. Ту же линию продолжают индийские легенды о Брахме — существующем в себе вечном существе, который раскрывается во всем разнообразии материальных вещей и человеческих душ. Сюда же примыкает и учение неоплатоников об «эманации»; что же касается ранних ионийских философов, то они пытаются объяснить происхождение Вселенной, исходя из более физических оснований. Важнейший шаг к современному представлению о физической эволюции был сделан Эмпедоклом, а затем Лукрецием. Мы не будем здесь детально останавливаться на том, какую форму принимала идея эволюции у Аристотеля (с его противопоставлением возможности и действительности), у Платона и у великих философов нашей эры, начиная с Декарта. Одна из первых в истории генетических научных теорий связана с именем Канта; она касалась происхождения планетарной системы. Еще более общим и умозрительным является представление Шеллинга о самореализации природы, выражающейся в после-

* The main features of the physical world; morphe and evolution.— In: *Weyl H.* Philosophy of mathematics and natural science, Appendix F. Princeton, 1949, p. 285—301. Перевод А. П. Василевича.

довательном переходе от одной формы к другой, который осуществляется, так сказать, с перерывами в развитии, вызванными ограниченностью бесконечной продуктивности природы. То же самое можно сказать об имманентном и вневременном диалектическом процессе Гегеля, согласно которому только область духа служит движителем настоящего исторического развития. К современной концепции естественной эволюции нас подвели Бюффон, Ламарк, Тревиранус и Гёте [2].

Опыт науки, накопленный в ее собственной истории, побуждает нас признать, что идея эволюции — это далеко не самый основной принцип познания мира; она должна скорее завершать исследование природы, чем служить ему отправной точкой. Объяснение феномена следует искать не в его истоках, а в раскрытии внутренне присущего ему закона. Знание законов и внутреннего устройства вещей, безусловно, должно предшествовать попыткам понять или гипотетически реконструировать их генезис. Отсутствие таких знаний привело к тому, что умозаключения о происхождении видов и о филогенезе, выдвинутые дарвинизмом в последние десятилетия XIX в., были в большинстве своем незрелыми. Даже сегодня, несмотря на все новые великие открытия в области генетики, наше знание фактов и законов все еще ни в коей мере не позволяет объяснить ни онтогенетического развития, ни филогенетической эволюции. Без такого основополагающего открытия, как закон гравитации Ньютона, все гипотезы о происхождении планет были бы бесплодными. Только благодаря спектроскопическим исследованиям звезд и использованию достижений современной атомной физики, а также опираясь на окончательно устоявшиеся взгляды относительно расположения звезд во Вселенной (взгляды, подкрепленные анализом огромного числа наблюдений), осмелились астрономы, во-первых, воссоздать картину внутреннего устройства звездной системы, а во-вторых, представить развитие этой системы во времени. Однако и в космогонии все еще остаются нерешенные проблемы.

Ранее, обсуждая процесс формирования понятий и теорий в науке, мы уже показали, что собственно анализу причин предшествует упорядочение и классификация [3]. Возможно, нам следовало бы уделить больше внимания этому предварительному этапу, который все еще играет ведущую роль в биологии, хотя и утратил свое значение в физике. Развернутая природой выставка огромного разнообразия видов растений и животных с самого начала была и постоянно оставалась для биологии стимулом для развития и совершенствования искусства морфологической и таксономической классификации. Эту задачу облегчал тот замечательный факт, что разнообразные виды, сколь бы разными они ни были, в большинстве случаев обнаруживают ясно выделяемые типичные различительные черты. «Типичность» [the typical] может быть трудно объяснимой в терминах каких-то устоявшихся понятий, однако на интуитивном уровне мы вполне можем говорить о ней, как о чем-то вполне определенном — ср., например, как мы идентифицируем людей. Нелегко было бы описать в общих терминах и то, как сам процесс классификации, шаг за шагом, со все возрастающей убедительностью приводит к отделению существенных черт от несущественных. В отдельно взятом экземпляре растения или животного органы различаются своей формой, структурой и функцией. Для иллюстрации своего диэретического процесса последовательного разделения Платон не смог найти луч-

шей аналогии, чем биологическая — рассечение жертвенного животного [4]. Сопоставительная морфология определяет гомологию органов по форме, структуре и функциям. Любой зоолог, независимо от того, какие он приводит логические обоснования, в конце концов без сомнения отнесет кита к млекопитающим, а не к рыбам (противоположного взгляда, впрочем, придерживаются Измаил и китобойцы с «Нантакета» в романе «Моби Дик» Мелвилла — см. гл. XXXII), а некоторые кости черепа высших позвоночных сочтет гомологичными жаберным дугам рыб. Аналогом в физике может служить чисто морфологическая классификация форм кристаллов, встречающихся в природе; здесь мы можем пройти этот путь до конца, так что описание дает уже основу для динамической теории. Пришлось затратить много труда по упорядочению данных спектроскопии, прежде чем смогла появиться квантовая теория спектров и атомов.

Классификация занимается поисками форм четко выделяемых типов, регулярностей в расположении в пространстве или во времени, поисками перманентных структур типа «ruhende Pol in der Erscheinungen Flucht» (точка покоя в последовательности явлений). Раскрывая стоящее в заголовке понятие *формы*, мы перейдем теперь к краткому обзору исходных структур, с которыми имеет дело наука в поисках порядка и законов.

2. Давайте начнем с *абсолютных констант природы*. Современные физические теории, по-видимому, приводят к фундаментальному пониманию двух из них — скорости света (c) и планковского кванта действия (h). Как следует из теории относительности, существует только одна произвольная стандартная единица, входящая в измерение расстояний в четырехмерном мире; скорость света, измеренная таким образом (как отношение двух равных расстояний — одного расстояния «в пространстве» и другого «во времени»), оказывается равной 1. Установленное квантовой теорией универсальное соотношение $U = h\nu$ между энергией U и частотой ν (а также между моментом и волновым числом) дает возможность непосредственно измерять энергию через частоту. В самом деле, то, что представляет основной оператор L динамического закона квантовой механики, можно трактовать либо как частоту, либо как энергию [5]. Таким образом, величина h также становится равной единице.

Более трудный случай представляет собой элементарный электрический заряд e. Все известные элементарные частицы, если они не являются нейтральными, как фотоны и нейтроны, характеризуются, исключая знак, одинаковым зарядом e [6]. Таким образом, мы не можем не принять, что величина e есть еще одна свойственная природе константа, ничуть не менее фундаментальная, чем c или h. Измеренная в «естественных» единицах (при c и h равных 1), сила отталкивания двух электронов как функция расстояния r между ними подчиняется кулоновскому закону обратных квадратов α/r^2. Постоянная α (квадрат e) — чисто безразмерное число, равное примерно 1/137. Полная теория должна в силу чисто математических соображений выводить это число — подобно тому, как геометрия предсказывает, что значение числа π (отношение длины окружности к ее диаметру) равно 3,1415... Что бы ни думал по этому поводу Эддингтон, такой теории до сих пор еще нет.

Первым шагом следовало бы установить, каким образом оказалось, что одна и та же частица с определенным зарядом и массой (одна и та же «сущность») встречается в мире в огромном множестве экземпляров [7]. Классическая физи-

ка считает сохранение заряда и массы следствием тенденции к устойчивости (perseverance), однако она допускает и существование тел произвольного заряда и массы. Эта точка зрения становится неудовлетворительной, коль скоро речь заходит о конкретных зарядах и массах элементарных частиц. Их сохранение должно объясняться скорее *приспособляемостью* [adjustment], чем *устойчивостью*. Направление оси вращения волчка (например, положение земной оси) на самом деле время от времени меняется в силу тенденции к устойчивости, или инерции (мы называем это полем инерционных сил), в то время как направление магнитной стрелки приспосабливается к действию магнитного поля. Если сохранение величины зависит от инерции, то ее начальное значение может быть выбрано произвольным; но, поскольку невозможно полностью исключить возмущения, с течением времени становятся вполне вероятными и отклонения. Однако приспособляемость способствует поддержанию количества на определенном уровне, который не зависит от прошлого опыта и, следовательно, вновь и вновь повторяется после всех возмущений по прошествии тех или иных промежутков времени, как только возникают прежние условия. Жесткие стержни и часы, с помощью которых Эйнштейн измеряет фундаментальную величину ds^2 своей метрической теории гравитационного поля, сохраняют свою длину (и соответственно временной промежуток) потому, что сохраняются заряд e и масса m составляющих элементарных частиц. Систематическая теория идет, однако, в противоположном направлении: она начинает с основной метрической формы и, таким образом, вводит полевую величину, которой в определенной пропорции соответствует длина волны частицы m^{-1} Комптона. (Мы опять-таки используем естественные единицы, в которых c и h равны 1.) Поведение стержней и часов оказывается отдаленным следствием полностью разработанной теории. (В некоторых гипотетических обобщениях эйнштейновской теории гравитации, в метрической теории Вейля и аффинных теориях поля Эддингтона—Эйнштейна эта полевая величина незримо присутствует в виде радиуса кривизны Вселенной и может быть выведена из других положенных в основу полевых величин, но это не отражается существенным образом на описанных только что отношениях.)

Г. Ми и другие пытались модифицировать максвелловские уравнения электромагнитного поля таким образом, чтобы они имели только *одно* или в крайнем случае небольшое число статических сферических симметричных решений. Если бы это удалось, приспособляемость можно было бы объяснить в рамках классической физики поля. Однако до сих пор эта идея никуда не привела. С другой стороны, квантовая теория решает эту загадку, по крайней мере до известной степени, путем квантования уравнений поля — процесса, в результате которого действительно осуществляется переход от одного к неопределенному числу тождественных частиц. Таким образом, тождественность входит в теорию, однако, как и прежде, остается необъясненным существование определенного значения заряда и массы [8].

Если что-нибудь в природе имеет право называться «простейшей и вечной формой бытия», то это электрон — наиболее известная из элементарных частиц. Уже протон обнаруживает признаки более сложной структуры.

Электрон, протон и мезон имеют разные массы. Таким образом, *масса* элементарных частиц, видимо, носит менее изначальный и универсальный харак-

тер, чем их заряд. Заряд находится в таком отношении к электрическому полю, как масса — к гравитационному. Сила притяжения двух электронов составляет в естественных единицах величину ε/r^2, где безразмерное число ε равно примерно 10^{-41}. Оно является еще более загадочным, чем постоянная α. В самом деле, простая математическая теория может привести к числам типа 1/2 или 8π, но чтобы получилось безразмерное число экстравагантного порядка 10^{41}, представить себе трудно! Если объяснять красное смещение в спектральных линиях спиральных туманностей с помощью космологического члена в уравнениях Эйнштейна, то мы придем к величине мирового радиуса порядка 10^{27} см. В замкнутом мире такого размера масса в 10^{55} г, равномерно распределенная по всему пространству, будет находиться в состоянии статического равновесия. Данное количество материи хорошо согласуется с оценками плотности космических туманностей, которые вытекают из результатов наблюдений. Если разделить эту массу на массу электрона (тем самым намеренно проигнорировав все остальные частицы), то мы получим, что число N частиц во Вселенной порядка 10^{81}. Таким образом, мистический числовой фактор $\varepsilon \approx 10^{-41}$ оказывается связанным с этим числом N (которое можно принять как случайное) зависимостью типа $\varepsilon \approx 1/\sqrt{N}$. Если сказанное принять всерьез, то отсюда следует, что сила притяжения двух частиц зависит от величины общей массы Вселенной! Эта идея является не столь уж странной, какой она кажется на первый взгляд. Э. Мах давным-давно попытался представить инерционную массу тела как результирующую всех масс, находящихся во Вселенной. Теория гравитации Эйнштейна не удовлетворяет постулату Маха, хотя последний исторически и сыграл определенную роль в разработке этой теории. Постулат Маха все еще ждет своей теории (не будет ли это статистическая теория гравитации, на которую вроде бы указывает квадратный корень в законе $\varepsilon \approx 1/\sqrt{N}$?). Итак, единственное, что мы можем пока сказать,— это то, что устройство мира зиждется на двух безразмерных числовых величинах α и ε, в тайну которых мы пока не проникли [9].

Атомы представляют собой соединения элементарных частиц. Нейтральный атом содержит весьма устойчивое ядро, вокруг которого вращается Z электронов. Законы движения этой внешней сферы электронов, а также законы соответствующих энергетических уровней полностью вытекают из квантовой теории; в то же время структура ядра с аналогичной степенью детализации пока не раскрыта. Атом остается самим собой до тех пор, пока остается неизменным его ядро, и он меняет свое состояние при переходе какого-нибудь электрона на более высокий или более низкий энергетический уровень. Поскольку ядра состоят из нейтронов и протонов, они могут различаться по величине массы, имея один и тот же заряд. Разделению таких изотопов долго мешало то, что химические свойства элементов определяются главным образом зарядом их ядер. Взаимные превращения атомов происходят либо самопроизвольно (радиоактивный распад), либо вызываются искусственно; они требуют гораздо больших затрат энергии, чем изменения состояний. Существующие несколько типов атомов «предопределяются» естественными законами, из которых они могут быть выведены чисто математическими средствами. По существу это такие же всеобщие и изначальные конфигурации, как и сами элементарные частицы; в них не прослеживается никаких следов эволюции, ведущей от более простых атомов

к более сложным. Тот факт, что в спектре Сириуса превалирует линия кислорода, а спектре Солнца — линия железа, никак не указывает на процесс развития химических элементов, лежащий в основе развития звезд; этот факт объясняется просто большей температурой поверхности Сириуса. То, что верно для атомов, в принципе верно и для *молекул*: их состав и условия существования раз и навсегда регламентируются универсальными законами природы. Однако вероятность мгновенного превращения одного в другое, например одной молекулы кислорода и двух молекул водорода в молекулу воды, зависит от температуры; величина подобных вероятностей определяет скорость реакций. Молекулы, нестабильные при высоких температурах, могут проявлять гораздо большую устойчивость при более низких температурах; таким образом, при постепенном остывании Земли на более поздних этапах ее исторического развития могут возникать молекулы, которых не было на предыдущих этапах. Поскольку гены принадлежат к числу наиболее сложных молекул, такая точка зрения оказывается определенным образом связанной с проблемой происхождения и эволюции жизни на Земле.

В *кристаллах* мы находим впечатляющие макроскопические структуры, которые с очевидностью подчиняются простым и гармоничным законам. Симметрия кристалла обнаруживается не только в его внешней форме, но и в его физических характеристиках. Допустим, что кристаллическое вещество заполняет все пространство. Его макроскопическая симметрия выразится в наличии группы вращений g: физически неразличимыми будут только такие ориентации кристаллов в пространстве, которые переходят одна в другую путем вращения этой группы. Например, свет, который в кристаллической среде распространяется в разных направлениях, в общем, с разной скоростью, будет распространяться с одной и той же скоростью в любых двух направлениях, если они связаны друг с другом вращением группы g. Это верно и для других физических свойств. Для изотропной среды группа g включает все вращения, но для кристалла она состоит лишь из конечного определенного числа вращений, а иногда и вообще из ничего, за исключением тождественного преобразования. Уже на ранних стадиях развития кристаллографической науки из расположения плоскостей поверхности кристаллов был выведен закон рациональных индексов. Он привел к гипотезе о решетчатой атомной структуре кристаллов. Эта гипотеза, объясняющая закон рациональных индексов, сейчас определенно подтвердилась интерференционными картинами Лауэ, которые по существу представляют собой рентгеновские снимки кристаллов. В результате мы знаем, что атомы кристаллизованного химического элемента образуют регулярное множество точек S, т. е. множество, устроенное одинаковым образом вокруг каждой из своих точек. Говоря точнее, в группе движений G, которая переводит S в себя, всегда найдется движение, которое переводит точку из S в любую другую точку из S. Движение в пространстве точек приводит к вращению в векторном пространстве [10]. Таким образом, группа движений G определяет группу g вращений в векторном пространстве: $g = \{G\}$. Если G описывает скрытую атомную структуру (Gestalt), то g выявляет макроскопическую пространственную и физическую формы кристалла. Существуют всего лишь 32 различные группы g, в то время как возможные группы G составляют как бы непрерывную ткань.

Мы можем разложить атомную симметрию, описываемую группой G, на чисто дискретную и чисто непрерывную компоненты. Поскольку эта двойственность (дискретное versus непрерывное) имеет огромное значение для всех морфологических исследований и несомненно связана с различением понятий «внутренняя природа» и «положение» [11], а также с общим противопоставлением фиксированной внутренней структуры и меняющихся внешних условий, представляется уместным более детально описать теоретико-групповой анализ структуры кристаллов.

Переносы, содержащиеся в G, образуют группу L, которая может быть порождена тремя независимыми переносами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Переносы — это векторы, и поэтому L есть параллелепипедная решетка векторов, содержащая все векторы $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ с целыми координатами (x_1, x_2, x_3) относительно базиса $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Переход от одного базиса решетки e к другому e^* и обратный ему переход $e^* \to e$ осуществляется двумя взаимно обратными линейными преобразованиями U и U^{-1} переменных x_1, x_2, x_3 с целыми коэффициентами (унимодулярные подстановки). Группа вращений g оставляет векторную решетку L неизменной. Если выразить эту группу в терминах аффинных координат, «приспособленных к решетке», то она предстанет как группа $\mathfrak{g}$ однородных линейных преобразований с целыми коэффициентами, а G станет группой $\mathfrak{G}$ неоднородных линейных преобразований точечных координат x_1, x_2, x_3, порождающих $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве: $\mathfrak{g} = \{\mathfrak{G}\}$. Учитывая произвольный характер выбора базиса e решетки, две группы $\mathfrak{g}$, получаемые одна из другой унимодулярным преобразованием U, должны считаться эквивалентными. В этом смысле для $\mathfrak{G}$ существует ровно 70 возможностей с точностью до унимодулярной эквивалентности (в то время как у g есть только 32 «ортогонально неэквивалентных» возможности) и, что еще важнее, также конечное число, а именно 230 возможностей для $\mathfrak{G}$. Но что-то же должно обеспечивать возможность непрерывных изменений! В самом деле, заостряя внимание на решетчатой структуре кристалла, мы упустили из виду метрический характер пространства; это надо исправить. Основная метрическая форма пространства т. е. квадрат длины произвольного вектора (x_1, x_2, x_3), есть положительно-определенная квадратичная форма его координат x_1, x_2, x_3 относительно базиса e решетки, форма, остающаяся инвариантной при всех подстановках группы $\mathfrak{g}$. Далее, положительные квадратичные формы, остающиеся инвариантными относительно подстановок из $\mathfrak{g}$, образуют непрерывный пучок [pencil] (довольно элементарной природы), и метрическая основная форма является одним из представителей этого непрерывного многообразия. Таким образом, симметрия кристалла описывается одной дискретной величиной, а именно одной из 230 групп $\mathfrak{G}$ и одним из элементов, который выбирается из непрерывного многообразия — из пучка положительных квадратичных форм, инвариантных относительно $\mathfrak{g} = \{\mathfrak{G}\}$.

Кристаллы, фактически встречающиеся в природе, обнаруживают все возможные типы симметрии, принимая неисчислимое множество различных форм под влиянием факторов окружающей среды. Вспомним хотя бы неповторимые декоративные узоры снежинок, двойниковые образования и т. п.! В настоящее время законы форм кристаллов понимаются в терминах динамики атомов: если одинаковые атомы действуют друг на друга с некоторыми силами, что делает

возможным определенное состояние равновесия для данного атомного ансамбля в целом, то атомы в состоянии равновесия обязательно расположатся в виде правильной (в нашем смысле) системы точек. Природа атомов, образующих кристаллы, определяет, при данных внешних условиях, их метрическое размещение, исследование форм которого все еще оставляет непрерывное множество возможностей. Динамика кристаллической решетки обусловливает физическое поведение кристалла, в частности характер его роста, а это в свою очередь определяет ту специфическую форму, которую кристалл принимает под влиянием факторов окружающей среды.

Видимые характеристики физических объектов обычно являются результатом взаимодействия их внутреннего строения [constitution] и окружающей среды. Находится ли вода, молекулы которой имеют определенное химическое строение, в твердом, жидком или парообразном состоянии — это зависит от температуры. Примеры из кристаллографии, химии и генетики заставляют подозревать, что эта двойственность каким-то образом связана с различием между дискретным и непрерывным. Вот одно из возможных предположений. Для характерного признака кристалла (например, для группы симметрий $\mathfrak{G}$), который по своей природе (в соответствии с принятой теорией) может принимать только дискретные значения, найдется среди этих значений одно такое, которое будет конституирующим; в то же время для признака с непрерывным рядом значений — таким, как «метрика, совместимая с заданной группой $\mathfrak{G}$», конституирующей будет уже область значений (здесь — пучок всех возможных квадратичных форм, инвариантных относительно $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{G}\}$). Индивидуальное стационарное квантовое состояние со своим энергетическим уровнем представляет собой хороший пример конституирующего элемента (несмотря на квантовые скачки, происходящие в результате взаимодействия); но это уже не приложимо к волновому состоянию или, в более общем случае, к статистическому множеству волновых состояний. Температура — *kat' exochen* [первое, что бросается в глаза] из факторов окружающей среды. Я полагаю, что данная проблема в целом недостаточно ясна с теоретико-познавательной точки зрения.

Ни в какой другой области не дала природа такой свободы своему *nisus formativus* [формообразующей силе], как в области *живых организмов*. Из-за того что органическая материя пребывает в коллоидном состоянии, ее формы менее стабильны, чем в неорганическом мире, но эта изменчивость формы сочетается с ее удивительной стойкостью в сохранении своей основной структуры перед лицом различных внешних возмущений. Здесь, как и в случае с молекулами и кристаллами, выдержала экспериментальную проверку описанная выше схема, противопоставляющая постоянную внутреннюю структуру и меняющиеся внешние условия, причем и то, и другое оказывают влияние на внешний вид и развитие; генетика дала нам ясную картину внутренней генетической конституции организмов.

Наконец, в наиболее широком масштабе организацию материи демонстрирует нам *мир звезд*. Наиболее безотлагательным здесь является решение проблемы сгущения вещества, приведшее к появлению отдельных излучающих звезд, плотность которых примерно в 10^{27} раз превышает среднюю плотность вещества во Вселенной. За небольшими исключениями все эти звезды обладают примерно одной и той же массой; отклонения здесь не превышают вариации лю-

дей по размеру в зависимости от возраста. Звезды образуют большие скопления, отделяемые друг от друга огромными промежутками; одним из таких скоплений, куда входит наше Солнце, является Галактика. Определенная часть вещества распылена во Вселенной в виде разреженных газообразных туманностей и облаков. Классификация небесных тел основывается прежде всего на характере излучаемого ими света. Атомная физика по спектроскопическому анализу позволяет получать детальную информацию о внутреннем строении звезд. Один из центральных вопросов — из какого источника горячие звезды пополняют энергию, теряемую в результате излучения,— нас больше не занимает [12]: мы уже были свидетелями того, что человек достиг в использовании энергии атомных превращений для целей разрушения. Наши знания о внутреннем строении звезд и химический анализ метеоритов с определенной вероятностью указывают на то, что различные химические элементы представлены во Вселенной примерно в одной и той же пропорции. Это является одним из аргументов в пользу гипотезы об общем происхождении всех звезд.

Утверждение о том, что естественные законы лежат в основе не только всех более или менее перманентных структур, встречающихся в природе, но также и процессов их развития во времени, следует дополнить замечанием о неизбежности случайных факторов, сопутствующих любому конкретному развитию. В классической физике само исходное состояние рассматривается как случайное. Таким образом, некоторые черты, которые не вытекают из одних только законов природы, можно объяснить «общим происхождением» [13]. Статистическая термодинамика в соединении с квантовой механикой дает возможность более широкого подхода, но в то же время показывает, что случайность отнюдь не является несовместимой с «почти» совершенной макроскопической регулярностью явлений. Эволюция — не основание, но краеугольный камень в здании научного знания. Космогония имеет дело с эволюцией Вселенной, геология — с эволюцией Земли и ее минералов, палеонтология и филогенетика — с эволюцией живых организмов.

3. Подобно тому как черты внешности человека выдают его возраст, так линии спектра, излучаемого звездами, являются индикаторами того, на какой стадии своего развития они находятся; в результате мы имеем возможность с определенной достоверностью описать «жизнь» типичной звезды. В наше время Джеймс Джинс выдвинул основанную на наблюдениях и точных расчетах космогоническую теорию, которая прослеживает эволюцию от медленно вращающегося газового шара и далее через спиралевидную туманность вплоть до скопления звезд типа Галактики. Веком раньше Лаплас предложил свою гипотезу о зарождении и развитии планетарной системы; тот факт, что все планеты вращаются вокруг Солнца в одной плоскости, недвусмысленно указывает на общность их происхождения. Леметр недавно осмелился заглянуть еще глубже в историю Вселенной, чем это сделал Джинс. В его космогонии решающим фактором является сила расширения, выражаемая космологическим членом в уравнениях гравитации Эйнштейна. При численных условиях, принятых Леметром, гравитационное притяжение почти уравновешивает силу расширения, так что на некоторой неустойчивой стадии эволюции случайные локальные вариации плотности приводят к накопляющейся конденсации. По его предположению мир возник в результате радиоактивного распада одного гигантского атома. Подоб-

ные космологии, конечно, во многом носят предварительный гипотетический характер: отметим лишь, что более глубокое изучение основ природы гравитации скорее всего приведет к радикальным изменениям. Однако, принимая во внимание все достижения астрофизики, вряд ли можно сомневаться в том, что выбранный подход в основе своей верен и что нам необходимо обратиться именно к атомной физике в поисках объяснения внутренней структуры звезд и эволюции звездных систем [14].

Из трех видов эволюций, о которых мы говорили выше, наименее гипотетической является эволюция Земли. Эмпирические данные, на которых строится реконструкция земной истории, являются более чем убедительными, а физическая интерпретация относящихся сюда геологических процессов нигде не сталкивается с трудностями принципиального характера.

Глубочайшей загадкой, однако, является *эволюция жизни* на Земле. Идея органической эволюции (зародившаяся задолго до Дарвина) ставится сторонниками дарвинизма в ряд наиболее выдающихся научных достижений нашего времени. Заслуживает ли она этого? Девятнадцатый век, столь слепо преданный евангелию «прогресса», с распростертыми объятиями принял учение, согласно которому общее развитие идет в направлении от простого к сложному, от низших форм к высшим [15]. Мне представляется, однако, что биология открыла факт, более важный, чем существование предка человека в царстве животных, а именно факт глубокой внутренней близости всех живых существ. Построение организма из клеток, основная структура самих клеток и основные процессы, которые в них протекают (такие, как метаболизм, хромосомное удвоение, деление клетки, а также процессы мейоза и оплодотворения, лежащие в основе воспроизводства), — все это одинаково у человека, животного и растения [16]. По фундаментальным чертам своей организации человек составляет одно целое со всеми другими живыми организмами. Однако тщеславно гордясь своей исключительностью, человек обнаруживал, что ему гораздо легче согласиться с точкой зрения, согласно которой он создан «по образу Божьему» («Genesis», 1 : 1), и считать, что он является хозяином Земли, чем склонить голову, признав это глубинное сходство всего живого. «Ehrfurcht vor dem Leben» (Благоговение перед Жизнью) во всех ее формах и проявлениях (Альберт Швейцер); «любовь и вниманье ко всей твари, которую создал и любит Бог» (Кольридж, «Поэма о старом моряке», последнее примечание на полях) есть не что иное, как этическое воплощение этого подобия, а молитва Св. Антония к рыбам — его живое религиозное выражение.

Мы полагаем, что атомы и молекулы, встречающиеся в природе, получают удовлетворительное объяснение, если нам удается вывести их в качестве возможных структур из естественных законов, действующих во все времена. Почему же тогда мы обращаемся к эволюции, когда нам известно, что имеется совокупность генов, которые в составе зигот определяют характерные формы, структуру и функции растений и животных, а также их отдельных органов? Индивидуальному онтогенезу из оплодотворенной яйцеклетки к высоко дифференцированному организму еще можно найти аналогию в неорганической природе, как бы отдаленной она ни казалась, например образование гребня волны в прибое или в геологии возникновение зубчатых горных хребтов. Поставленный нами вопрос по существу касается филогенеза. Прежде чем попытаться ответить на

него, повторим сделанное раньше замечание о том, что стабильность молекул зависит от температуры и других условий окружающей среды и что молекула будет тем лабильнее, чем она сложнее по структуре. Таким образом, неудивительно, что молекулы, составляющие живые организмы, в особенности гены, связаны с определенной эпохой в истории развития Земли и что их появление самым тесным образом связано с собственной эволюцией Земли. Однако этого замечания явно недостаточно для объяснения великой драмы органической эволюции, осуществившей переход от мельчайших шариков желеобразной массы до высших животных с их органами чувств, обладающих поразительной приспособляемостью. Пожалуй, решающим здесь является следующее: когда мы имеем дело со сложными молекулами, включающими порядка миллиона атомов, разнообразие возможных комбинаций атомов существеннейшим образом превышает то, что реально встречается в природе. Комбинации же атомов, которые могут функционировать в качестве генов, вообще чрезвычайно малочисленны и могут быть «найдены» путем отбора, в процессе которого перебираются многие возможности и используются уже завоеванные позиции с целью дальнейшего продвижения вперед. Таким образом, осуществляется медленный переход от более простых структур к более сложным. Но такая постановка проблемы есть не более чем расплывчатое основание для ее решения.

Существование органической эволюции подтверждается данными палеонтологии, эмбриологии, сравнительной анатомии и генетики. Наиболее прямыми являются доказательства, приводимые палеонтологией, но они носят спорадический характер. Эмбриология также дает прямые доказательства, но только об онтогенезе. Например, верно, что наличие сходных жаберных щелей у эмбрионов человека и рыбы подсказывает идею общности их предков, хотя можно было бы принять и более осторожную интерпретацию этого феномена, учитывая представление о том, что сходные генотипы проявляют себя в фенотипах, которые более похожи друг на друга на ранних, а не на более поздних стадиях своего развития. Т. Г. Морган указывал, что онтогенез рогов у оленей заводит филогенез в тупик. Как бы там ни было, учение Геккеля об онтогенезе как о сокращенном повторении филогенеза (его биогенетический закон) стоит на весьма зыбкой почве [17]. Сходство между видами, открытое и проанализированное сравнительной анатомией, необязательно должно интерпретироваться как родство; точно так же систематизация химических соединений, которую мы находим в книгах по органической и неорганической химии, совсем необязательно отражает историческое развитие. Однако мы прибегаем к эволюционной интерпретации, когда осознаем, что большие части системы обнаруживают «древовидное» построение, ветвящееся в одном направлении.

Дарвин еще не располагал данными генетики. Его учение основывается на том факте, что механизм наследственности не исключает случайных вариаций, а также вариаций, вызываемых изменяющейся окружающей средой. Поскольку, несмотря на избыток потомства, от поколения к поколению общее число особей колеблется незначительно, между особями, наделенными теми или иными различными особенностями, должна происходить борьба за существование. Предположив наследственный характер этих особенностей, Дарвин заключает, что такой естественный отбор будет иметь кумулятивное влияние на последующие поколения и будет действовать постоянно, подкрепляя и совершенствуя при-

способляемость животных и растений к окружающей среде и к образу жизни, который они ведут[1]. Одно из основных положений этой теории — наследование фенотипических черт, включая черты, выработанные на протяжении жизни одной особи (Ламарк),— было опровергнуто экспериментами Иоганнсена с чистыми линиями. Изменения в фенотипе, вызванные изменениями внешних условий, исчезают при возникновении прежних условий.

4. Но здесь современная генетика дала подходящую замену: место дарвиновских наследственных непрерывных случайных вариаций заняли рекомбинация и мутация. Мендель и его последователи раскрыли комбинаторную игру, в которую мейоз и сингамия играют с генетической структурой. Из штамма, который не является в полной мере однородным (не представляет собой чистую линию), изоляция и рекомбинация производят новые наследственные вариации. Половые процессы в жизненном цикле организмов имеют важное вспомогательное значение для появления все новых и новых форм. Эмбриональная протоплазма родителей не смешивается; составляющие гены сохраняют свой состав неизменным. В одном отношении эта «наследственность по частям», несомая генами, служит целям эволюции даже лучше, чем смешивающаяся наследственность, о которой говорил Дарвин. Смешивание приводит к тому, что популяция, которая вначале весьма вариабельна, затем будет быстро и неизменно стремиться ко все большей и большей однородности, если только не станут постоянно развиваться новые разновидности — со скоростью, явно несовместимой с частотой наблюдаемых мутаций; наиболее крайние разновидности будут быстро поглощены другими и исчезнут.

Изоляция и рекомбинация являются причиной незатухающего разнообразия в природе, но они одни не могли бы определить эволюцию, если бы не могли мутировать гены и генные структуры. В принципе можно описать, при каких условиях сохраняются виды (в строго комбинаторном смысле). Как только нарушаются эти условия, сразу возникают новые виды. Среди структурных мутаций, изменяющих число генов, особенно важную роль играет удвоение всего хромосомного набора (полиплодия) [18]. Диплоидные зиготы приводят к тетраплоидам, иногда посредством гибридизации (аллополиплодии); в некоторых случаях под воздействием химических агентов, теплового шока или каких-либо других причин в созревающей клетке не осуществляется мейоза (аутополиплодии). Более того, можно ожидать, что гены не только изменяют свое мутантное состояние, но происходит превращение одного гена в другой (точно так же, как атомы не только изменяют свои квантовые состояния, но и превращаются один в другой) или же возникают новые гены [19]. Естественный тетраплоид содержит четыре гомолога каждого вида хромосом, но часто приходится наблюдать, что только две его точки заняты одним и тем же геном — как будто в последовательности тетраплоидных поколений одна из двух тождественных генных пар изменилась, превратившись в совершенно иную. Возможно, что нельзя полностью исключить существование направленных адаптивных мутаций: например, в ответ на случайное адаптивное фенотипическое изменение наблюдается тенденция к возрастанию скорости мутаций, подкрепляющих такое изменение.

---

[1] Увеличение размеров шеи у жирафа, который пытался «достать нежные листочки с вершины деревьев», является классическим примером, который широко обсуждался в то время.

Представление о ненаследственном характере приобретенных признаков основывается на столь веских и разнообразных доказательствах, что вряд ли кому-нибудь придет в голову вносить в него какие-либо уточнения; однако опыты с одноклеточными организмами, размножающимися внеполовым делением, показывают, что указанное представление верно лишь до известного предела. Непрерывное воздействие химическим реактивом на сотню поколений инфузории, затронув вначале протоплазму, а затем ее макронуклеус, в конце концов привело к изменению внутреннего строения микронуклеуса; это изменение наследуется, хотя конечно, не бесконечно: оно прослеживается (с тенденцией к постепенному угасанию) на протяжении примерно 60 последующих поколений.

Даже когда мы знаем причину постоянно появляющихся наследственных вариаций, нам все еще приходится искать объяснения тому удивительному факту, что в результате этих вариаций имеет место не хаос типов, а вполне определенный отбор вариантов, приводящий к появлению четко разграниченных рас, видов и других более высоких таксономических категорий. В самом деле, процесс эволюции имеет два аспекта — развитие разнообразия и одновременно развитие дискретности живого мира (Добжанский). Прежде всего следует понять, каким образом вновь возникающие мутации распространяются в последующих поколениях популяции при определенных допущениях относительно жизнеспособности и спаривания. Мутанты будут различаться по своим адаптивным способностям в зависимости от данных условий внешней среды, и, следовательно, будет происходить естественный отбор. По-видимому, гены образуют генотипические системы, так что приспособительное значение адаптивных способностей имеют скорее системы в целом, чем составляющие их отдельные гены. Выделение рас и биологических видов было бы невозможно без факторов, действующих при изоляции, из которых мы упомянем лишь два самых важных: генетическая изоляция как следствие внутривидового оплодотворения (оплодотворение происходит лишь между гаметами одного и того же или очень близкого вида) и географическая изоляция, вызванная различием в месте обитания.

Эволюцию необязательно связывать с проблемой того, является ли развитие прогрессивным или регрессивным, но если все же попытаться взглянуть на нее с точки зрения этой проблемы, то окажется, что развитие не всегда бывает прогрессивным. Направление развития от аутотрофных форм, требующих для своего существования лишь неорганических соединений и света (зеленые водоросли и некоторые бактерии), и далее через промежуточные этапы, для которых развивалась зависимость от сформированных заранее специфических органических молекул, к последнему этапу, на котором сложились паразитическая специализация вирусов — голых генов, синтезирующих себе подобных из живой протоплазмы хозяина,— все это направление развития может служить иллюстрацией регрессивной эволюции, реально имевшей место в природе.

Наши современные представления о законах наследственности в общем-то не противоречат учению об эволюции и в ограниченных масштабах даже довольно успешно используются для объяснения географического и экологического распространения видов. Но если простому смертному позволительно высказать свое мнение, то мы еще весьма далеки от генетического обоснования про-

цесса эволюции в целом или хотя бы основных его моментов. Открытия палеонтологии вроде бы показывают, что органическая эволюция в течение длительных промежутков времени непрерывно шла в определенных направлениях. Такие «ортогенетические» тенденции могут быть приписаны самой природе протоплазмы. Ученые одного направления считают эти тенденции крайне неадаптивными; по их мнению, «адаптивные последовательности в эволюции накладываются на значительные ортогенетические тенденции, но сохраняют от них полную независимость» (Р. Ф. Григгс). Другие же, подобно Г. Ф. Осборну, полагают, что новые структуры часто возникают как предвосхищение будущей функциональной необходимости и потому говорят об извечном [secular] характере адаптации. Классическим примером этому служат бугорки (cones) на зубах различных позвоночных, которые вначале представляли собой неощутимые выступы и на том этапе эволюции имели весьма сомнительную функциональную необходимость, однако впоследствии развились в характерный признак, играющий важную функциональную роль.

Взгляд на эволюцию в целом обязательно приводит нас к вопросу о происхождении жизни. Данные генетики заставляют рассматривать жизнь как случайный успех в созидательной игре. Причиной начала жизни в истории может служить не какой-то предсказуемый макрофизический или макрохимический процесс, который с определенной естественной неизбежностью возник на некотором этапе эволюции и затем повторялся всякий раз, как возникали соответствующие условия, а молекулярные события, случайно происшедшие однажды и породившие затем снежную лавину путем аутокаталитического размножения (П. Йордан). В качестве сильного аргумента в пользу своего предположения Йордан указывал на «тот факт, что все более или менее сложные молекулы в растениях и животных, особенно протеиновые молекулы, стереохимически отличаются от своих зеркальных отражений». В самом деле, если бы все они произошли независимо — во многих местах и много раз — их левосторонние и правосторонние варианты должны были бы развить примерно одно и то же изобилие форм. Таким образом, оказывается, что в легенде об Адаме и Еве есть доля истины — если не применительно к происхождению человечества то, по крайней мере, применительно к происхождению большинства первоначальных форм жизни.

По предположению Опарина первые самовоспроизводящиеся элементы («протогены») возникли после того, как накопилось большое число органических молекул; указанное накопление шло на продолжительном дожизненном этапе эволюции, на котором эти молекулы имели больше шансов выжить, чем в нынешних условиях, благодаря отсутствию живых организмов с их каталитическими ферментами. Цепь реакций, необходимых для воспроизведения гена, возможно, осуществлялась путем последовательных мутаций в обратном направлении, так что каждый новый шаг предоставлял новые возможности для отбора. В отдаленном прошлом гены, возможно, существовали и воспроизводились в свободном состоянии. Каковы бы ни были достоинства всех этих предположений, мы не можем не сознавать, насколько неразработанной является еще данная область: достаточно попытаться представить себе, каковы были те механизмы поиска (по-видимому, не направленные и не имеющие памяти)

которые в течение геологических эпох смогли создать чудовищно сложные структуры генов и все сложнейшие биохимические процессы, обусловливающие жизнь животных, а также привести к таким чудесам адаптивной дифференциации, как человеческий глаз [20].

Трудно устоять против искушения построить интерпретацию в терминах всеобъемлющего плана эволюции. Один из тезисов, к которому пришел Дж. Виллис в своей книге «The course of evolution» (Процесс эволюции, 1940) гласит: «Процесс эволюции выглядит не полем действия естественного отбора из случайных вариаций тех признаков, которые имеют адаптивное значение. Скорее всего, он осуществляется по определенному закону, который мы пока не понимаем. Этот закон, возможно, начал действовать с момента зарождения жизни, и действие его продолжается поныне в соответствии с некоторым определенным планом».

Даже такой автор, как Джулиан Гексли, презрительно относящийся ко всему, что как-либо связано с телеологией, был вынужден признать: «Биологический процесс, который к настоящему моменту достиг своей кульминации, утвердив превосходство Homo sapiens..., по-видимому, не мог идти ни по какому другому пути, чем по тому, который он прошел; и если нам трудно принять столь категорическое и всеобъемлющее утверждение, то, по крайней мере, мы можем утверждать, что среди реальных живых существ, когда-либо живших или живущих на Земле, никакой другой путь развития не мог бы привести к возникновению речи и образного мышления — черт, которые как раз и обеспечивают биологическое превосходство человека» (Evolution. London, 1942, p. 569).

Независимо от того, насколько разумной является точка зрения, согласно которой организующая сила жизни устанавливает связь между независимыми индивидуальными процессами внутри атомов, не вызывает сомнения, что откуда бы ни возникли *мысль* и побудительная сила *воли*, в особенности в человеке, эта сила жизни направляется чисто духовным миром образов (знаний, идей). Мыслимо ли, что нематериальные факторы типа образов, идей, «созидательных планов» вмешивались в процесс эволюции живого мира в целом? Некоторые биологи отвечают на этот вопрос утвердительно и принимаются детально описывать эти факторы и их действие. Анри Бергсон развил свое философское учение о *évolution créatrice* (творческой эволюции), причем оно как две капли воды похоже на доктрину, выдвинутую Бернардом Шоу со всем блеском его остроумия в пьесе «Back to Methuselah» («Назад к Мафусаилу»). Согласно этому «метабиологическому пятикнижию» окончательная цель эволюции — это вечная жизнь чистого разума, освобожденного от пут материи. Так, Лилит говорит: «Я — Лилит; я привнесла жизнь в водоворот сил и заставила врага моего, материю, покориться живой душе. Но превратив врага жизни в ее раба, я сделала его господином жизни, потому что этим кончается всякое рабство, и теперь я увижу, как раб получит свободу, враг примирится и водоворот станет полным жизни и материя исчезнет» [21]. Ученые в общем-то будут более осторожными. Сейчас дела обстоят таким образом, что утверждение о существовании трансцендентных созидательных сил (идей), является ли оно с философской точки зрения опасным или наоборот желательным, ни в

кой мере не помогает решению актуальных и конкретных проблем биологии. Верно и то, что мы ничего не знаем о них (если не считать того, что сообщает нам Лилит) или по крайней мере знаем не в такой степени, в какой мы знаем мысли и побуждения самих себя и окружающих нас людей, ибо в этом последнем случае у нас всегда существует возможность понимания изнутри [22].

ЛИТЕРАТУРА

Niggli P. Geometrische Kristallographie des Diskontinuums. Leipzig, 1920.
Rinne F. Das feinbauliche Wesen der Materie. B., 1922.
Naef A. Idealistische Morphologie und Phylogenetik. Jena, 1919.
Thompson D'Arcy Wentworth. On growth and form. Cambridge, 1917.
Eddington A. S. New pathways in science. Cambridge, 1935.
Eddington A. S. The expanding universe. Cambridge, 1933.
Eddington A. S. Fundamental theory. Cambridge, 1946.
Robertson H. P. Relativistic cosmology.— Revs. Mod. Phys., 1933, vol. 5, p. 62—90.
Jeans J. H. Astronomy and cosmogony. Cambridge, 1928.
Lemaître G. L'hypothese de l'atome primitif.— Actes Soc. helv. sci. nat., 1945, p. 77—96.
Jennings H. S. Genetic variations in relation to evolution. Princeton, 1935.
Fisher R. A. The genetical theory of natural selection. Oxford, 1930.
Willis J. C. The course of evolution (by differentiation or divergent mutation rather than by selection). Cambridge, 1940.
Dobzhanski Th. Genetics and the origin of species. 2nd. ed. N. Y., 1941.
Oparin A. I. The origin of life. N. Y., 1938.
Bergson H. L'évolution créatrice. P.
Shaw G. B. Back to Methuselah; *Joad C. E. M., Bernal J. D. Inge W. R.* On Shaw's philosophie. Shaw the scientist and Shaw as a theologian.— In: S. Winston G. B. S. 90. L., 1946.
Lecompte du Noüy. Human destiny. N. Y., 1947.
Scheler M. Die Stellung des Menschen im Kosmos. Darmstadt, 1930.
Sherrington Ch. Man on his nature. Cambridge, 1940.
Portmann A. Biologische Fragmente zu einer Lehre vom Menschen. Basel, 1944.

СТАРЫЕ И НОВЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ*

Поскольку этот доклад посвящен памяти Дж. У. Гиббса, позвольте мне начать с чисто математического открытия, которое Гиббс сделал в теории рядов Фурье. Ряды Фурье имеют дело с собственными значениями и собственными функциями старейшей, простейшей и важнейшей из всех задач на собственные значения, а именно задачи о колебаниях струны. При подготовке настоящего доклада автор считал, что от него ожидают рассказа о вещах, с которыми он сталкивался в собственных работах. Вспоминая прошедшие годы, я вижу, что один из вопросов, к которому я возвращался снова и снова,— это теория собственных значений и собственных функций в различных ее аспектах. Случилось так, что как раз в начале моей математической карьеры я написал две статьи о явлении, которое мы сейчас называем явлением Гиббса.

1. Явление Гиббса. Возьмем какую-нибудь несложную периодическую функцию, имеющую разрывы. Например, возьмем функцию $1^0(x)$ периода 2π, равную 0 при $-\pi < x < 0$ и 1 при $0 < x < \pi$. В письме к издателю журнала «Nature», опубликованном 27 апреля 1899 г., Гиббс, исправляя утверждение предыдущего письма, отмечает, что предел графиков частичных сумм $y = 1_n{}^0(x)$ ряда Фурье функции $1^0(x)$ не только включает вертикальный отрезок от точки 0 до точки 1 на оси $x = 0$, но и продолжается по вертикали за указанные пределы до некоторого места. А. А. Михельсон начал дискуссию в «Nature», критикуя способ, с помощью которого математики описывали предел последовательности этих частичных сумм. Он настаивал на добавлении к двум горизонтальным частям еще и вертикального участка. Ныне в понятии равномерной сходимости мы видим инструмент наиболее адекватного анализа ситуации. Введем функцию

$$\operatorname{Si}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi$$

и рассмотрим какой-нибудь отрезок I, внутри которого лежит только одна точка разрыва, скажем $x = 0$. Например, возьмем $I = [-\pi/2;\ \pi/2]$. Разумеется неверно, что разность между $1^0(x)$ и частичной суммой $1_n{}^0(x)$ равномерно сходится к нулю на I, но разность $1_n{}^0(x) - \operatorname{Si}(nx)$ сходится к нулю равномерно. Таким образом, график функции $1_n{}^0(x)$ при больших n похож на график осциллирующей функции $\operatorname{Si}(x)$, сжатый в n раз в направлении оси x.

Вместо непосредственного суммирования, можно применять к бесконечным рядам, в частности к рядам Фурье, другие методы суммирования. Я здесь упо-

* Ramifications old and new, of the eigenvalue problem.— Bull. Amer. Math. Soc., 1950, vol. 56, p. 115—139. Перевод А. Г. Кушниренко. Двадцать вторая Гиббсовская лекция, прочитанная в Колумбусе, штат Огайо, 28 декабря 1948 г. на встрече, организованной Американским математическим обществом.

мяну только один из них. Член с номером n ряда Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ умножается на $e^{-n^2 t}$ и затем положительный параметр t (время) в получившейся сумме $\sum\limits_n a_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ устремляется к нулю. Поскольку эта сумма является решением уравнения теплопроводности

$$\partial^2 u/\partial x^2 - \partial u/\partial t = 0,$$

я называю этот метод суммирования методом теплопроводности. Явление Гиббса для этого метода суммирования описывается функцией

$$\mathrm{Er}(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

в том же смысле, в каком непосредственное суммирование описывается функци ей $\mathrm{Si}(x)$. Это немедленно вытекает из того факта, что функция $\mathrm{Er}\,(x/2t^{1/2})$ является решением, хотя и не периодическим, уравнения теплопроводности.

В упомянутых выше двух статьях [1] [1] я изучал явление Гиббса для методов суммирования некоторого общего вида. Меня в основном интересовал простейший двумерный случай задачи о собственных функциях, а именно разложение Лапласа функции на сфере в ряд по сферическим гармоникам. Ничего нового не происходит, когда функция терпит разрыв вдоль гладкой кривой с непрерывной касательной. Но в окрестности точки, где кривая разрыва имеет излом, появляется весьма впечатляющий гористый ландшафт. Мое внимание привлекла и одна специфически одномерная задача. Рассмотрим металлическое кольцо, состоящее из двух половин, имеющие различные коэффициенты теплопроводности α и β. Нормируем их условием $\alpha + \beta = 1$. Пусть в момент времени $t = 0$ одна половина имеет температуру 0°, а другая нагрета до температуры 100°. Каково будет распределение температуры с течением времени? Решение может быть легко выражено с помощью функции Er, поэтому мы приходим к явлению Гиббса, суммируя разложение по собственным функциям методом теплопроводности. Явление Гиббса для прямого суммирования представляет собой более тонкий вопрос, ибо распределение собственных значений зависит от арифметических свойств чисел α и β. Только в случае когда α и β рациональны, задача может быть решена до конца совершенно прямым вычислением (A). Результат можно распространить на произвольное иррациональное α, допускающее аппроксимацию последовательностью дробей a_n/c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ такую, что

$$n\,(\alpha - a_n/c_n) \to 0, \qquad c_n/n \to 0 \text{ для } n \to \infty.$$

Достаточно просто показывается, что такая аппроксимация всегда может быть построена, и это дает явление Гиббса для произвольных коэффициентов теплопроводности α и β. Наша лемма о диофантовой аппроксимации доказывает одновременно и равномерное распределение последовательности $n\alpha \bmod 1$ для любого иррационального числа α.

---

[1] Цифры в квадратных скобках отсылают читателя к библиографии к статье, а буквы (A), (B)...— к замечаниям, помещенным в конце настоящей статьи (в лекции, прочитанной на встрече в Колумбусе, этих замечаний не было).

Когда некоторое время спустя Феликс Бернштейн ознакомил меня с задачей о среднем движении в лагранжевой линейной теории возмущений планетной системы и одна задача Боля оказалась связанной с задачей равномерного распределения по модулю 1, я вспомнил о своих исследованиях и попытался решить вопрос о равномерном распределении в более общей форме [2]. Это дает пример ситуации, когда опыт из одной области математики может оказаться полезным в совершенно другой области. Главным образом из-за этого примера я упомянул здесь мои ранние работы, в которых я примерно сорок лет назад весьма скромным образом отдал дань уважения гению Гиббса. Именно ряды Фурье послужили основой того аналитического метода, который мне удалось применить к общему вопросу о том, является ли данная последовательность вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots$ равномерно распределенной по модулю 1. Такая равномерная распределенность может быть переформулирована как утверждение, относящееся к среднему значению произвольной интегрируемой по Риману периодической с периодом 1 функции $l(x)$ относительно последовательности значений аргумента $x = \xi_1, \xi_2, \ldots$. Суть метода состоит в том, что утверждение о среднем значении достаточно проверить для весьма специальных периодических функций $e^{2\pi nix}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

2. Предельный круг и предельная точка. Как известно, ряды Фурье были обобщены Штурмом и Лиувиллем так, чтобы охватывать собственные значения λ и собственные функции $\varphi(s)$ самосопряженного дифференциального уравнения

$$L_\lambda(\varphi) \equiv \left\{\frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{d\varphi}{ds}\right) - q(s)\varphi(s)\right\} + \lambda\varphi(s) = 0, \tag{1}$$

подчиненные вещественному линейному граничному условию на обоих концах отрезка $0 \leqslant s \leqslant l$. Коэффициенты $p(s) > 0$ и $q(s)$ предполагаются вещественными функциями, непрерывными на этом отрезке. Обозначим $p(s)d\varphi/ds$ через φ'. Вещественное линейное граничное условие для $s = l$ имеет вид

$$\varphi'(l) - h\cdot\varphi(l) = 0 \tag{2}$$

для некоторой вещественной константы h (не исключается и случай $h = \infty$). Для решения φ уравнения $L_\lambda(\varphi) = 0$ и решения φ_* уравнения $L_{\lambda_*}(\varphi_*) = 0$ мы имеем простую формулу Грина

$$[\varphi\varphi_*' - \varphi_*\varphi']_0^l = (\lambda - \lambda_*)\int_0^l \varphi\varphi_*\, ds. \tag{3}$$

Эта формула показывает, что собственные функции φ, φ_*, отвечающие двум различным собственным значениям λ, λ_* всегда ортогональны, т. е. $\int_0^l \varphi\varphi_*\, ds = 0$. Взяв $\lambda_* = \bar{\lambda}$, $\varphi_* = \bar{\varphi}$, мы находим, что для не вещественного λ функция $\varphi(s)$ не может удовлетворять вещественному граничному условию в обоих концах отрезка, не обращаясь тождественно в нуль, в противном случае мы получили

бы $\int\limits_0^l \varphi\bar{\varphi}\, ds = 0$. В этом рассуждении существен положительно-определенный характер интегрируемого выражения $\varphi\bar{\varphi}$.

Спектр собственных значений будет дискретным, если дифференциальное уравнение регулярно в обоих концах, т. е. если $p(s)$ и $q(s)$ непрерывны и $p(s)$ строго положительна на отрезке $0 \leqslant s \leqslant l$. Сделаем это предположение только на полуоткрытом интервале $0 \leqslant s < l$, тогда конец $s = 0$ останется регулярным, но конец $s = l$ может стать сингулярным. Отодвинем сингулярный конец в точку $s = +\infty$. В этом случае можно предполагать, что наряду с точечным спектром появится непрерывный. Более того, кажется, что иногда в сингулярном конце граничные условия нужны, подобно тому, как они нужны в регулярном, а иногда нет.

Самый первый результат, при помощи которого я добавил свою лепту в собрание математических знаний, состоял в прояснении имеющихся здесь возможностей [3]. Поскольку нельзя ручаться, что спектр не покроет всю вещественную λ-ось, у меня возникла простая идея (не столь тривиальная для тех времен) определить функцию Грина $G(s;\, t)$ не только для $\lambda = 0$ или для всех вещественных λ, но и для λ, лежащих в верхней полуплоскости, например для $\lambda = i$. Обозначим через $\eta(s)$ и $\theta(s)$ два решения $\varphi(s) = \varphi(s;\, \lambda)$ уравнения (1), определенные начальными условиями

$$\eta(0) = 1, \quad \eta'(0) = 0 \text{ и } \theta(0) = 0, \quad \theta'(0) = 1$$

соответственно, и рассмотрим затем решение

$$\varphi(s) = w \cdot \eta(s) - \theta(s), \tag{4}$$

получающееся их линейной комбинацией, в которой участвует произвольная константа w. Возникает естественный вопрос, для каких значений w это решение $\varphi(s)$ удовлетворяет вещественному линейному граничному условию (2) в точке $s = l$. Ответ таков: для всех w, лежащих в некоторой окружности C_l комплексной w-плоскости. Действительно, условие (2) дает

$$(w\eta' - \theta') - h(w\eta - \theta) = 0 \text{ для } s = l$$

или

$$w = \frac{\theta'(l) - h\theta(l)}{\eta'(l) - h\eta(l)},$$

и это дробно-линейное преобразование, или преобразование Мебиуса $h \underset{l}{\rightarrow} w$, отображает вещественную h-ось на некоторую окружность в w-плоскости. Здесь λ — некоторое заданное значение в верхней полуплоскости. Сравним теперь два такие значения λ и λ_0. Пусть обозначения $\varphi(s) = \varphi(s;\, l)$, η, θ и т. д. относятся к величинам, построенным по λ, а φ_0, η_0, θ_0 и т. д. — к величинам, построенным по λ_0. Выбрав некоторую точку w^0 на окружности $C_l^0 = C_l(\lambda_0)$, мы фиксируем коэффициент h в вещественном граничном условии (2). Ясно, что точка $w = w(\lambda)$ на окружности $C_l = C_l(\lambda)$, для которой решение (4) удовлетворяет тому же граничному условию, что и решение $\varphi_0 = w^0 \cdot \eta_0 - \theta_0$ в точке $s = l$, получается из w^0 с помощью некоторого преобразования Мебиуса

$w^0 \to w$. Точки w^0 и w на $C_l{}^0$ и C_l, связанные таким образом, могут быть названы гомологичными точками.

Теперь мы рассмотрим задачу переформулировки этих очевидных ответов при переходе к пределу при $l \to \infty$. Для этого нам придется прежде всего дать новые формы определений окружности C_l и гомологичных точек на $C_l(\lambda_0)$ и $C_l(\lambda)$. Эти новые формы кажутся более сложными, но в действительности они более поучительны. Положим в (3) $\lambda_* = \bar{\lambda}$ и $\varphi_* = \bar{\varphi}$:

$$[\varphi\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}\varphi']_0{}^l = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^l \varphi\bar{\varphi}\, ds.$$

С учетом этого тождества выполнение для φ вещественного линейного граничного условия $\varphi\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}\varphi' = 0$ в точке $s = l$ эквивалентно соотношению

$$\mathcal{J}\lambda \int_0^l \varphi\bar{\varphi}\, ds = \mathcal{J}w \quad \text{для} \quad \varphi = w\eta - \theta.$$

А это соотношение определяет не что иное, как окружность C_l в верхней полуплоскости w-плоскости. Круг, ограниченный окружностью C_l (мы будем обозначать его снова через C_l), определяется неравенством

$$\int_0^l \varphi\bar{\varphi}\, ds \leqslant \mathcal{J}w/\mathcal{J}\lambda.$$

Отсюда сразу видно, что при $l' > l$ круг $C_{l'}$ лежит внутри круга C_l. Следовательно, при $l \to \infty$ C_l стремится либо к предельному кругу, либо к предельной точке $C = C(\lambda)$. Эта альтернатива — предельный круг или предельная точка, очевидно, является корректной переформулировкой вопроса о том, следует или нет налагать граничное условие при $s = \infty$.

Теперь мы переходим к описанию отображения Мебиуса $w^\circ \to w$ круга $C_l{}^0$ на C_l в форме, удобной для перехода к пределу при $l \to \infty$. Возьмем точку w^0 на $C_l{}^0 = C_l(\lambda_0)$ и положим

$$\varphi_0(s) = \varphi(s;\ \lambda_0) = w^0 \cdot \eta(s;\ \lambda_0) - \theta(s;\ \lambda_0). \tag{5}$$

Решение

$$\varphi(s) = \varphi(s;\ \lambda) = w \cdot \eta(s;\ \lambda) - \theta(s;\ \lambda), \tag{6}$$

удовлетворяющее на конце $s = l$ тому же вещественному линейному граничному условию, что и $\varphi_0(-s)$, получается из $\varphi_0(s)$ с помощью линейного интегрального уравнения

$$\varphi_0(s) = \varphi(s) - (\lambda - \lambda_0) \int_0^l G^0(s, t) \cdot \varphi(t)\, dt$$

с ядром $G^0(s, t)$, представляющим собою функцию Грина для λ_0:

$$G^0(s, t) = \begin{cases} \varphi_0(s) \cdot \eta_0(t) & (t \leqslant s), \\ \eta_0(s) \cdot \varphi_0(t) & (s \leqslant t). \end{cases}$$

Из формулы (4) мы получаем, что начальным значением $\varphi(s)$ при $s = 0$ служит $w = w(\lambda)$. Этот способ действий сразу проходит при $l \to \infty$. Нужно просто заменить в нашем интегральном уравнении интегрирование от 0 до l на интегрирование от 0 до ∞. Разумеется, мы предполагаем, что множитель w^0 в (5) лежит на C^0 (независимо от того, настоящий ли это круг или выродившийся в точку). Пытаясь решить простейшим способом полученное интегральное уравнение, а именно с помощью ряда Неймана, мы находим непосредственными оценками, что этот ряд сходится в круге в λ-плоскости, окружающем λ_0 и касающемся вещественной оси. Следовательно, аналитическое продолжение не встречает препятствий и $\varphi(0; \lambda) = w(\lambda)$ является регулярной аналитической функцией во всей верхней половине λ-плоскости. Этот метод работает и для случая предельного круга и для случая предельной точки. В последнем случае w^0 является предельной точкой, *соответствующей* λ_0, и конструкция дает предельную точку $w = w(\lambda)$, *соответствующую* λ. Будет ли особый конец $s = \infty$ точкой типа предельного круга или предельной точки, не зависит от выбора λ в верхней полуплоскости. В случае предельного круга легко видеть, что предельное отображение $w^0 \to w = w(\lambda)$ круга C^0 на C является отображением Мебиуса, коэффициенты которого аналитически зависят от λ при $\mathcal{J}\lambda > 0$.

Заменив дифференциальное уравнение (1) соответствующим разностным уравнением, мы придем к прозрачной формулировке теории Стильтьеса непрерывных дробей и проблемы моментов. Она изучалась Е. Хеллингером [4]. Его метод аналогичен тому, который был намечен здесь для дифференциальных уравнений. Проблема моментов является очень специальным предельным случаем одной интерполяционной проблемы в теории аналитических функций $w = w(\lambda)$ комплексного переменного λ. Впервые эта интерполяционная проблема изучалась Г. Пиком и Р. Неванлиной в [5] и относится к аналитическим функциям $w(\lambda)$, определенным в верхней половине λ-плоскости, $\mathcal{J}\lambda > 0$, и принимающим значения с положительной мнимой частью. Временно назовем такие функции положительными. Сколь полно определяется такая функция, если заданы ее значения $w(\alpha_n)$ на некоторой последовательности точек $\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ верхней полуплоскости? Дифференциальная задача, соответствующая этой интерполяционной или разностной задаче, может быть сформулирована в виде системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций φ, φ', зависящих дробно-линейно от спектрального параметра λ

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\lambda a_1(s) - b_1(s)}{\lambda a(s) - b(s)} \cdot \varphi'(s), \qquad \frac{d\varphi'}{ds} = \frac{\lambda a_2(s) - b_2(s)}{\lambda a(s) - b(s)} \cdot \varphi(s). \qquad (S_\lambda')$$

Входящие сюда коэффициенты вещественны и удовлетворяют неравенствам

$$k'(s) = a_1(s)b(s) - b_1(s)a(s) > 0, \qquad k(s) = a(s)b_2(s) - b(s)a_2(s) > 0.$$

Заменим теперь эту общую систему на нашу исходную систему (1), записанную в виде

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{p(s)} \cdot \varphi'(s), \qquad \frac{d\varphi'}{ds} = (q(s) - \lambda) \cdot \varphi(s). \qquad (L_\lambda)$$

Теория предельных кругов и их отображений для различных значений λ обобщается практически без изменений на эту более общую задачу [6]. Решающий пункт здесь — положительно-определенный характер интегрируемого выражения

$$\frac{k\varphi\bar{\varphi} + k'\varphi'\bar{\varphi}'}{(\lambda a - b)(\bar{\lambda} a - b)}$$

в формуле Грина, исполняющего ту роль, которую выражение $\varphi\bar{\varphi}$ играло в задаче (L_λ). Таким образом, прямое конструктивное решение интегрального уравнения дает фундаментальную информацию об интерполяционной проблеме Неванлины, информацию, которую сам Неванлина получал с помощью чистых теорем существования, столь характерных для теории аналитических функций, таких, например, как теорема Витали (В).

3. Теорема о разложении для обыкновенного самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным концом. Для классической задачи (L_λ) изучение сингулярного конца $s = \infty$ есть просто первый шаг в изучении разложения по собственным функциям. На что тут можно надеяться, можно предсказать, заменив сначала сингулярный конец $s = \infty$ регулярным концом $s = l$. При этом чтобы изгнать упоминание о дискретном спектре, мы заменим сумму по собственным значениям в формуле разложения интегралом Стильтьеса, включающим некоторую неубывающую ступенчатую функцию. Вместо перехода к пределу при $l \to \infty$ представляется более удобным проверить непосредственно полученную формулу для интервала $0 \leqslant s < \infty$ и сингулярного конца ∞. Простоты ради возьмем в регулярном конце $s = 0$ граничное условие $\varphi'(0) = 0$. Тогда мы знаем a priori, что для любого собственного значения $\lambda = \lambda_n$ функция $\eta(s; \lambda_n)$ должна быть собственной функцией. Таким образом, собственными значениями являются те вещественные λ, для которых $\eta(s; \lambda)$ удовлетворяют заданному линейному граничному условию $\eta'(l; \lambda) - h\cdot\eta(l; \lambda) = 0$ в конце $s = l$.

Возьмем какое-нибудь λ_0 с положительной мнимой частью, например $\lambda_0 = i$. Фиксация коэффициента w^0 равносильна фиксации определенной точки w^0 круга $C_\lambda(\lambda_0) = C^0$. Разложение произвольной функции $f(s)$ задается формулой

$$f(s) \sim \sum_n a_n \eta(s; \lambda_n), \quad \text{где} \quad a_n = \int_0^l \eta(s; \lambda_n) r_l(\lambda_n) f(s)\, ds$$

и

$$r_l(\lambda_n) = 1 \Big/ \int_0^l (\eta(s; \lambda_n))^2\, ds.$$

Пусть $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ — произвольный интервал на вещественной λ-оси и $x(\lambda)$ — произвольная функция от вещественного λ, положим $\Delta x = x(\lambda_2) - x(\lambda_1)$. Мы можем теперь определить неубывающую ступенчатую функцию $\rho_l(\lambda)$ уравнением

$$\Delta\rho_l = \sum_{\lambda_n \in \Delta} r_l(\lambda_n). \tag{7}$$

(Если один из концов отрезка λ_1, λ_2 является собственным значением, то соответствующее слагаемое $r_l(\lambda_1)$ или $r_l(\lambda_2)$ в (7) нужно взять с весом 1/2.)

Положив

$$\Delta P(s) = \int\limits_{\Delta} \eta(s;\lambda)\,d\rho(\lambda), \qquad \Delta\alpha = \int\limits_0^l \Delta P(s) f(s)\,ds, \tag{8}$$

мы перепишем наше разложение как следующий интеграл Стильтьеса, взятый по вещественной λ-оси:

$$f(s) \sim \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(s;\lambda)\,d\alpha(\lambda). \tag{9}$$

Есть веские основания надеяться, что в этой форме теорема о разложении будет справедлива для интервала $(0;\infty)$ с сингулярным концом ∞, и в предвидении этого результата мы избавились от l в (8). Вся задача свелась теперь к определению неубывающей функции $\rho(\lambda)$.

Для конечного интервала $0 \leqslant s \leqslant l$ и не вещественного λ легко доказать (смотри (С)), что имеет место следующее разложение, которое сходится равномерно по s:

$$\mathcal{I}\varphi(s;\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}\frac{1}{\mu-\lambda}\eta(s;\mu)\,d\rho(\mu), \tag{10}$$

в частности $(s = 0)$

$$\mathcal{I}w(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}\frac{1}{\mu-\lambda}\,d\rho(\mu). \tag{11}$$

Мы надеемся, что эти уравнения остаются справедливыми и для бесконечного интервала (хотя в этом случае $\rho(\lambda)$ может и не быть ступенчатой функцией), если $w(\lambda)$ и $\varphi(s;\lambda)$ строятся исходя из какой-нибудь (или из определенной) точки w^0 предельного круга C^0 в соответствии с приведенными выше рецептами. Обозначим через Δ_ε отрезок Δ, сдвинутый на некоторое положительное расстояние в направлении мнимой оси. Вычислим $\Delta\rho$ и $\Delta P(s) = \int\limits_{\Delta} \eta(s;\lambda)\,d\rho(\lambda)$ исходя из (11) и (10) как пределы:

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_\varepsilon} \mathcal{I}_w(\lambda)\,d\lambda, \\ \Delta P(s) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_\varepsilon} \mathcal{I}\varphi(s;\lambda)\,d\lambda. \end{aligned} \tag{12}$$

Первая формула определяет ρ.

При переработке этих эвристических рассуждений в строгое доказательство нужно прежде всего доказать существование пределов (12), а затем установить справедливость разложений (8) и (9) с построенным таким образом дифферен-

циалом плотности $d\rho$. Сходимость в среднем следует ожидать для любой интегрируемой с квадратом функции $f(s)$. Некоторые слабые ограничения, наложенные на $f(s)$, должны гарантировать обычную равномерную сходимость.

Многие авторы публиковали работы в указанной области. Моя первая попытка основывалась на общей теории Гильберта спектрального разложения ограниченного симметрического линейного оператора. Успех в применении этой теории к дифференциальным операторам основывался главным образом на том факте, что для любого собственного значения λ собственная функция $\eta(s; \lambda)$ известна a priori [7]. Таков подход М. Стоуна в его книге: «Linear transformations in Hilbert spaces» (Линейные преобразования в гильбертовом пространстве) [8], однако он использует технику, развитую за прошедшие двадцать лет в теории абстрактных гильбертовых пространств. Метод Стильтьеса, на основе которого Хеллингер изложил основанную Гильбертом общую теорию, Е. Хилб непосредственно применил к специальным дифференциальным задачам [10]. Однако Хилб не продвинулся так далеко, чтобы получить явную конструкцию дифференциала $d\rho$. Недавно Е. Тичмарш в нескольких статьях и в своей книге «Eigenfunction expensions associated with second-order differential equations» (Разложения по собственным функциям) [11] подвел итог этому прямому подходу. Основное уравнение (12) принадлежит ему. Однако его конструкции $w(\lambda)$ и $d\rho$ не столь прямые, как мне хотелось бы. Заслуживает упоминания также и вклад, который внесли за последние два года А. Винтнер и Р. Хартман [12]. Формула (12) была вновь открыта К. Кодаирой (который, конечно, не имел доступа к западной математической литературе в конце 1941 г.). Его конструкция ρ и доказательство (12) пока не опубликованы, но, кажется, близки к опубликованию.

Кажется удивительным, что прошло сорок лет, прежде чем появилось исчерпывающее прямое доказательство. Этот факт заставляет поразмыслить о том, до какой степени математики увлеклись в этот период абстрактными обобщениями, не замечая лежащих на виду неоконченных конкретных задач неоспоримой важности.

4. Неравенства и асимптотическое поведение собственных значений. Оставим теперь разложения по собственным функциям и обратимся к другому вопросу, а именно к асимптотическому распределению частот собственных колебаний двумерной и многомерной мембраны или других колеблющихся сред. Лоренц убедил математиков в том, что вопросы такого рода крайне важны в физике. Для ученика Гильберта времен 1910 г. было естественным рассматривать этот вопрос как относящийся к интегральным уравнениям. С помощью вещественного симметрического ядра $K(s, t)$ вводится линейный оператор $u \to Ku$, или, более явно, $u(s) \to \int_0^1 K(s,t)\,u(t)\,dt$, в линейном пространстве всех вещественнозначных непрерывных функций $u = u(s)$ на отрезке $0 \leqslant s \leqslant 1$. Если интеграл $\int_0^1 u(s)\,v(s)\,ds$ рассматривать как скалярное произведение (u, v) любых двух векторов u, v в этом пространстве, то квадратичная интег-

ральная форма

$$K\langle u\rangle = \int_0^1\int_0^1 K(s, t)\, u(s)\, u(t)\, ds\, dt$$

будет скалярным произведением u и Ku. Обратные собственные значения k и собственные векторы φ будут решениями уравнения $K\varphi = k\varphi$. Расположим положительные числа k в убывающем порядке $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots$ и выберем соответствующие собственные функции φ_n, так, чтобы они образовывали ортонормированную систему, $(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}$. Тогда k_n будет максимальным значением формы K на множестве, определяемом условиями

$$\| u \|^2 = (u, u) \leqslant 1, \quad (u_i, \varphi_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Пусть $\omega_1(s), \ldots, \omega_{n-1}(s)$ — произвольные $n-1$ функция. Фундаментальная лемма, сделавшая возможными мои исследования, утверждает, что существует вектор u длины 1, $\| u \| = 1$, ортогональный $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$,

$$(u, \omega_1) = 0, \ldots, (u, \omega_{n-1}) = 0,$$

и такой, что $K\langle u\rangle \geqslant k_n$. Эта лемма характеризует k_n совершенно независимо от собственных значений и собственных векторов как «минимум из максимумов». Построение вектора u из леммы достаточно просто: трюк в том, что мы берем в качестве u подходящую линейную комбинацию первых n базисных векторов. Я использовал эту лемму (в несколько иной форме), чтобы проверить для всех k_n ряд утверждений, очевидных для первого обратного собственного значения k_1 [13].

Вот один пример. Предположим, что мы добавляем к ядру K положительно-определенное ядро k, т. е. такое, что $k\langle u\rangle \geqslant 0$. Ясно, что первое обратное положительное собственное значение k_1^* формы $K^* = K + k$ больше или равно k_1; действительно, k_1 есть максимум $K\langle u\rangle$, а k^*_1 — максимум $K\langle u\rangle + k\langle u\rangle$ при условии $\| u \|^2 \leqslant 1$. Наша лемма дает неравенства для всех обратных собственных значений, расположенных в убывающем порядке: $k_n \leqslant k_n^*$.

Этот результат имеет немедленные применения в задаче о двумерной мембране. Пусть мембрана покрывает область S (жордановой) площади V. Собственные значения λ и собственные функции $\varphi(P)$ (где P пробегает множество точек S) удовлетворяют дифференциальному уравнению $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ в S и условию $\varphi = 0$ на границе S' области S. Дифференциальное уравнение вместе с граничным условием эквивалентно интегральному уравнению

$$\varphi(P) - \lambda \int_S G(P, Q)\, \varphi(Q)\, dQ = 0,$$

симметрическим ядром которого служит функция Грина $G(P, Q)$. Разделим область S линией l на две части S_1, S_2 и обозначим через G_1, G_2 их функции Грина (положив $G_i(P, Q) = 0$, если хотя бы один из аргументов P, Q лежит вне S_i). Легко видеть, что ядро $G - (G_1 + G_2)$ положительно-определенно. Следовательно, n-е собственное значение λ_n для G не превосходит n-го собственного значения λ_n для $G_1 + G_2$. Собственные значения ядра $G_1 + G_2$ являются собственными значениями мембраны, покрывающей S и закрепленной не

только вдоль границы S', но и вдоль линии l. Комбинируя этот результат с хорошо известным асимптотическим распределением собственных значений квадратной мембраны, легко получить, что закрепление мембраны вдоль l не меняет асимптотического поведения собственных значений

$$\lambda_n/\lambda_n' \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Более того, из тех же соображений легко получить закон асимптотического распределения, согласно которому число собственных значений, меньших λ, асимптотически равно $(V/4\pi)\cdot\lambda$.

После первой мировой войны Курант продолжил исследования такого рода задач [14]. Насколько я понимаю, основным вкладом Куранта является не минимаксный принцип, сформулированный в нашей фундаментальной лемме, но приложения этого принципа в весьма общей и типичной ситуации. Максимум квадратичной формы $K\langle u\rangle$, рассматриваемой на векторах длины $\leqslant 1$ в векторном пространстве $\mathfrak{H}$, уменьшается, если мы накладываем на u дополнительные ограничения, например если u берется из подпространства $\mathfrak{H}'$ пространства $\mathfrak{H}$. Если квадратичная форма обладает свойством, которое Гильберт называет вполне непрерывностью, то предыдущее очевидное утверждение переходит в неравенство $k_1' \leqslant k_1$. Квадратичная форма $K\langle u\rangle$ в $\mathfrak{H}'$ имеет вид $(u, K'u)$, где K' есть композиция K и ортогональной проекции на $\mathfrak{H}'$. В то время как k_1 есть первое обратное собственное значение оператора K на $\mathfrak{H}$, k_1' играет ту же роль для K' на $\mathfrak{H}'$. Лемма распространяет неравенство $k_1' \leqslant \leqslant k_1$ на все (положительные) обратные собственные значения: $k_n' \leqslant k_n$. Ясно, что закрепление мембраны вдоль линии l вводит новое ограничение, и, следовательно, наблюдение Куранта сразу доказывает неравенство $\lambda_n \leqslant \lambda_n'$, полученное ранее другим способом (где λ_n и λ_n' — собственные значения разделенной на две части и неразделенной мембран). Каждый, знакомый с понятием абстрактного пространства Гильберта и обдумавший ситуацию, в которой здесь применялся принцип, сумел бы описать ее следующим образом. Все непрерывные функции $u(P)$ в замкнутой области S, обладающие непрерывными первыми производными внутри, обращающиеся в нуль на границе S и имеющие конечный интеграл Дирихле $D\langle u\rangle = \int\limits_S (\operatorname{grad} u)^2\, dP$, образуют функциональное пространство $\mathfrak{H}$. Определим квадрат длины вектора u в этом пространстве формулой $\| u \|^2 = D\langle u\rangle$ (в отличие от более обычного способа взять за квадрат длины u число $I(u) = \int\limits_S u^2\, dP\Big)$. Пополнение $\mathfrak{H}$ по этой метрике приводит к гильбертову пространству $\overline{\mathfrak{H}}$, в котором квадратичная форма $I(u)$ является вполне непрерывной. Наложим теперь на функцию $u \in \mathfrak{H}$ ограничение $u = 0$ вдоль l, не меняя других условий на u. Замыкание полученного таким образом подпространства $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}$ будет замкнутым подпространством $\overline{\mathfrak{H}}' \subset \overline{\mathfrak{H}}$, и соотношение $k_n' \leqslant k_n$ выполняется для обратных собственных значений формы $I\langle u\rangle$ в $\overline{\mathfrak{H}}$ и $\overline{\mathfrak{H}}'$ соответственно. (Построение пополнения существенно, поскольку, вообще говоря, собственные функции разделенной мембраны лежат в $\overline{\mathfrak{H}}'$, но не в $\mathfrak{H}'$ ввиду разрыва нормальной производной на l. Разумеется, обратив-

шись прямо к доказательству фундаментальной леммы, можно было бы избежать всех этих абстрактных построений, но в настоящий момент мы интересуемся именно общей формулировкой.)

Пусть теперь снова $K\langle u\rangle$ — вполне непрерывная квадратичная форма в гильбертовом пространстве $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ замкнутое подпространство в $\mathfrak{G}$. Предположим для простоты, что $K\langle u\rangle$ положительно-определена и обозначим собственные значения $K\langle u\rangle$ на $\mathfrak{G}$ и на $\mathfrak{H}$ через λ_n и μ_n соответственно. Мы видели, что

$$\lambda_n \leqslant \mu_n. \tag{13}$$

Разложим $\mathfrak{G}$ в прямую сумму пространства $\mathfrak{H}$ и его ортогонального дополнения и выберем в последнем базис (предпочтительно ортонормированный). Мы сможем перейти от $\mathfrak{H}$ к $\mathfrak{G}$ с помощью последовательности промежуточных подпространств $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}'\subset\mathfrak{H}''\subset\ldots$, гаких, что $\mathfrak{H}^{(\nu)}\to\mathfrak{G}$ при $\nu\to\infty$. Эти пространства строятся последовательным добавлением векторов нашего базиса: $\mathfrak{H}^{(\nu)}=\mathfrak{G}+\{p_1,\ldots,p_\nu\}$. Аналогично мы можем опускать один за другим базисные вектора u в пространстве $\mathfrak{G}$, удовлетворяющие условиям $(u, p_1)=$ $=0$, $(u, p_2)=0,\ldots$, и получить таким образом убывающую последовательность $\mathfrak{G}\supset\mathfrak{G}'\supset\mathfrak{G}''\supset\ldots$, удовлетворяющую условию $\mathfrak{G}^{(\nu)}\to\mathfrak{H}$ при $\nu\to$ $\to\infty$. Если λ_n известно, что неравенство (13) дает оценку снизу для μ_n и вторая из наших последовательностей подпространств приводит к возрастающей последовательности таких оценок снизу

$$\lambda_n\leqslant\lambda_n'\leqslant\lambda_n''\leqslant\ldots,\qquad \lim_{\nu\to\infty}\lambda_n^{(\nu)}=\mu_n.$$

Если известно μ_n, то это же неравенство дает оценку сверху для λ_n, которая с помощью первой последовательности подпространств может быть продолжена до целой последовательности, убывающих оценок сверху

$$\mu_n\geqslant\mu_n'\geqslant\mu_n''\geqslant\ldots,\qquad \lim_{\nu\to\infty}\mu_n^{(\nu)}=\lambda_n.$$

С некоторыми основаниями мы можем назвать первую процедуру, методом Рэлея—Ритца и с большими основаниями приписать вторую А. Вайнштейну [15].

Основу ситуации, с которой мы здесь столкнулись, составляет разложение гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ в сумму некоторого подпространства $\mathfrak{H}'$ и ортогонального ν-мерного подпространства $\{p_1,\ldots,p_\nu\}$, натянутого на базисные векторы $p_1,\ldots,p_\nu$. Н. Ароншайн получил недавно две изящные формулы, относящиеся к этой ситуации [16]. Я изложу здесь только ту из них, которая соответствует процедуре Вайнштейна спуска от $\mathfrak{H}$ к $\mathfrak{H}'$, и оставлю в стороне другую, относящуюся к обратной процедуре Рэлея — Ритца. Пусть $R(\zeta)$ — резольвента оператора K в $\mathfrak{H}$, т. е. $u=R(\zeta)v$ является решением уравнения $u-\zeta\cdot Ku=v$. Пусть λ' и u' — собственное значение и соответствующий собственный вектор оператора K' в $\mathfrak{H}'$. Этот факт можно записать в виде двух соотношений

$$u'\in\mathfrak{H}',\ u'-\lambda'Ku'=\beta_1p_1+\ldots+\beta_\nu p_\nu.$$

Предположим теперь, что λ' не совпадает ни с одним из собственных значений λ_n оператора K. Тогда константы β_i не могут обратиться в нуль одновременно. С помощью резольвенты $R(\zeta)$ второе соотношение можно переписать в виде $u' = \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j \cdot R(\lambda') p_j$. Первое соотношение эквивалентно ортогональности вектора u' всем p_i:

$$\sum_j \beta_j (p_i, R(\lambda') p_j) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, \nu).$$

Эти ν уравнений относительно ν неизвестных β_j имеют нетривиальное решение, только если детерминант

$$\det (p_i, R(\zeta) p_j) = W_p(\zeta)$$

обращается в нуль при $\zeta = \lambda'$. Поделим $W_p(\zeta)$ на определитель Грина $G_p = \det(p_i, p_j)$. Ясно, что частное

$$W(\zeta) = W_p(\zeta)/G_p$$

не зависит от выбора базиса $p_1, \ldots, p_\nu$. Из теории резольвент известно, что $W(\zeta)$ — мероморфная функция с простыми полюсами в собственных значениях λ_n оператора K. С другой стороны, мы видели, что $W(\zeta)$ обращается в нуль для значения $\zeta = \lambda'$, отличного от всех λ_n в том и только в том случае, когда λ' является собственным значением оператора K' на $\mathfrak{H}'$. Следовательно, мы не можем найти слишком неожиданным следующее равенство, доказанное Ароншайном:

$$W(\zeta) = \left(\frac{-1}{\zeta}\right)^{\nu} \cdot \prod_n \frac{\zeta - \lambda_n'}{\zeta - \lambda_n}.$$

Я сожалею, что за недостатком времени не могу иллюстрировать эту общую формулу, показав ее применения к классическим задачам теории упругости и электромагнитных колебаний (D).

5. Дзета-функция мембраны и асимптотическое поведение собственных функций. Физики не довольствуются знанием асимптотического поведения одних только собственных значений. Следовательно, и поведение собственных функций должно быть изучено. Карлеман первым атаковал эту более сложную задачу с помощью нового могущественного метода [17]. Последний год мы имели удовольствие видеть у себя в Институте доктора А. Плейеля, продолжившего исследования Карлемана [18], а также доктора Минакшисундарама, независимо от Карлемана пришедшего к такой модификации его метода, которая позволила пролить новый свет на проблематику в целом. Рассмотрим снова двумерную мембрану. Карлеман использует функцию Грина «мезонного» уравнения $\Delta u - k^2 u = 0$ с положительным параметром k^2 (с граничным условием $u = 0$). Минакшисундарам [19] использует вместо этого функцию Грина $G(P, Q; t)$ уравнения теплопроводности

$$\Delta u - \partial u/\partial t = 0 \qquad (14)$$

при положительных значениях параметра t. Функция

$$u(P;t)=\int_S G(P,Q;t)f(Q)\,dQ$$

описывает температуру диска S в точке P в момент времени t при условии, что начальное распределение температуры описывается функцией $f(P)$ и на границе области S поддерживается нулевая температура. Для бесконечной плоскости функция Грина $G(P, Q; t)$ принимает вид

$$G_0(P,Q;t)=\frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{r_{PQ}^2}{4t}\right),$$

где через r_{PQ} обозначено расстояние между точками P и Q. Для произвольной области S

$$G(P, Q; t) = G_0(P, Q; t) - g(P, Q; t).$$

При фиксации любой точки P в области S компенсирующий член $g(P, Q; t)$ является решением уравнения (14), которое обращается в 0 при $t\to 0$, а на границе S' области S принимает то же граничное значение, что и главная часть G_0.

При фиксированных P и t и переменном Q, пробегающем границу S', главная часть G_0 имеет максимум, равный

$$H_0(P;t)=\frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{l_P{}^2}{4t}\right).$$

Здесь через l_P обозначено кратчайшее расстояние от точки P до границы. Рассматриваемая как функция одного переменного t функция H_0 возрастает от $t = 0$ до $t = T = 4/l_P{}^2$, а затем убывает. Простые рассуждения показывают, что при $0 < t \leqslant T$ компенсирующая функция $g(P, Q; t)$ аргумента Q положительна и достигает своего максимума на границе, и, следовательно,

$$0 < g(P, Q; t) \leqslant H_0(P; t) \tag{15}$$

для всех $Q \in S$ и $0 < t \leqslant T$.

В терминах ортонормированной системы собственных функций $\varphi_n(P)$ и их собственных значений λ_n функция Грина может быть записана в виде суммы

$$\sum_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n(P)\,\varphi_n(Q). \tag{16}$$

Ряд

$$\zeta(P,Q;s)=\sum_n \frac{\varphi_n(P)\,\varphi_n(Q)}{\lambda_n{}^s} \tag{17}$$

может быть назван ζ-функцией, а ряд (16) соответственно θ-функцией задачи о мембране. Мы знаем, что ряд (17) сходится равномерно по P и Q для всех комплексных s, вещественная часть которых $\sigma \geqslant 2$. Для $s = 1, 2, 3, \ldots$ эта ζ-функция превращается в функцию Грина мембраны $G(P, Q)$ и в ее последовательные итерации.

Один из методов Римана изучения свойств обычной ζ-функции основывался на связи между θ-функцией и ζ-функцией. Эта связь сразу обобщается на нашу

ситуацию:

$$\Gamma(s)\cdot\zeta(P,Q;s)=\int_0^\infty G(P,Q;t)\,t^{s-1}\,dt. \tag{18}$$

Основываясь на этом соотношении, Минакшисундарам доказал, что функция $\Gamma(s)\zeta(P, Q; s)$ является регулярной функцией s на всей s-плоскости, если P и Q — две различные внутренние точки S, а если P и Q совпадают, то функция регулярна всюду, кроме точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом $1/4\pi$. Снова следуя Риману, Минакшисундарам разложил интеграл $\int_0^\infty$ в правой части (18) в $\int_0^T + \int_T^\infty$. Ввиду равномерной сходимости $\zeta(P, Q; 2)$, θ-функция (16) убывает экспоненциально при $t \to \infty$; следовательно, интеграл

$$\int_T^\infty G(P,Q;t)\,t^{s-1}\,dt$$

является регулярной аналитической функцией от s во всей s-плоскости. Если $P \neq Q$, то формула

$$G(P,Q;t)=\frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{r_{PQ}^2}{4t}\right)-g(P,Q;t)$$

вместе с оценкой (15) показывают, что $G(P, Q; t)$ также экспоненциально стремится к 0 при $1/t \to \infty$, и, следовательно, интеграл также является регулярной аналитической функцией от s. Это доказывает результат для $P \neq Q$. Если же $Q = P$, то

$$G(P,\ P;\ t) = 1/4\pi t - g(P,\ P;\ t).$$

Второй член положителен и не превосходит $H_0(P, t)$. Следовательно, интеграл $\int_0^T g(P,P;t)\,t^{s-1}$ регулярен по s. Однако функция

$$\int_0^T \frac{1}{4\pi t}\,t^{s-1}\,dt=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{T^{s-1}}{s-1}$$

имеет в точке $s = 1$ полюс с вычетом $1/4\pi$. Это завершает доказательство. Функция $\zeta(P, Q; s)$ сама имеет нули для тех значений s, при которых регулярная функция $1/\Gamma(s)$ имеет нули, а именно для $s = 0, -1, -2, \ldots$ Можно было бы думать, что интегрирование по P дает для функции

$$\zeta(s)=\int_S \zeta(P,P;s)\,dP=\sum_n \lambda_n^{-s}$$

следующий результат:

$$\Gamma(s)\cdot\zeta(s)=\frac{V}{4\pi}\cdot\frac{1}{s-1}+\text{регулярная функция } R(s). \tag{19}$$

К сожалению, это слишком поспешный вывод: если точка P близка к краю, то член $H_0(P;\ t)$ вовсе не так мал. Проведя интегрирование по P соотношения

$$G(P;\ P;\ t) = 1/4\pi t - g(P,\ P;\ t), \qquad 0 \leqslant g(P,\ P;\ t) \leqslant H_0(P;\ t),$$

мы находим, что остаточный член $R(s)$ в (19) регулярен по меньшей мере при $\sigma > 1/2$. И представляется затруднительным продолжить его на вертикаль $\sigma = 1/2$.

Стандартная схема рассуждений, известная из теории Римана обычной ζ-функции, позволяет вывести из этого поведения ζ-функции мембраны асимптотические формулы Карлемана

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} (\varphi_n(P))^2 \sim \lambda/4\pi, \qquad N(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} 1 \sim V\lambda/4\pi,$$

а также «соотношение ортогональности»

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \varphi_n(P)\,\varphi_n(Q) = 0(\lambda) \quad \text{для } P \neq Q.$$

Я чувствую, что эта информация о собственных колебаниях мембраны, сколь бы ценна она ни была, все же является весьма неполной. У меня есть некоторые предположения, как должен был бы выглядеть полный анализ асимптотического поведения мембраны. Поскольку, однако, в течение более чем 35 лет я не сделал серьезных попыток доказать свои предположения, будет лучше, если я оставлю свои гипотезы при себе.

Вообще говоря, нельзя ожидать, что ζ-функция мембраны будет удовлетворять функциональному уравнению риманова типа. Видимо, это свойство ζ-функции зависит от однородности области интегрирования. Примером такой однородной области может служить единичная окружность. Функции на единичной окружности — это функции $f(x)$ периода 2π. Периодические собственные функции φ и соответствующие собственные значения λ уравнения $d^2\varphi/dx^2 + \lambda\varphi = 0$ даются формулами

$$\varphi(x) = e^{inx}, \quad \lambda_n = n^2 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Таким образом, мы естественно пришли к обычной ζ-функции Римана $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s}$, обычно обозначаемой не через $\zeta(s)$, а через $\zeta(2s)$. Неудивительно поэтому, что Минакшисундарам начал изучать сферические гармоники на k-мерной сфере (в $(k+1)$-мерном пространстве). Здесь он нашел, что ζ-функция действительно удовлетворяет некоторому функциональному уравнению типа функционального уравнения Римана. Однако структура этого функционального уравнения оказалась существенно более сложной, чем в классическом случае $k = 1$, рассмотренный Риманом.

Двумерная сфера однородна, поскольку допускает компактную транзитивную группу Ли преобразований, а именно группу вращений. Сферические гармоники порядка l образуют $(2l + 1)$-мерное линейное пространство, которое инвариантно относительно группы вращений и обладает свойством неприводимости. Рассмотрим произвольные (комплекснозначные) непрерывные функции

на сфере и определим скалярное произведение двух таких функций f и g с помощью интеграла $\int \bar{g}(P) f(P) d\omega_P$, взятого по инвариантному элементу площади $d\omega_P$. Ясно, как обобщить эту ситуацию на любое однородное многообразие S точек P, т. е. на любое многообразие, допускающее компактную транзитивную группу Ли преобразований s, $P \to sP$. Существование инвариантного элемента объема на таком многообразии (оно само обязательно является компактным) легко следует из существования на компактной группе Ли инвариантного элемента объема ds. Нормируем единицу измерения объема на группе так, чтобы полный объем $\int ds$ группы стал равен 1. Тогда интеграл по s становится обычным средним значением. Определим преобразование sf функции $f = f(P)$ на многообразии S формулой $sf(sP) = f(P)$ или $sf(P) = f(s^{-1}P)$. Множество $\varphi_1(P), \ldots, \varphi_n(P)$ функцией на S, а точнее, линейное пространство всевозможных линейных комбинаций $\varphi(P) = x_1 \cdot \varphi_1(P) + \ldots + x_h \cdot \varphi_h(P)$ будет инвариантным, если каждая функция $s\varphi_i(P)$ представляется как линейная комбинация $\sum_j \omega_{ji}(s) \cdot \varphi_i(P)$ исходных функций φ_i. Формула $s \to \| w_{ij}(s) \|$ дает тогда представление степени h группы σ. Неэквивалентные неприводимые инвариантные множества попарно ортогональны. Кроме соотношений ортогональности, имеется еще и соотношение полноты, к которому мы скоро перейдем. Таким образом, мы имеем «собственные функции» на однородном многообразии, последовательность которых разделена на неприводимые инвариантные множества конечной длины. Теорема о сходимости разложения по этим собственным функциям была доказана С. Бохнером [20]. Однако пока мы получили только собственные функции без собственных значений. Молодой датский физик Х. Б. Г. Казимир, побуждаемый приложениями теории групп к квантовой механике, нашел собственные значения. В действительности он построил инвариантный самосопряженный дифференциальный оператор Δ, действующий на произвольную функцию $f(P)$ и аналогичный оператору Лапласа на сфере. После этого ему удалось показать, что функции данного неприводимого инвариантного множества удовлетворяют уравнению $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ с константой λ, характеризующей это множество [21]. Имея собственные функции, можно, следуя предложению Бохнера, образовать ζ-функцию

$$\zeta(P, Q; z) = \sum_n \frac{\varphi_n(P)\,\varphi_n(Q)}{\lambda_n^2}.$$

Можно надеяться, что эта функция, кроме весьма общих свойств, найденных Минакшисундарамом, будет удовлетворять некоторому функциональному уравнению типа функционального уравнения Римана. Но этот вопрос еще ждет своего решения.

6. Интегральные уравнения и теоретико-групповые соотношения полноты. Доказательство соотношения полноты для инвариантных множеств на однородном многообразии S есть одно из наиболее удивительных применений теории собственных значений интегральных уравнений. Если многообразие S есть компактная группа Ли, действующая на себе левыми сдвигами, то эта теорема утверждает полноту совокупности всех неприводимых представлений

группы. Однако метод доказательства этой теоремы, развитый в 1927 г. Ф. Петером и автором [22], годится не только для однородных многообразий, но и может быть применен к гораздо более общей ситуации, которую лучше всего описывать аксиоматически [23]. Мы заменяем функции на однородном многообразии векторами f векторного пространства Σ и предполагаем, что Σ снабжено эрмитовой метрикой, определенной скалярным произведением (g, f) с обычными свойствами, включая положительный характер скалярного квадрата $(f, f) = \| f \|^2$. Мы предполагаем также, что задана абстрактная компактная группа Ли σ и ее представление, сопоставляющее каждому элементу s линейное преобразование $f \to sf$ нашего векторного пространства. Наконец, мы предполагаем инвариантность метрики: $(sg, sf) = (g, f)$. Пусть f — заданный вектор. Все векторы, с которыми мы будем иметь дело в нашей конструкции, получаются из f и его сдвигов sf с помощью линейных комбинаций. Кроме Σ, мы рассмотрим также векторное пространство Ξ всех непрерывных функций $\xi = \xi(s)$ на групповом многообразии σ и определим линейное отображение $\xi \to g$ пространства Ξ в пространство Σ формулой

$$g = f\xi = \int \xi(s) \cdot sf \cdot ds.$$

Определим также эрмитово сопряженное отображение $g \to \xi$ пространства Σ в пространство Ξ формулой

$$\xi = f^*g = (sf, g).$$

Отображение $f^*f = \mathfrak{F}$ пространства Ξ в себя имеет положительно-определенное эрмитово ядро $H(s, t) = (sf, tf)$. Методом Эрхарда Шмидта можно найти его наибольшее обратное собственное значение γ и ортонормированное множество собственных функций $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$, отвечающих этому собственному значению. Повторение этой конструкции дает убывающую последовательность обратных собственных значений $\gamma > \gamma' > \ldots$, и искомое соотношение полноты вытекает из следующего хорошо известного равенства: след H равен сумме обратных собственных значений $\| f \|^2 = (f, f) = h\gamma + h'\gamma' + \ldots$

Действительно, равенство $\int H(s, t)\, \varphi_i(t)\, dt = \gamma \cdot \varphi_i$ может быть переписано в виде

$$f\varphi_i = \gamma^{1/2} \cdot g_i, \quad f^*g_i = \gamma^{1/2} \cdot \varphi_i,$$

где первое уравнение нужно рассматривать как определение вектора g_i. Тогда g_i образуют ортонормальное инвариантное множество, и, обозначив через α_i коэффициент Фурье $(g_i, f) = \alpha_i$, мы получим, что

$$h\gamma = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha h|^2.$$

Таким образом, соотношение полноты вытекает из того факта, что для ортонормальной последовательности $g_1, g_2, \ldots, (g_m, g_n) = \delta_{mn}$, возникающей в нашей конструкции и разбитой на куски конечной длины, каждый из которых является инвариантным множеством, сумма $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots$ квадратов модулей коэффициентов Фурье $\alpha_i = (g_i, f)$ не только не превосходит $\| f \|^2$, что тривиально (неравенство Бесселя), но просто равна $\| f \|^2$. Наша конструкция выделяет те инвариантные множества, которые дают вклад в f и $\| f \|^2$.

Последняя особенность оказалась весьма существенной, когда Г. Бор и фон Нейман [24], отбросили все ограничения на группу σ. В предположении,

что функция f — «почти периодична», конструкция по-прежнему работает. Вообще говоря, при таких предположениях имеется более чем счетное число неэквивалентных неприводимых инвариантных множеств векторов. Но функция f сама отбирает среди этих множеств те, которые к ней относятся. Предположение почти периодичности слишком ограничительно. Вместо него можно наложить некоторое слабое ограничение на группу, например локальную компактность, и допустить в то же время гораздо более широкий класс векторов f. В этом случае нельзя ожидать ничего похожего на полноту, если мы не будем рассматривать все представления, в том числе и представления бесконечной размерности. Этот шаг был недавно сделан Д. Райковым и И. Гельфандом в России, а также В. Баргманом и И. Сигалом в нашей стране [25].

Я думаю, что здесь мне пора остановиться. Я совсем не затронул ни расширения теории Гильберта с ограниченных на неограниченные линейные операторы, которое разрабатывается под влиянием квантовой механики, ни связи спектрального разложения с эргодической теорией. Другие математики в другое время расскажут или уже рассказали об этом с бо́льшим знанием дела. Я надеюсь, что вы восприняли эту лекцию так, как это и было задумано, как Plauderei, рассказ человека, достигшего того возраста, когда приятнее вспоминать прошлое, чем заглядывать в будущее. И этот человек испытывает чувство некоторого удовлетворения, видя, что дело которому он посвятил свою юность, не зачахло с годами, а до сих пор живо и пускает все новые ростки.

Замечания

(A) Существует два класса собственных функций. Но поскольку один из них не встречается в разложении разрывной функции $1^0(x)$, только собственные значения λ^2, относящиеся к другому классу, должны быть приняты во внимание. Эти собственные значения определяются из трансцендентного уравнения

$$\beta\cdot\tan\frac{\alpha\lambda\pi}{2}+\alpha\cdot\tan\frac{\beta\lambda\pi}{2}=0.$$

Легко видеть, что для всякого целого n это уравнение имеет ровно один корень λ_n вида $\lambda_n=2n+\theta_n$, $-1<\theta_n<1$. Если α и β рациональны,

$$\alpha=a/c,\quad \beta=b/c,\quad a+b=c;\quad \text{где } a,\ b,\ c \text{ — целые и } c>0,$$

то θ_n имеет период c, $\theta_{n+c}=\theta_n$, и эта периодичность делает возможным весьма явное описание n-й частичной суммы $1_n{}^0(x)$.

(B) Основной факт состоит в следующем. Заданные значения $\beta_1=w(\alpha_1)$, $\beta_2=w(\alpha_2)$, ... должны удовлетворять последовательности неравенств, из которых первое, $\mathcal{J}\beta_1>0$, включает только β_1, второе — β_1 и β_2 и т. д. Если эти неравенства выполнены, то имеются две возможности, которые различаются критерием сходимости. В первом случае, случае предельной точки, задача имеет единственное решение. Во втором случае, случае предельной окружности, множество всех решений $w(\lambda)$ получается из множества всех положительных функций $z(\lambda)$ с помощью некоторого преобразования Мебиуса

$$w(\lambda)=\frac{A(\lambda)\cdot z(\lambda)+B(\lambda)}{C(\lambda)\cdot z(\lambda)+D(\lambda)},$$

коэффициенты которого A, B, C, D являются регулярными аналитическими функциями от λ в верхней λ-плоскости.

(C) Действительно, заменяя в (6) λ_0 и λ на λ, $\overline{\lambda}$, мы находим

$$\mathcal{J}\varphi(s) = \mathcal{J}\lambda \cdot \int_0^1 G(s, t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt.$$

Следовательно, $\mathcal{J}\varphi(s)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $\eta(s; \lambda_n)$. Из (3) мы получаем, что интеграл $\int_0^l \varphi(s)\,\eta(s; \lambda_n)\,ds$ равен $1/(\lambda_n - \lambda)$.

(D) Собственные значения $\lambda = \mu_n$ уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, соответствующие граничному условию $\partial u/\partial n = 0$ (нормальная производная u равна 0, «акустические собственные значения») являются обратными к последовательным максимумам формы $I\langle u\rangle$ при ограничении $D\langle u\rangle = 1$ или к последовательным минимумам $D\langle u\rangle$ при ограничении $I\langle u\rangle = 1$. В процессе пополнения по метрике, определенной нормой $D\langle u\rangle$, граничное условие $\partial u/\partial n = 0$ исчезает. Следовательно, $\mu_n \leqslant \lambda_n$, где, как прежде, λ_n суть собственные значения мембраны, соответствующие граничному условию $u = 0$.

Уравнение колебаний пластины

$$\Delta\Delta u - \lambda^2 \cdot u = 0 \text{ в } S$$

возникает при минимизации интеграла

$$\int_S (\Delta u)^2\,dP \tag{20}$$

с дополнительным условием $I\langle u\rangle = 1$. Пусть μ_n^2 — собственные значения зажатой пластины,

$$\text{граничные условия: } u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

а λ_n^2 — собственные значения «полусвободной» пластины,

$$\text{граничные условия: } u = 0, \ \Delta u = 0. \tag{21}$$

И в этом случае граничное условие $\Delta u = 0$ пропадает при пополнении по метрике, определенной формулой (20). Следовательно, $\lambda_n^2 \leqslant \mu_n^2$, и можно надеяться что λ_n и μ_n имеют одно и то же асимптотическое поведение. Вайнштейн заметил, что собственные значения полусвободной пластины являются просто квадратами собственных значений мембраны (об этом говорит уже их обозначение). Действительно, если $\Delta\Delta u = \lambda^2 u$, $(\lambda > 0)$, то положим $\Delta u = -\lambda v$. Тогда $\Delta v + \lambda u = 0$. Граничные условия (21) дают $u = 0$ и $v = 0$ на S', следовательно, $(u + v)/2$ есть собственная функция мембраны с собственным значением λ, а $(u - v)/2$ — собственная функция с собственным значением $-\lambda$. Но у мембраны нет отрицательных собственных значений; следовательно, $u - v = 0$ и $(u + v)/2 = u$.

Я основывался примерно на таком же замечании, когда ранее редуцировал (в асимптотическом смысле) упругие колебания трехмерного тела к задаче о трехмерной мембране [26]. Векторное поле $\mathfrak{v}(P)$, описывающее собственные колебания упругого тела удовлетворяет уравнению

$$a \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v} - b \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{v} + \lambda \mathfrak{v} = 0 \text{ в } S \qquad \text{(E)}$$

с двумя показателями упругости a, b. Наложим граничные условия:

$$\text{поле } \mathfrak{v} \text{ нормально, } \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \text{ на границе } S' \text{ области } S \text{(E')}.$$

Положив $\varphi = \operatorname{div} \mathfrak{v}$, получаем $a \cdot \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ в S и граничное условие $\varphi = 0$. Следовательно, если φ — собственная функция задачи о мембране с собственным значением λ/a, то $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi$ удовлетворяет соотношениям (E), (E'). Если, однако, $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ на всей области S, то мы имеем

$$b \cdot \Delta \mathfrak{v} + \lambda \mathfrak{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \text{ в } S; \ \mathfrak{v} \text{ нормально } S'$$

(поскольку $\Delta \mathfrak{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{v}$). Итак, λ/b есть собственное значение в задаче об излучении внутри полости S с абсолютно зеркальной поверхностью S'.

Обозначим числа собственных значений $\leqslant\lambda$ в задаче о мембране, в задаче излучения и задаче упругости (E) & (E') через $N_m(\lambda)$, $N_r(\lambda)$ и $N_e(a, b; \lambda)$ соответственно. Тогда мы получаем соотношение

$$N_e(a, b; \lambda) = N_m(\lambda/a) + N_r(\lambda/b).$$

Для $a = b = 1$ левая часть (E) превращается в $\Delta \mathfrak{v} + \lambda \mathfrak{v}$. Поскольку асимптотически граничные условия не оказывают влияния, мы должны иметь асимптотические отношения $N_e(1, 1; \lambda) \sim 3N_m(\lambda)$, т. е. $N_m(\lambda) + N_r(\lambda) \sim 3N_m(\lambda)$, или $N_r(\lambda) \sim 2N_m(\lambda)$, и, таким образом,

$$N_e(a, b; \lambda) \sim N_m(\lambda/a) + 2N_m(\lambda/b).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weyl H.* Die Gibb'sche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen.— Rend. Circ. mat. Palermo, 1910, vol. 29, p. 308—328; Ueber die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene.— Rend. Circ. mat. Palermo, 1910, vol. 30, p. 1—31.
2. *Weyl H.* Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.— Math. Ann., 1916, Bd. 77, S. 313—352.
3. *Weyl H.* Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und de zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen.— Math. Ann., 1910, Bd. 68, S. 220—269; Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1910, S. 442—467.
4. *Hellinger E.* Zur Stieltjes'schen Kettenbruchtheorie.— Math. Ann., 1922, Bd. 86, S. 18—29.
5. *Pick G.* Ueber die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden.— Math. Ann., 1916, Bd. 77, S. 7—23; *Nevanlinna R.* Ueber beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen.— Ann. Acad. sci. fenn., 1919, vol. 13, N 1; Ueber beschränkte analytische Funktionen.— Ann. Acad. sci. fenn., 1929, vol. 32, N 7.
6. *Weyl H.* Ueber das Pick—Nevanlinna'sche Interpolationsproblem und sein infinitesimales Analogon.— Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 230—254.
7. *Weyl H.* Глава 3 из первой работе [3] и § 1 из второй работы [3].
8. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space.— Amer. Math. Soc. Coll. Publs, 1932, vol. 15.

9. *Hellinger E.* Neue Begrundung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veranderlichen.— J. reine und angew. Math., 1909, Bd. 136, S. 265—326.
10. *Hilb E.* Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die dazugehörtigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen.— Math. Ann., 1915, Bd. 76, S. 333—339.
11. *Titchmarsh E. C.* Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Oxford: Clarendon press, 1946.
12. *Wintner A.* Stability and spectrum in the wave mechanics of lattices.— Phys. Rev., 1947, vol. 72, p. 81—82; On the normalization of characteristic differentials in continous spectra.— Phys. Rev., 1947, vol. 72, p. 516—517; On the location of continuous spectra.— Amer. J. Math., 1948, vol. 70, p. 22—30; Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator.— Amer. J. Math., 1947, vol. 69, p. 251—272; Duke Math. J., 1948, vol. 15, p. 53—67; *Hartmann P.*, *Wintner A.* An oscillation theorem for continuous spectra.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1947, vol. 33, p. 376—379.
13. *Weyl H.* Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen.— Math. Ann., 1911, Bd. 71, S. 441—469; Ueber die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung.— J. reine und angew. Math., 1912, Bd. 141, S. 1—11.
14. *Courant R.*, *Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. 2. Aufl. B., 1931, Bd. 1, T. 6, S. 4.
15. *Weinstein A.* Étude des spectres des équations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastiques.— Mém. sci. math., 1937, vol. 88.
16. *Aronszajn N.* Rayleigh-Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues. 1. Operators in a Hilbert space.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1948, vol. 34, p. 474—480; 2. Differential operators.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1948, vol. 34, p. 594—601.
17. *Carleman T.* Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes.— In: Förhandlingar Skandinaviska Matematikerkongressen. Stockholm, 1934, s. 34—44; Ueber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen.— Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, 1936, Bd. 88, S. 119—132.
18. *Pleijel A.* Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibration.— Ark. mat., astron. och fys., 1940, bd. 27A, N 13; Sur la distribution des valeurs propres de problemes régis par l'équation $\Delta u + \lambda k(x, y) u = 0$.— Ark. mat., astron. och fys., 1943, Bd. 29B, N 7; On Hilbert-Schmidt's theorem in the theory of partial differential equations.— Fysiograf. Sälsk. i lung förhandl., 1946, Bd. 14, N 2; Asymptotic relations for the eigenfunctions of certain boundary problems of polar type.— Amer. J. Math., 1948, vol. 70, p. 892—907.
19. *Minakshisundaram S.* A generalization of Epstein zeta functions.— Canad. J. Math., 1949, vol. 1, p. 320—327; *Minakshisundaram S.*, *Pleijel A.* Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds.—Canad. J. Math., 1949, vol. 1, p. 242—256.
20. *Bochner S.* Summation of derived Fourier series (An application to Fourier expansions on compact Lie groups).— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 345—356.
21. *Casimir H. B. G.* Rotation of a rigid body in quantum mechanics: Thesis. Leiden, 1931.
22. *Peter F.*, *Weyl H.* Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.— Math. Ann., 1927, Bd. 97, S. 737—755.
23. *Weyl H.* Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space.— Amer. J. Math., 1949, vol. 71, p. 178—205.
24*. *Bohr H.* Zur Theorie der fast periodischen Funktionen. 1.— Acta math., 1925, vol. 45, p. 29—127; *Neumann J. von.*— Almost periodic functions in a group. 1— Trans. Amer. Math. Soc., 1934, vol. 36, p. 445—492.
25. *Гельфанд И.*, *Райков Д.* Неприводимые унитарные представления локально-компактных групп.— Мат. сб. Н. С., 1943, т. 3, с. 301—316; Физ. журн. АН СССР, (1946), т. 10, с. 93—94; *Bargmann V.* Irreducible unitary representations of the Lorentz group.— Ann. Math. (2), 1947, vol. 48, p. 568—640; *Segal I. E.* Irreducible representations of operator algebras.— Bull. Amer. Math. Soc., 1947, vol. 53, p. 73—88.
26. *Weyl H.* Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Korpers.— Bend. Circ. mat. Palermo, 1915, vol. 39, p. 1—49.

* Я цитирую только две самые важные статьи. Дальнейшие ссылки смотри в [23].

ДОПОЛНЕНИЯ

ФЕЛИКС КЛЕЙН И СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА *

Многоуважаемые дамы и господа!

В эти торжественные дни Феликс Клейн вспоминается особенно живо всем нам, кому посчастливилось пройти с ним здесь в Геттингене вместе часть жизненного пути. Кажется, будто стоит он у порога и вот-вот войдет, улыбаясь своей немного чопорной, но необычайно доброй улыбкой, той самой улыбкой, которой он поощрял партнера к равноправному сотрудничеству, благодарил за самостоятельность в решении поставленных им задач, войдет и заговорит, сопровождая речь характерным движением рук, как бы сжимая поводья. Он вспоминается нам, ибо сегодня Геттинген и математика празднуют триумф дела его жизни, триумф того, что задумано и начато им, над претворением чего он трудился неустанно. И не о нем вести бы сегодня речь, а ему бы выступить перед нами с одним из своих блестящих докладов, в которых проявлялись его могучий гений и полный воли и творческой энергии характер! Выступить, подводя итоги и указывая прошедшие и грядущие связи идей и сил, взрастивших его творчество. Он не довел до конца своих замыслов, ибо по его ниве прошла неумолимая, всеразрушающая война. Его нет с нами, и нам остается лишь с благоговением хранить о нем благодарную память.

Мне хотелось бы нарисовать вам не образ могучего, творчески одаренного организатора, каким он, несомненно, был, направляя свою деятельность на то, чтобы вывести математику из культурной изоляции, содействуя установлению ее связей с физикой и техникой, оживлению и обновлению математических и естественно-научных исследований в средней и высшей школе, не образ талантливейшего педагога высшей школы, подобного которому не было в математике и вряд ли будет, нет, мне хотелось бы посвятить свою речь тому, чтобы показать, *какое место занимают в современной математике достижения Феликса Клейна и какую роль в ней играют его идеи и методы*. Кроме того, позвольте мне ограничиться чистой математикой. Я сознаю вполне, насколько я тем самым отступлю от идеала, которым руководствовался сам Клейн, погрешу против его стремления устанавливать и всячески стимулировать постоянное взаимодействие математики и ее приложений. Назвав в своих лекциях по истории математики Гаусса королем математиков, Клейн отметил, что в творчестве Гаусса сочетались первоклассные достижения во всех областях, за которые брался, с непостижимой разносторонностью; что в нем уравновешивались «*могучая сила математического творчества и строгость изложения со склонностью к приложениям, вплоть до тщательно проведенных наблюдений и измерений*» [1]. Однако если говорить совершенно от-

---

* Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart.— Naturwissenschaften, 1930, Bd. 18, S. 4—11. Перевод З. А. Кузичевой. Речь Г. Вейля на торжественном заседании Геттингенского математического общества по случаю открытия Математического института 3 декабря 1929 г.

кровенно, Клейн существенно меньше, чем Гаусс, обращался к приложениям. Именно это хотя бы отчасти может служить оправданием моего намерения ограничиться чистой математикой. Он выступал в приложениях лишь от случая к случаю и скорее как систематизатор, чем создатель. Его книга по теории волчка [2] представляется мне чем-то вроде образцового воплощения программы, которую он сам же и разработал, и уже поэтому не может соперничать со всем тем, что он создал в чистой математике и что в значительно более высокой мере отмечено печатью свободы и необходимости. Когда Клейн в 1882 г. сказал о своем небольшом сочинении по римановой теории алгебраических функций [3], что он написал ее «прямо-таки как физик», то тем самым превосходно охарактеризовал методы и дух своего эпохального произведения. Но Клейн не был физиком — он не был физиком и тогда, когда вывел свои фундаментальные теоремы существования на римановой поверхности, представив эту поверхность как однородный проводник, распределение электрических токов в котором однозначно задается источниками. Правда, в начале своего научного пути под влиянием своего учителя Плюккера — геометра и физика-экспериментатора — он именно *физику* считал целью своих научных исследований. Однако уже в студенческие годы в Бонне он составил себе план, осуществление которого предполагало основательное изучение различных отраслей математики. Физик, ознакомившись с ним, едва ли удержался бы от улыбки. Этот рейд во все области математики превратился затем в большую экспедицию, и надо признать, что он мастерски провел ее, только при этом он, разумеется, застрял в математике. *Чистая математика сделалась и навсегда осталась центром творческой личности Клейна.*

Все, что воплощено в какой-либо форме, существует в непрестанном единоборстве: с одной стороны, оно воплощает в себе нечто идеальное, объективное, отвечающее некоторой потребности, а потому необходимое, как если бы нечто трансцендентное, желающее воплотиться в определенной форме, довлело на человека, превращая его в рупор откровения; с другой стороны, то, что воплощено в форме, всегда несет на себе отпечаток истории духа, оно неотделимо от момента создания, от исторического процесса, не дает законсервировать себя как застывший результат. Наука как учение об истинном — высокая объективная ценность, которой смиренно служит человек, и одновременно она — ветвь человеческой деятельности, ради продуктов которой нельзя приносить в жертву саму жизнь. Бог, как вечно законченное и вечно становящееся [4]. В математике особенно велика опасность переоценить первую, объективную сторону: математик склонен к абсолютизации. Клейн был свободен от такого ослепления. Лекции по истории математики 19-го века, прочитанные им во время войны, обнаруживают его огромное историческое чутье. Он зримо представлял себе все в исторической перспективе. Этим обусловлена его сдержанность по отношению к основаниям. Он охотно подчеркивал, что знание начинается, так сказать, в середине и теряется в неизвестности не только вверху, но и внизу. Наша задача — рассеивать тьму в обоих этих направлениях, а абсолютный фундамент, этот огромный слон, поддерживающий своими могучими плечами крепость истины, останется скорее всего лишь вымыслом [5].

Более скованным представляется мне Клейн в другом отношении. Он отличался непредвзятостью и содействовал многосторонним связям с приложе-

ниями в эмпирико-научной и технической сферах. Но надо иметь в виду, что наряду с этим математика *играет центральную роль в построении духовного мира.* Занятие математикой, как мифы, язык и музыка,— один из первоначальных видов творческой деятельности людей, в которых проявляется их глубочайшая человечность, духовная организующая воля и которые приводят их к выражению мировой гармонии. Клейна огорчало, что «немецкое общество, по-видимому, не в состоянии создать единую культуру, включающую точное научное знание как органичную и само собою разумеющуюся часть». Если сегодня в этом отношении, возможно, и намечаются какие-то перемены, то они, видимо, обусловлены прежде всего необычайно возросшим интересом к технике, формирующим точное мышление широких масс, хотя, наблюдая за подрастающим поколением, порой испытываешь в этом сомнение: я не раз замечал, что особенно недоброжелательное отношение к теоретическим познаниям, например в механике, проявляют именно те юноши, которые страстно отдаются мотоспорту. Во всяком случае, мне кажется несомненным, что в нас снова оживает тяга к духовному, или, если позволите, я предпочел бы давно изгнанное слово — к метафизическому [6]. В этом сказывается в первую очередь преобразующее влияние искусства — характерными здесь являются, например, спорная, но блестяще написанная книга Шпенглера или значительно более основательная «*Философия символических форм*» Кассирера [7]. Мощную поддержку им оказывает теория относительности. В этом же плане показательны: несравненно большее значение, которое придается теперь усилиям, направленным на понимание математики античности, скажем, в книгах «*Платон и пифагорейцы*» Эриха Франка или «*Классические произведения математики*» Шпейзера, а также такие личности, как рано умерший Грезер, которому мы обязаны реконструкцией «Искусства фуги» Баха [8]. Клейн по своей натуре был менее склонен к этой стороне человеческой деятельности, он тяготел к приложениям. Хотя смысл фундаментальных философских проблем был ему недоступен, тем больший интерес представляют его философские высказывания, отражающие общий духовный уровень человека столь редкой многогранности и продуктивности. Однако в этой области он остался прочно привязанным к догмам своего времени — эмпиризму и психологизму, ярким представителем которого является Мах; но именно безапелляционные эмпиристские воззрения последнего вызывают сегодня наибольшие возражения.

Наиболее замечательной чертой личности Клейна-ученого является его *страстное стремление добиться соединения, слияния* взаимопроникновения разнороднейших дисциплин. Это проявилось не только в области отношения математики к приложениям: более плодотворными были его результаты по объединению разных способов исследования и рассуждений в самой математике. И здесь в постижении глубоко скрытых внутренних взаимосвязей и взаимозависимостей он был просто гениален. В этом отношении было характерно уже его сочинение, с которым он 24-летним юношей вступил на свою первую профессорскую кафедру в Эрлангене. В 19-м столетии геометрия развивалась в нескольких направлениях, на первый взгляд далеких друг от друга. В «*Эрлангенской программе*» понятие группы преобразований является связью, охватывающей все разновидности геометрии, и одновременно выделяющей своеобразие каждой из них; в ней ставится вопрос: «*Что такое геометрия*?»,

и дается принципиальный ответ на него. Не менее характерен и способ, которым Клейн пришел к тому важному открытию, под знаком которого проводились геометрические исследования последующих пятидесяти лет. Испытывая настоятельную потребность в разностороннем общении, он никогда не замыкался в мире своих собственных идей. Не только в Германии, но и во Франции, Англии, Италии и Америке он установил многочисленные связи, которые, как правило, приводили к оживленной переписке и обмену мнениями. Он работал в постоянном общении с друзьями и учениками, щедро одаривая их из сокровищницы своих идей, и всегда был готов воспринять идеи, высказанные другими. В предшествующие Эрлангену годы академических странствий он изучал в Бонне и Геттингене у Плюккера и Клебша немецкую, а вскоре после этого в Париже, главным образом у Гастона Дарбу, французскую геометрию. Единую точку зрения на эти внешние противоположные научные направления он отыскивал вместе с норвежским математиком Софусом Ли, с которым подружился незадолго до того. Еще в 1832 г. в Париже в бессмертном письме, написанном накануне гибели — утром он пал на дуэли,— двадцатилетний буйный Галуа сообщил своему другу Шевалье, что обнаружил в конечных группах «подлинную метафизику» алгебраических уравнений. Его краткие наметки остались, однако, тайной за семью печатями. В 1870 г., как раз тогда, когда Клейн и Ли находились в Париже, Камил Жордан в своем большом «*Трактате о подстановках*» [9] сорвал эту печать таинственности и систематически обосновал теорию конечных групп преобразований. *С этих пор идея группы становится центральной в математическом творчестве Клейна*, понятие группы красной нитью проходят через все его работы. Его лекции об икосаэдре [10] — чудная симфония, в которой геометрия, алгебра, теория функций и теория групп сливаются в чарующую полифоническую мелодию. Оглядываясь назад, он говорил о времени, когда проводил эти исследования и родственные им исследования преобразований эллиптических модулярных функций 5-го, 7-го и 11-го порядков, как о счастливейшей поре своей математической активности. Это был период «*Mathesis quercupolitana*» (дубградский период) [11], как шутливо говорил деятельно сотрудничавший тогда с Клейном Гордан, с которым они часто встречались в лежавшем на полпути от Эрлангена до Мюнхена Эйхштадте. «*Соединить Галуа и Римана*» — был их пароль. Крейн несомненно оказал глубокое влияние на математиков последующих поколений, стремясь, раскрывать шлюзы, почти наглухо перекрывающие каналы математического мышления в разных областях математики. Правда, то и дело приходится слышать жалобы на все возрастающую специализацию в науке. Мне все же кажется, что в последние десятилетия положение в целом скорее улучшилось, чем ухудшилось. Ученый чаще всего становится трагической жертвой неумолимой судьбы: противоречия между постоянно растущим числом научных дисциплин и неизменностью интеллектуальной силы отдельной личности. Однако хочется думать, что и среди ученых нашего поколения не так уж мало всесторонне развитых личностей. Этим мы обязаны прежде всего примеру таких ученых, как Клейн. И если сегодня ученый нередко оказывается натурой более основательной и разносторонней, чем, скажем, художник, то это обстоятельство обусловлено, помимо всего прочего, тем, что в последние десятилетия, отмеченные кризисом, были поставлены под сомнение значение науки и значимость

ученого, в то время как личности художника нанесен значительный ущерб доходящим до абсурда превознесением и чуть ли не обожествлением искусства как прибежища последних мировых тайн.

Главным инструментом математической методики Клейна было *интуитивное понимание* (Verstehen), *позволяющее постигать глубоко скрытые взаимосвязи.* В своем блестящем докладе, посвященном Риману, он выразился так: «Чистая математика развивается благодаря приложению новых методов к старым проблемам: перед нами сами собой встают новые проблемы по мере того, как мы все лучше постигаем старые». Только родственный по духу исследователь мог подметить те особенности, который Клейн считает главными в личности Римана-ученого, и эту характеристику мы можем использовать для разъяснения личности самого Клейна: «Конечно, краеугольным камнем любой математической теории является непременное проведение доказательств всех ее утверждений [12]. Конечно, математика сама вынесла бы себе приговор, если бы она отказалась от вынужденных доказательств. Однако секрет гениальной продуктивности заключается в том, чтобы по-новому ставить вопросы, предугадывать новые теоремы, выводить важные следствия и обнаруживать взаимосвязи. Если бы математика не выдвигала новых точек зрения, не намечала новых целей, она очень скоро потеряла бы строгость своих логических рассуждений, пришла к застою, а вслед за тем и оскудению самого предмета. Тем не менее математика движется вперед главным образом теми, кто наделен интуицией больше, чем склонностью к проведению строгих доказательств. Нет сомнения в том, что Риман принадлежит к числу тех математиков последних десятилетий, кто по сей день оказывает самое деятельное влияние на математику». Клейн довел до совершенства врожденную интуитивную способность до мельчайших деталей прояснять обнаруживаемые им взаимосвязи. Это свое мастерство он внес и в работы, составившие лекции об икосаэдре, где оно проявилось во всем, включая тончайшие числовые выкладки. Но там, где оставалось усилием логики придать единую форму всем деталям, он не выдерживал до конца. К нему нельзя отнести девиз Гаусса: «*Nil actum reputans, si quid superesset agendum*» (не считать дело сделанным, если что-то остается доделать). Так он с несравненной силой предвидения обнаружил и установил теорему униформизации, а в реализации ее его опередил Пуанкаре. Правда, ее окончательное и полное обоснование заставило себя ждать еще 25 лет. Заметим, кстати, что теория аналитических функций стала ареной особенно острых состязаний, где решения, подобно экспедициям, штурмующим южный полюс, следуют друг за другом чуть ли не ежедневно: Абель и Якоби оспаривают друг у друга титул основателя *эллиптических*, Клейн и Пуанкаре — *автоморфных функций*. По меткой характеристике Харди, изобретательность и сила интуиции не уравновешивались у Клейна «*исполнительской мощью*» (executive power). Своеобразие Клейна нельзя, пожалуй, показать яснее, чем в контрасте с этим крупным математиком наших дней. На это противоположение указал сам Харди в своей краткой содержательной речи в Лондонском математическом обществе, сопоставив *жесткую*, *четко очерченную* [hard, sharp, narrow] теорию функций Бора, Ландау, Литтлвуда и *мягкую*, *расплывчатую* [soft, large, vague] теорию Биркгофа и Кобэ. Математическое остроумие само по себе, ловкие трюки доказательств, насилующие результаты, еще не созревшие для того, чтобы их можно

было осознать до самых истоков,— эти приемы пионеров, осваивающих математические пустыни, были совершенно чужды Клейну.

В чем секрет того мастерства, которым столь искусно владел Клейн? Если я не ошибаюсь, в главных чертах, хотя, возможно, и недостаточно полно, его можно охарактеризовать так: этот секрет состоит в умении находить и наиболее естественным образом отделять друг от друга различные свойства, присущие предмету, каждое из них в отдельности подчинять своей собственной, относительно небольшой и легко обозримой группе условий, после чего путем синтеза составить сложное целое. Итак, аналитическая часть, если ее мыслить теоретически завершенной, ведет прямо к *аксиоматическому методу*. Ярким примером тому может служить Эрлангенская программа Клейна — осмысление геометрических связей, начиная с самой широкой группы преобразований и последующего сведения к узким специальным группам; и по меньшей мере *однажды*, именно тогда, когда необходимо было защитить неевклидову геометрию наиболее ясным изложением, он вынужден был довести дело до горького конца, до аксиоматизации. В целом же он не был расположен к такой логической отточенности. Мы сталкиваемся здесь с другим видом единоборства, присущего человеческому творчеству: с единоборством между текущей, всеохватывающей и цепко держащей в своих объятиях жизнью материальной и процессом создания *чистой формы*, достигаемой в результате изолирования. Клейн инстинктивно противился такому изолированию; упорядочивая и анализируя, он не хотел застревать в метаниях. Он не хотел и склоняться к какой-либо из этих сторон. Это предрасположенность, эта konziliante Natur [13], как говорил о себе Гёте, единственно благоприятна для практической деятельности. Люди противоположного склада, которые будучи охвачены судорогой деловитости, предпочитают идти до самого конца по каждому проложенному пути, могут достичь подобной свободы лишь при условии, что они на следующем этапе отрекутся от результатов предшествующего своего творчества и в течение развития сами будут корректировать свою точку зрения. Однако, с другой стороны, способ мышления Клейна мешал ему полностью оценить аксиоматический метод как инструмент конкретных математических исследований. Из его поздних высказываний до нас дошли следующие: «Математика наших дней напоминает мне большой военный магазин в мирное время — витрины его заполнены оружием, замысловатая и искусная отделка которого, вызывая восхищение знатока, отодвигает на задний план и заставляет забыть происхождение и цель этих вещей, их способность поражать врага». В этом, пожалуй, есть немалая доля истины, тем не менее в целом с этой оценкой нельзя согласиться. Единоборство, о котором здесь уже говорилось, воплощается в основаниях математики в полной противоположности континуума и целого числа. Интуитивно непрерывное первично. Но установление единицы, выделение из непрерывного течения четко очерченной части — оставшееся неотделенным тем временем с нетерпением ожидает повторения этого процесса — есть начало всех начал сознательного творчества, начало всех начал самой математики. А очевидная первоначальность континуума, «континууальная основа», была специфическим источником интуитивных представлений Клейна, придав специфическую окраску всем его основным произведениям. В континууме берет начало охотно подчеркиваемая Клейном *противоположность приближенной и точной математики*. Если проследить за этой противоположностью до ее са-

мых последних оснований, то придем к точке зрения интуитивной конструкции в том виде, как ее принял Брауэр, и исходя из которой он так отчетливо выявил трудности в основаниях анализа. Следует все же сказать, что эти апории (затруднения) уже со времен античности сдерживали мысль о бесконечном; ими было навеяно, например, представление Лейбница о том, что телам присуще лишь явление, а не субстанциальное бытие, поскольку континуум может быть понят лишь как категория возможного, как возможный субстрат в процессе становления все точнее и точнее определяемых частей. Но Клейн и здесь предпочел не слишком вдаваться в такие тонкости, а довольствовался контрастом между теорией и практикой, который, с его точки зрения, следовало преодолевать средствами прикладной математики.

До сих пор я пытался обрисовать своеобразие Клейна так, как описывают какое-нибудь тело, обозначая его границы, а не сущность. Теперь вы должны дополнить это описание, представив себе, что пространство внутри этих границ заполнено исключительно плотно. Его *научную карьеру* мне хотелось бы сравнить с полетом праздничной ракеты. Плотным светящимся ядром она круто взмывает вверх, там внезапно взрывается огненными вихрями и поворачивает к земле, разливая вокруг сияющее изобилие: 1869—1882 годы — стремительный подъем, отмеченный интенсивнейшими, исключительно продуктивными исследованиями, сменяется периодом осмысления и изложения богатейших результатов, поистине грандиозной становится и его организационно-практическая деятельность. Поворотным пунктом стала катастрофа, разразившаяся, когда ему было 33 года; внешне она выразилась в тяжелом недуге, обострившемся на Пасху 1882 года. Нам живо рисуется, как он, уже готовый к возвращению домой с острова Нордерней, весь укутанный сидит на софе, измученный за ночь приступом астмы и видениями *теоремы о граничном круге* [14]. «Открытие этой теоремы,— говорил он,— видимо, было связано с напряжением всех сил, почти полностью исчерпавшим работоспособность и оставившим крайнее истощение». И он не побоялся добавить: «Тогда был разрушен внутренний центр моего продуктивного мышления». Нельзя без изумления и благоговения созерцать плоды поистине титанической деятельности, которыми одарил мир в последующие десятилетия этот в глубине души сломленный человек.

Понятие *группы*, как я уже отмечал, является организующим и цементирующим началом всех математических произведений Клейна, определяя своеобразие его методики и мастерства. Группы, скрытые феноменом *симметрии*, появились вначале не в науке, а в искусстве, прежде всего в орнаментике, достигшей высокого совершенства в древнем Египте. Проблема правильных тел явилась существенным стимулом греческой геометрии. Кеплер воспользовался симметрией — этим древнейшим символом совершенства — для проникновения в скрытую гармонию небесных сфер. Законы симметрии господствуют в царстве *кристаллов*. Симметрия выражается в группе преобразований, переводящих заданную фигуру как целое в себя. В данном пространстве допустимы не все преобразования фигур — плоских орнаментов, правильных тел, кристаллов, а лишь *подобные отображения*, оставляющие неизменными все связи, присущие самому пространству. За этими дискретными следуют *непрерывные группы изоморфных преобразований пространства в себя*, устанавливающие точный смысл понятия *однородности* пространства. Пространство и время как формы материального содержания мира именно однородностью

противопоставляются явлениям; благодаря своей однородности они становятся принципами индивидуализации, допуская существование разных индивидов с одинаковыми свойствами. Проблему уточнения характера однородности пространственно-временнóго мира мы обозначаем сегодня термином *теория относительности*. В своей Эрлангенской программе Клейн установил ту группу изоморфных преобразований, которая в области формализованной математики может считаться подлинным принципом классификации различных геометрий.

Также и в *алгебре* господствует понятие группы. Проблему разрешимости уравнений n-й степени можно сформулировать так: пусть n чисел или точек комплексной числовой плоскости заданы вместе, без учета их порядка, требуется выделить из этого набора отдельную точку. Объектом релятивистской проблемы является здесь не непрерывная область, состоящая из бесконечного количества точек, а этот набор из n чисел: возможно ли отличить какое-нибудь одно из этих чисел от остальных, руководствуясь объективными алгебраическими признаками? Разумеется, теперь, в противоположность ситуации, имеющей место в однородном пространстве, числовая область характеризуется тем, что каждый ее член является *индивидуумом*, отличающимся от всех остальных своими объективными свойствами; именно на этом основывается употребление в континууме чисел в качестве координат, т. е. символов для различения. Но в алгебре имеют силу лишь свойства и отношения, зависящие от алгебраических операций $+$ или $\times$, а отношения «больше», «меньше» для величин из рассмотрения исключаются. При аксиоматическом основании имеется не одно царство чисел, а бесконечно много числовых образований, каждое из которых является самостоятельным миром; в таком случае мы нуждаемся в насильственном отказе от указанных отношений, поскольку «числа» этих абстрактных систем вовсе не связаны подобными отношениями. Показывается, однако, что в чистой алгебре имеются числа, которые утрачивают значительную часть своей индивидуальности, и *теория Галуа* есть не что иное, как *теория относительности* числовых полей, или, например, рассмотренных выше наборов из n чисел. В основаниях проективной геометрии исключительно красивой оказывается относительность, выявляющая единство алгебры и геометрии. Простейшая аксиома инцидентности без какого-бы то ни было требования непрерывности дает числовую систему в смысле абстрактной алгебры, относящуюся к проективному пространству. Относительность таких проективных пространств проявляется двояко: во-первых, в произвольности выбора системы проективных координат, состоящей из любых пяти точек, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости; во-вторых, в группе изоморфных преобразований числового поля в себя, которые приводят к своеобразному преобразованию пространства, оставляющему систему координат на месте [15]. Если это поле является континуумом всех вещественных или комплексных чисел, то они совпадают, о чем и говорит так называемая основная теорема проективной геометрии [16].

Введением понятия *автоморфной функции* Клейн подчинил *теорию функций* диктату группы. Если область существования некоторой аналитической функции односвязна, то, как показал Риман, ее можно считать внутренностью круга. Дробно-линейное преобразование — единственное конформное, т. е. сохраняющее аналитичность, отображение, переводящее внутренность круга в себя. Поэтому автоморфной функцией можно считать функцию такую, которая инвариантна относительно группы линейных преобразований независимых переменных.

Под это понятие подпадают важнейшие функции: показательные, эллиптические, модулярные,— оно подчеркивает одну из существеннейших их особенностей. Каждая фигура со специальными свойствами симметрии порождает определенный класс автоморфных функций, если ее сделать той почвой, на которой произрастают автоморфные функции. А *теорема униформизации* Клейна раскрывает еще большую значимость понятия автоморфной функции. Корень этой значимости — в той роли, которую играет понятие группы в *топологии* — дисциплине, изучающей свойства непрерывного, сохраняющиеся при всех возможных деформациях.

Если какой-нибудь процесс распространяется в континууме так, что его переход из некоторой точки в ее окрестность однозначно определяется обстановкой в этой точке, например в случаях интегрирования, или растворения неоднородных красок, или образования поверхности жидкости, то он, невзирая на однозначность в малом, вовсе не обязательно приведет к некоторому состоянию, определенному рассматриваемой структурой. Если в качестве примера такой структуры взять замкнутую кривую C, то после однократного обхода этой кривой процесс может оказаться в некотором другом состоянии, на каком-то другом уровне над исходной точкой. В таком случае однозначность выявляется лишь тогда, когда C мыслится в виде спирали, вытянутой над кривой бесконечным числом витков. Продвигая каждую точку спирали, скажем, на один или два полных витка, мы получим отображение спирали на себя, тождественное относительно проектирования на C, т. е. ни одна точка C при этом не сдвигается с места. В этом смысле можно сказать, что кривая, принятая в качестве носителя процесса описанного вида, обладает *скрытой топологической симметрией*; группа, выражающая эту симметрию, заключается в «преобразованиях скольжения» спирали, которые скрыты за тождественным преобразованием кривой C. Распространение этой идеи на случай поверхности, по своему характеру способной быть носителем аналитических функций, приводит к кругу идей, связанных с теоремой униформизации.

Последняя область, в которой теории групп следует сказать свое веское слово, открылась в последние годы в *квантовой теории*. Все электроны тождественны между собой; этого загадочного обстоятельства, пожалуй самого глубокого высказывания, которое мы в настоящее время способны сделать о природе, мы не можем вывести в качестве необходимого следствия из нашей теоретической картины мира [17]. Но отсюда следует, что законы, которым подчиняются отдельный атом или молекула, инвариантны относительно перестановок электронов. Поэтому в атомной физике, наряду с изотропностью пространства, решающую роль играет группа этих перестановок.

У Клейна понятие группы выступает во всех перечисленных выше аспектах, разумеется за исключением последнего, связанного с квантовой механикой, и образует канву всех его произведений. Я добавляю еще несколько замечаний относительно отдельных нитей, вплетенных в эту канву.

Эрлангенская программа, насколько я представляю, достигает своего полного проявления именно в *теории групп линейных преобразований и их инвариантов*. Более ранним примером является попытка Кэли свести каждую группу линейных преобразований к полной линейной группе, используя «абсолюты» [18]. К этому искусному приему часто прибегал и Клейн. Таким об-

разом, проективное пространство получается из аффинного присоединением бесконечно удаленной плоскости. Теория инвариантов ортогональных групп понимается как теория инвариантов полных линейных групп, а в качестве абсолюта ко всем рассматриваемым формам добавляется некоторая фиксированная квадратичная форма (ортогональная группа состоит именно из тех линейных преобразований, которые не изменяют эту форму). Это было и аналитическим одеянием, в котором Эйнштейн представил свою теорию относительности. Но этот метод не является ни общеупотребительным, ни по-настоящему целесообразным, так же как принцип проективного порождения Штейнера, согласно которому любой полином может быть представлен определителем, составленным из полиномов низших степеней [19]. Лишь теперь мы начинаем признавать суверенное положение каждой группы. Это не замедлило сказаться на *общей теории относительности и на инфинитезимальной геометрии*. Вспомним для примера четырехмерный мир с его «метрическим полем», вызывающим, по мнению Эйнштейна, явление гравитации! Произвольными здесь являются четыре координаты — непрерывные функции, значения которых позволяют отличать друг от друга отдельные точки этого мира. Его законы поэтому должны быть инвариантны относительно *группы всех непрерывных преобразований координат*. Метрика в некоторой точке P выражается в том, что из реперов, заданных в точке P и состоящих из четырех векторов, выделяется класс декартовых. Переход от одного декартова репера к другому осуществляется с помощью *группы ортогональных преобразований*. Именно эта группа определяет природу нашего многообразия, поэтому при формальном задании вместо описания многообразия можно просто указать конкретную группу. В качестве *локального репера* мы должны неким актом произвола выбрать один из равноправных декартовых реперов — точно так же, как в основу аналитического представления мы должны были положить одну из возможных равноправных систем координат. Поэтому объективные законы инвариантны также относительно произвольных «вращений» локальных реперов, осуществляемых в разных точках совершенно независимо друг от друга. Такая аналитическая формулировка общей теории относительности, при которой метрика характеризуется локальными реперами, выявляется с необходимостью, когда кроме электромагнетизма рассматриваются еще *материальные волны* Шредингера—Дирака [20]. Одновременно здесь обнаруживаются *границы приложимости эрлангенской программы в инфинитезимальной геометрии*. Кроме ортогональной группы, которая описывает устойчивую *природу* многообразия, мы имеем «*ориентацию*» — в нашем примере ориентацию локального репера в каждой точке относительно системы координат, или того, что является инвариантным в упомянутом выше смысле. Эту проблему ориентации не обязательно преподносить в форме «*теории перенесений*» [21], развитой главным образом Картаном и Схоутеном. Я думаю, что Клейн был бы последним, кто стал бы отрицать эти границы своей теоретико-групповой программы. Ибо он сам предпринял энергичное наступление на проблемы, выходящие в теории алгебраических уравнений за пределы групп Галуа.

Для того чтобы получить «*сплав Галуа и Римана*», достигший вершины в теореме униформизации, Клейн должен был не только проникнуть в тогда еще труднодоступный мир идей Римана, но и *свободно владеть его фундаментальным*

понятием — понятием римановой поверхности; надо было не только владеть этим понятием как средством наглядного представления многозначных функций, но и сделать его действительно отправным пунктом своей теории. Риманова теория алгебраических функций и их интегралов глубоко укоренена в континууме; Риман извлек функции и их закономерности из непрерывного точечного многообразия римановой поверхности, топологических свойств, присущих ей как *поверхности*, и конформных свойств, которыми она обладает как *риманова поверхность*. На этом пути Клейн достиг самой высокой вершины, которая, наконец, открыла весь горизонт,— униформизации.

Для метода Римана не является существенным то, что исходным пунктом является алгебраическое уравнение и определяемая им алгебраическая функция; теория имеет силу для *любой аналитической функции*. Не обязательно также мыслить риманову поверхность в форме, соответствующей алгебраическому уравнению, т. е. как многолистную поверхность, простирающуюся над плоскостью независимого переменного. Пожалуй, даже важнее проводить построение формально, когда оно основано на нормальной форме неевклидова двумерного кристалла, которая получается униформизацией, впрочем, эта задача до сих пор еще недостаточно решена. Группу перестановок корней алгебраического уравнения можно заменить произвольной *группой монодромии*, составленной из линейных преобразований; в своей работе о гипергеометрических рядах Риман уже вступил на путь этих обобщений. Для того чтобы понять ситуацию, ему пришлось проникнуть в существо более общих и легче обозримых связей. *Так континуум и прежде всего топология становятся важнейшим инструментом математического познания*. Вследствие интуитивной первоначальности континуума этот метод также пригоден как для открытий, так и для обобщений.

Тем труднее строгое обоснование. Ибо континуум столь близок очевидности, что представляется не подвластным приемам логики. Потому-то Вейерштрасс и некоторые другие предпочти путь *непосредстввнного алгебраического построения*, который они воспринимали как более утомительный, зато более надежный. В одном из писем Шварцу Вейерштрасс писал: «Чем больше я размышляю над принципами теории функций, а делаю я это непрестанно, тем тверже становится мое убеждение, что ее следует воздвигать на фундаменте алгебраических истин и что поэтому неверен способ, при котором наоборот для обоснования более простых и фундаментальных алгебраических положений принимается, говоря кратко «трансцендентное», какими бы подкупающими ни представлялись на первый взгляд, например, рассуждения, руководствуясь которыми Риман открыл столько важнейших свойств алгебраических функций». Мы должны сегодня сказать, что Вейерштрасс остановился на полпути, ибо хотя он и строит функции алгебраически, тем не менее в качестве коэффициентов он принимает не анализируемый алгебраически континуум обычных комплексных чисел. А вместо этого континуума при последовательном алгебраическом подходе мы принимаем произвольное числовое поле в смысле абстрактной алгебры. Вместе с теорией алгебраических чисел все здание перемещается на общий аксиоматический фундамент. К новой точке зрения на теорию числовых полей Гильберт и в самом деле пришел, отправляясь от аналогии с ситуацией, обнаруженной Риманом в области алгебраических функций. Правда, аналогия совершенно бес-

полезна для доказательства [22]. В избранном Вейерштрассом направлений господствующей становится *теория абстрактных числовых полей и их алгебраических расширений*, с точки зрения которой надо осмысливать предложенный им частный случай — алгебраические функции с произвольными комплексными коэффициентами. Общность предпосылок и аксиоматизация и здесь позволяют отказаться от вычислений, проводимых вслепую (blinden Rechnung), и разлагать сложные сущности на простые части, доступные несложным заключениям. Программа абстрактной аксиоматической алгебры начала развертываться в глубоких работах Дедекинда и Кронекера, однако вся значимость этого метода как средства постижения математических взаимосвязей осознана лишь в наши дни благодаря усилиям американской школы Диксона и Веддерборна, Штейница в Германии, Эмми Нётер и ее кружка, а также Артина. Правда, покоренной Клейном с помощью его «топологического метода» (как я позволю себе называть его для краткости) вершины униформизации, возвышающейся над областью абелевых (коммутативных) групп, в абстрактной алгебре достичь все еще не удалось. Здесь будущему еще предстоит ответить на многие вопросы [23].

Эти *оба способа понимания — топология и абстрактная алгебра* — кроются в глубинной сущности математической природы и ни одному из них не следует отдавать предпочтения, как это делал Вейерштрасс. Однако эти подходы плохо уживаются друг с другом. Что легко доступно одному, для другого — тайна. С каждой из этих точек зрения такие классические теории, как теория алгебраических функций, выглядят совершенно по-разному. Невозможность служить двум этим господам сразу я испытал на себе, занимаясь приложением теории групп к квантовой физике. Прекрасный пример тому дают также исследования Ван дер Варденом принципов исчислительной геометрии, которую он представил в свете абстрактной алгебры и которая совсем недавно истолковывалась в духе чисто топологических теорем о точках пересечения. Всюду, где могут быть использованы топологические методы, они и сегодня оказываются могущественными [24].

Если бы я должен был в заключение перечислить то, что мне представляется *наиболее действенным и значительным из достигнутого Клейном в чистой математике*, то я назвал бы следующее:

Он заменил установленное проективной школой понимание *геометрии в узком смысле* на более широкое и свободное представление о сущности геометрии. Ему предшествовал здесь лишь Мёбиус, сделавший первые робкие шаги в этом направлении. Теперь *теория конформных отображений* и *топология*, как подобает, входят в сферу влияния геометрии, именно в этих областях сегодня наиболее энергично пульсирует геометрическая жизнь. Представление Клейна о геометрии есть не что иное, как *теория относительности* в ее всеобщем, математически формализованном понимании. Он понял и применил *группу* как великий организующий и упрощающий принцип в алгебре, геометрии и анализе.

Взаимодействие этих ветвей математики с теорией групп он с исчерпывающей полнотой проанализировал на в высшей степени интересном *конкретном примере*.

Он творчески переработал основные идеи *римановой теории функции*, выводя их из наглядных физических соображений.

Теорией автоморфных функций и их применением к *униформизации* он достиг подлинной вершины римановой теории функций и тем самым поставил, исходя из топологического подхода, целый круг новых проблем, которые с точки зрения теории функций далеко не исчерпаны и сегодня, а к их осмыслению с точки зрения абстрактной алгебры вряд ли даже приступили.

Таким образом, Клейн, печатью гения которого отмечена целая эпоха, продолжает оказывать мощное воздействие на современную математику, развивающуюся под знаком теории групп, топологии и абстрактной алгебры. Пламя, зажженное им — не елейный светильник педантичной традиции, оно согревает горшки всех математических кухонь и горит в горнах всех математических кузниц, делая как великую, так и малую повседневную работу. Его труды продолжают воздействовать на нас, его имя не будет забыто.

ЭММИ НЁТЕР*

Весть о скоропостижной кончине Эмми Нётер, последовавшей в субботу, 14 апреля, была с глубокой печалью встречена ее друзьями, живущими в Америке. Казалось, что она хорошо перенесла операцию по причине опухоли, и мы полагали, что дело идет на поправку, как вдруг внезапное осложнение раскрутило процесс в обратном направлении, и уже через несколько часов наступила смерть. Эмми являла собой образец жизненной силы; она так прочно стояла на земле, обладала таким крепким здоровьем, таким чувством юмора и жизненным мужеством, что все мы были совершенно не готовы к тому, что произошло. Математический талант ее достиг самой вершины; ее богатая творческая фантазия и превосходное владение техникой, пришедшее к ней с опытом, достигли стадии совершенства и гармонического равновесия. Она охотно принималась за разработку новых задач. И вдруг — конец, ее голос смолк, ее работа внезапно прервалась.

Туда, туда, вниз, в темноту могилы
Спокойно сходят они — прекрасные, нежные, добрые;
Тихо спускаются они — умные, способные, храбрые...
Я знаю это. Но я против. Я не хочу смириться с потерей.

Нежелание смириться с понесенной утратой, аналогичное тому, о котором говорится в процитированном мною стихотворении Эдны Миллэй «Панихида без музыки» [1], переплетается у нас со скорбью — в этот час, когда мы собрались, чтобы почтить память нашего товарища, вспомнить ее жизненный путь и работу, ее человеческие качества.

---

* Emmy Noether.— Scr. math., 1935, vol. 3, p. 201—220. Перевод А. П. Василевича (печатается с сокращениями). Текст траурной речи, произнесенной 26 апреля 1935 г. в Гудхард Холле колледже в Брин Мор.

Я не могу рассказать много о внешней стороне ее жизни: находясь вдали от ее родины, от мест, где она жила и работала в течение нескольких десятилетий, невозможно получить всю необходимую информацию. Она родилась 23 марта 1882 г. в небольшом южнонемецком университетском городке Эрлангене. Ее отец, Макс Нётер, сам был выдающимся математиком, который сыграл важную роль в развитии теории алгебраических функций, являясь главным представителем школы алгебраической геометрии. В 1875 г. он стал профессором Эрлангенского университета и оставался на этом посту вплоть до своей смерти в 1921 г. Кроме Эмми, в семье рос еще ее брат Фриц, который был на два с половиной года младше ее. Впоследствии он занялся прикладной математикой и до недавнего времени был профессором Technische Hochschule в Бреслау, а затем, вследствие тех же трагических обстоятельств, которые положили конец карьере Эмми в Геттингене, он был вынужден переехать в Сибирь в Томск для работы в научно-исследовательском Институте математики [2]. Семья Нётеров представляет собой яркий пример наследования математических способностей; наиболее блистательной иллюстрацией этого феномена является династия базельских гугенотов Бернулли.

Бок о бок с Нётером работал в Эрлангене математик Гордан, который был его близким другом и, как и сам Нётер, вышел из школы Клебша. Гордан приехал в Эрланген немного раньше, в 1874 г., и тоже был связан с университетом вплоть до своей смерти в 1912 г. Под его руководством Эмми в 1907 г. написала диссертацию по теме «О полных системах инвариантов для тернарных квадратичных форм»; эта работа проникнута духом Гордана и несет отпечаток его идей. Подробный некролог о Гордане, включающий анализ его творчества, был написан для журнала «Mathematische Annalen» Максом Нётером совместно с Эмми. Если не считать отца, Гордан в юные годы Эмми был, по-видимому, одним из самых близких ей людей — вначале как друг семьи, а затем и как математик; она питала к нему глубокое уважение, несмотря на то, что ее собственный математический вкус стал развиваться совсем в другом направлении. Насколько я помню, его фотография украшала стену ее кабинета в Геттингене. Эти два человека — отец и Гордан — определяли атмосферу, в которой росла Эмми, поэтому я попробую сказать несколько слов и о них.

Риман разработал теорию алгебраических функций одной переменной и их интегралов (так называемых абелевых интегралов) с помощью трансцендентного теоретико-функционального метода, основанного на принципе минимума теории потенциала, которому он присвоил имя Дирихле. Он же обнаружил чисто топологическую подкладку всего разнообразия теоретико-функциональных соотношений, которые составляли эту область (строгое доказательство принципа Дирихле, который казался столь очевидным с физической точки зрения, было дано лишь 50 лет спустя Гильбертом). Оставалась еще задача заменить и подкрепить его трансцендентные доказательства существования явной алгебраической конструкцией, отправляющейся от уравнения алгебраической кривой. Вейерштрасс решил эту задачу (в своих лекциях, опубликованных позже в подробном изложении) своим собственным методом — наполовину теоретико-функциональным, наполовину алгебраическим; однако Клебш перенес идеи Римана в геометрическую теорию алгебраических кривых, и когда он умер совсем молодым человеком, его дело продолжил Нётер: ему удалось возвести законченное

здание алгебраической геометрии кривых на основе так называемой теоремы Нетера об остатках. Это направление исследований было продолжено позднее, преимущественно в Италии; источник, открытый Нётером, все еще фонтанирует обильным потоком исследований; это могут подтвердить присутствующие среди нас коллеги, например Лефшец и Зарисский. Впоследствии благодаря работам Дедекинда и Вебера, с одной стороны, и Гензеля и Ландсберга — с другой, наряду с трансцендентным методом Римана и алгебро-геометрическим методом Нетера стала развиваться арифметическая теория алгебраических функций. Эмми Нётер была ближе всего именно к этому последнему направлению. Краткое изложение арифметической теории алгебраических функций, которая соответствовала основным понятиям в параллельных теориях, было опубликовано ею в 1920 г. в журнале «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung». Тем самым она дополнила известную совместную публикацию Брилля и ее отца об алгебро-геометрической теории, появившуюся в 1894 г. в одном из первых номеров того же журнала. Теорема Нётера об остатках была позднее включена Эмми в ее общую теорию идеалов в произвольных кольцах. Эта научная близость отца и дочери была поистину прекрасной и приносила всем радость; Эмми стала в известном смысле его преемником в алгебре, но заняла в ней самостоятельное место, имея свои собственные независимые взгляды на общие проблемы и на частные задачи. Если судить по впечатлению, которое я вынес из чтения работ Нётера и в особенности по тем многочисленным некрологам, которые он писал для «Mathematische Annalen», он был очень умным, добросердечным и гармоничным человеком, имевшим разносторонние интересы и великолепное образование.

Гордан был человеком совсем другого типа. Чудаковатым, импульсивным и односторонним. Большим любителем прогуляться и поговорить, причем он предпочитал такие прогулки, которым сопутствовали частые остановки в пивных барах или кафе. Он мог идти с друзьями и тогда сопровождал свои рассуждения энергичными жестами, совершенно не обращая внимания на окружающих. Если же он был один, то имел обыкновение бормотать себе под нос, решая какие-нибудь математические задачи; забавы ради он производил в уме сложнейшие вычисления. В нем всегда было что-то от «вечного студента» образца 1848 г.: эта манера носить мантию, курить табак и пить пиво; однако это впечатление скрашивалось его необыкновенным чувством юмора и силой ума. Когда ему приходилось кого-нибудь слушать — в аудитории или на собрании — он всегда полудремал. Как математика Гордана нельзя равнять с Нётером, да он и вообще был ученым совсем другого рода. Сам Нётер венчает его характеристику короткой фразой: «Er war ein Algorithmiker» [3]. Его сильной стороной было придумывание формальных процессов и проведение для них вычислительной работы. У него есть такие труды, в которых на протяжении двадцати страниц беспрерывно идут формулы, без единого слова текста; говорят, что в своих работах он вообще писал одни формулы, а текст добавляли его друзья. Нётер говорил о нем: «Формула всегда и везде была необходимой поддержкой для формирования его мыслей, его заключений и его способа выражения... В своих лекциях он тщательно избегал всяких фундаментальных определений концептуального характера — даже таких, как предел».

Как и Нётер, Гордан принадлежал к числу наиболее близких сотрудников Клебша; совместно с Клебшем он написал книгу по абелевым интегралам. Впоследствии он обратился к теории инвариантов, что более соответствовало его таланту к формализации. В этой области он внес существенный вклад в развитие так называемого символического метода; именно с помощью этого вычислительного метода, дававшего явную конструкцию, ему удалось доказать конечность рационального целого базиса для бинарных инвариантов. Через несколько лет Гильберт доказал более общую теорему для произвольного числа переменных, применив совершенно другой подход, специфически гильбертовский — целиком отказавшись от всего аппарата символического подхода и подойдя к проблеме настолько непосредственно, в лоб, насколько это было возможно. Ex ungue leonem [4] — молодой лев Гильберт показал свои когти. Поначалу это было, однако, только доказательством существования, не приведшим в действительности ни к какой финитной алгебраической конструкции. Этим и объясняется характерное для Гордана восклицание: «Это же не математика, это теология!» Что же в таком случае сказал бы он о более поздней «теологии» своей бывшей ученицы Эмми Нётер, которой претили всякие вычисления и которая работала на гораздо более высоком уровне абстракции, чем тот, до которого осмеливался подниматься Гильберт!

Однажды Гордану пришло в голову, что существует формальная аналогия между бинарными инвариантами и схемами валентных связей в химии — та самая аналогия, которая поразила Сильвестра за много лет до этого, когда он искал, чем бы проиллюстрировать теорию инвариантов, чтобы сделать ее понятной для неподготовленной аудитории; этой теме посвящена статья Сильвестра в первом томе «American Journal of Mathematics» — журнала, основанного им в университете Джона Хопкинса. Гордан, по-видимому, не знал о своем предшественнике. Как бы там ни было, но, находясь во власти своего небольшого открытия, он предлагает открыть во всех университетах Германии кафедры по новой науке — «математической химии». Я упоминаю этот эпизод, чтобы проиллюстрировать импульсивность Гордана и отсутствие у него стремления к анализу. Между прочим, современная квантовая механика не так давно преобразовала эту аналогию в настоящую теорию, использовав бинарные инварианты как математический инструмент для описания разных валентных состояний молекул в спиновом пространстве [5].

Искрометный Феликс Клейн, чей математический гений вспыхнул от трения систем идей Римана и Галуа, провел короткое время в Эрлангене еще до того, как родилась Эмми; здесь он провозгласил свою «эрлангенскую программу», но вскоре перебрался в Мюнхен. Именно он вдохновил Гордана на исследования в области теории инвариантов, которые находились в круге идей книги Клейна об икосаэдре и смежных вопросах теории алгебраических уравнений. Даже после того как судьба разлучила их, оба они продолжали поддерживать интенсивное научное сотрудничество — довольно странная пара, если учесть, что Гордан был одержим формализмом, а Клейн полностью доверялся интуиции. Клейновская проблема форм — главная цель их совместных изысканий — остается животрепещущей и в наши дни; совсем недавно д-р Брауэр предложил совершенно новый подход, позволяющий еще глубже войти в эту проблему: он приложил к ней методы гиперкомплексных число-

вых систем и их представлений, которые составляли основную область научных усилий Эмми Нётер в последние 6—7 лет.

Кажется достаточно странным, что такой формалист, как Гордан, был тем математиком, который дал первый толчок математической деятельности Эмми. Трудно представить себе более разительный контраст, чем тот, который существует между ее первой научной работой — диссертацией, и более поздними, зрелыми работами: если первая представляет собой яркий образец формальных вычислений, то последующие — не менее яркий пример концептуального аксиоматического мышления в математике. Ее диссертация кончается таблицей, содержащей полную систему ковариантных форм для данного тернарного уравнения четвертого порядка; эта система включает 331 форму в символическом представлении. Подобная работа вызывает благоговейный трепет; однако боюсь, что сегодня мы отнесли бы ее к числу тех достижений, о которых сам Гордан однажды сказал (в ответ на вопрос о пользе теории инвариантов): «О, она, безусловно, очень полезна: ведь по ней можно написать много диссертаций.»

На так-то легко нарисовать в американской аудитории истинную картину той обстановки в Германии, в которой росла Эмми Нётер, находясь в Эрлангене; нынешнее поколение Германии, возможно, имеет о том времени еще меньшее представление. Невозмутимая стабильность бюргерской жизни в ее случае еще больше усиливалась благодаря тому обстоятельству, что М. Нётер (а также и Гордан) столь длительный срок безвыездно работали в одном и том же университете. Осмелюсь утверждать, что время их настоящих творческих удач прошло, хотя, конечно, они оставались продуктивными математиками; в этом смысле атмосфера, окружающая Эмми, тоже несла на себе отпечаток однообразия. Далее, общую картину надо дополнить существованием высокого престижа твердо установленных духовных ценностей, основанных на хорошем образовании, глубоком и искреннем живом интересе ко всем высшим достижениям интеллектуальной культуры и на хорошо развитой способности наслаждаться этими достижениями. В семье Нётеров, по-видимому, царила исключительно теплая и дружелюбная атмосфера. От самой Эмми Нётер, если можно так выразиться, тепло исходило, как от буханки свежего хлеба. Излучаемое ею тепло было ясным, успокаивающим и полным жизни. Нынешнее поколение обвиняет те времена в отсутствии нравственной искренности, в стремлении спрятаться за мир и покой буржуазного общества, за забвение тех созидательных, но страшных сил, которые определяют судьбу человека; больше того, те времена критикуют еще за попытку закрыть глаза на противоречие между духом истинного христианства, которому на словах все были привержены, и реальной действительностью частной и общественной жизни. Вместе с тем нельзя отрицать, что широкие круги немецкого общества (включая и семью Нётеров) питали искреннее уважение к духовным ценностям, высокой интеллектуальной культуре, добросердечности и душевной теплоте — и это несмотря на бытовавшие в этой среде сентиментальность, вагнерианство и мещанство плюшевых диванов.

Эмми Нётер, как и полагалось молодой девушке, принимала участие в домашней жизни: убирала и готовила, ходила на танцы. Казалось, что ей была уготована судьба обычной женщины, если бы не одно обстоятельство:

как раз в это время в Германии для девушек появилась возможность делать научную карьеру, не испытывая слишком большого противодействия со стороны. По своей натуре она не была борцом: она охотно принимала жизненные обстоятельства такими, какими они были. Но вот она стала математиком. Ее зависимость от Гордана продолжалась недолго; он дал ей начальный толчок, но не оказал сколько-нибудь продолжительного научного влияния. И все-таки именно математическая атмосфера Эрлангена сделала ее алгебраистом. Гордан вышел в отставку в 1910 г. Его сменил вначале Эрхард Шмидт, а в следующем году — Эрнст Фишер. Областью интересов Фишера была опять-таки алгебра и, в частности, теория исключения и теория инвариантов. Мне думается, что он оказал на Эмми Нётер гораздо более существенное воздействие, чем Гордан. Под его руководством она перешла от формальных позиций Гордана к гильбертовскому методу исследований. В своих работах этого периода она очень часто ссылается на беседы с Фишером. Этот период продолжается вплоть до 1919 г. Основной интерес ее в это время сосредоточивается на конечных рациональных и целых базисах. Эмми Нётер дает доказательство конечности для инвариантов конечной группы (не пользуясь общей теоремой Гильберта о базисе для идеалов), для инвариантов лишь с целыми коэффициентами и, наконец, приступает к решению того же вопроса одновременно с решением вопроса о состоящем из независимых элементов минимальном базисе для полей рациональных функций.

Уже в Эрлангене, начиная примерно с 1913 г., Эмми эпизодически читает лекции, заменяя отца во время его болезни. К тому времени она, видимо, успела побывать и в Геттингене, но, как я думаю, она просто навещала там брата Фрица. По крайней мере его я помню в это время гораздо лучше, чем ее (в 1910—1913 гг. я преподавал в Геттингене в качестве приват-доцента). Во время войны в 1916 г. Эмми окончательно перебралась в Геттинген; ей удалось остаться здесь благодаря прямому вмешательству Гильберта и Клейна. Гильберт в то время с головой ушел в общую теорию относительности, да и для Клейна теория относительности и ее связь с его старыми идеями Эрлангенской программы была последней вспышкой интереса к математике и стимулом для индуктивной работы. Подтверждением последнего служит второй том его истории развития математики в XIX в. И Гильберт, и Клейн были рады приезду Эмми, которая могла помочь им своими познаниями в области инвариантов. Для двух важнейших аспектов общей теории относительности она предложила в то время правильную и универсальную математическую формулировку: во-первых, сведение задачи о дифференциальных инвариантах к чисто алгебраической задаче путем использования «нормальных координат»; во-вторых, тождества между левыми частями уравнений Эйлера вариационной задачи, возникающие, когда (кратный) интеграл инвариантен относительно группы преобразований, включающих произвольные функции (тождества, которые содержат теоремы сохранения энергии и момента в случае инвариантности относительно произвольных преобразований четырех мировых координат) [6].

Еще до окончания войны Гильберт пытался добиться «хабилитации» [7–8] Эмми на философском факультете Геттингенского университета. Выступая на заседании факультета в ее поддержку, он произнес слова, ставшие затем ши-

роко известными: «Я не понимаю, почему пол кандидата должен быть аргументом против присуждения ему звания приват-доцента. В конце концов, здесь университет, а не баня». Возможно, эти его слова только раззадорили противников. Как бы там ни было, Эмми все же читала лекции в Геттингене: официально считалось, что их читает сам Гильберт. В 1919 г. после окончания войны и провозглашения Республики, обстановка изменилась и хабилитация Эмми стала возможной. В 1922 г. последовало присвоение ей звания «nicht-beamteter ausserordentlicher Professor» [9]. Это было чисто формальное звание, не налагавшее никаких обязанностей, но и не дававшее заработка; некоторой компенсацией послужило получение ею Lehrauftrag [10] по алгебре.

В бурные времена, наступившие после революции 1918 г., Нетер не осталась в стороне от политических событий: она склонялась к социал-демократам и, хотя формально не состояла в партии, принимала самое активное участие в дискуссиях по злободневным политическим и социальным проблемам. Одна из первых ее учениц Грета Германн была членом философско-политического кружка Нельсона в Геттингене [11]. Сегодня уже трудно представить себе, до какой степени тогдашняя молодежь горела желанием начать все заново, попытаться перестроить Германию, Европу, весь мир — на основе принципов благоразумия, гуманности и справедливости [12]. Но увы! — взгляды научной и студенческой молодежи довольно быстро повернулись на 180°; в ожесточенной борьбе, которая в течение нескольких лет сотрясала Германию, выливаясь в некоторых случаях в настоящую гражданскую войну, этих молодых людей чаще всего можно было видеть в лагере сил реакции и национал-шовинизма. Причиной этому послужило нарушение союзниками своих обещаний, содержавшихся в 14 пунктах программы Вильсона, а также тот факт, что республиканской Германии было не менее тяжело, чем имперскому райху, ощущать на себе кулак победителя. В особенности же молодежь была озлоблена тем национальным бесчестьем, которым сопровождалось претворение в жизнь жестокого мирного договора [13]. Именно тогда была упущена реальная возможность дать Европе стабильный мир и посеяны семена, зловещие всходы которых мы сейчас лицезреем. В последующие годы Эмми Нётер уже не принимала участия в политической жизни. Однако она всегда оставалась убежденным сторонником мира, считая эту свою позицию весьма важной и серьезной.

В скромной должности nicht-beamteter ausserordentlicher Professor [9] она проработала в Геттингене до 1933 г., в том числе последние несколько лет — в новом прекрасном Математическом институте, который был основан в Геттингене благодаря энергии Куранта и обширной финансовой поддержке Рокфеллеровского фонда. Я ясно помню, какой она была, когда я приезжал в Геттинген на зимний семестр 1926—1927 гг. в качестве приглашенного профессора и читал лекции о представлениях непрерывных групп. Она ходила на мои лекции, поскольку как раз в это время ее заинтересовали гиперкомплексные числовые системы и их представления. Я помню те многочисленные обсуждения, которые мы вели с ней, идя после лекций домой по холодным, грязным и мокрым от дождя улицам Геттингена; в этих обсуждениях принимал участие и фон Нейман, живший тогда в Геттингене как рокфеллеровский стипендиат. Когда в 1930 г. я был принят в Геттинген на постоянную работу, я начал энергично хлопотать в министерстве о лучшей должности для Эмми:

я испытывал неловкость, занимая по сравнению с ней столь высокое положение и ощущая при этом ее превосходство во многих областях математики. Все мои усилия оказались тщетными, как и попытка добиться избрания ее членом Геттингенского общества естественных наук. Старые традиции, предрассудки и привходящие соображения перевешивали ее научные достижения и ее научное величие, которое само по себе к тому времени уже ни у кого не вызывало сомнения. В период 1930—1933 гг., который я провел в Геттингене, Эмми была там самым действенным центром математической мысли — как по плодотворности ее научных исследований, так и по тому воздействию, которое она оказывала на широкий круг учеников.

Ее научный рост и становление как великого и самобытного ученого, какой мы ее знаем сегодня, происходили относительно медленно. Столь позднее созревание — довольно редкое для математики явление, в большинстве случаев наиболее значительные творческие удачи приходятся на раннюю молодость. Одним из немногих разительных исключений из этого правила, наряду с Эмми Нётер, является Софус Ли. Только в 1920 г.— через 13 лет после защиты диссертации — в «Mathematische Zeitschrift» появилась написанная ею совместно с Шмайдлером статья «Über Moduln in nicht-kommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- and Differenzen-Ausdrücken» — работа, знаменующая собой решающий поворот в ее научной судьбе. Именно здесь впервые проявилась та Эмми Нётер, которую мы все знаем, Нётер, которая своими трудами преобразовала алгебраическую науку. Прежде всего в этой работе впервые проявляется ее аксиоматический стиль мышления применительно к алгебре. В ней она имеет дело с дифференциальными операторами, ставшими теперь обычными в квантовой механике. При рассмотрении их последовательно, один за другим, оказывается, что их композиция, которую можно интерпретировать как некую разновидность умножения, не является коммутативной. Вместо оперирования формальными выражениями она начинает свое исследование с формулировки в качестве аксиом тех простых свойств операций умножения и сложения, которым эти выражения подчиняются. Эти аксиомы образуют затем основу для последующих рассуждений. Подобная процедура в дальнейшем стала типичной для Эмми Нётер. Несколько позже я попытаюсь дать общее описание того алгебраического мира, в котором развертывалась ее математическая деятельность.

Весьма характерно для Эмми и то, что обсуждаемая работа была написана в соавторстве — в данном случае со Шмайдлером. Я полагаю, что в процессе этого сотрудничества Шмайдлер отдал столько же, сколько получил сам. Однако в последующие годы Эмми Нётер чаще всего выступала в качестве ведущего автора, щедро делясь с другими своими идеями. У нее было много учеников, и одним из основных методов ее научной работы было изложение еще не окончательно оформленных идей в своих лекциях с тем, чтобы затем обсудить их с учениками. Иногда она из семестра в семестр читала лекции на одну и ту же тему; при этом изложение становилось все более упорядоченным, предмет принимал все более общие контуры и, разумеется, более весомыми становились результаты ее исследований в этом предмете. Совершенно очевидно, что такой метод иногда предъявлял чрезмерно высокие требования к ее аудитории. Вообще, с методической точки зрения ее лекции оставляли

желать лучшего. Она была слишком рассеянна и слишком пренебрежительно относилась к изяществу и ясности формы изложения своих мыслей. И все же она была вдохновенныл преподавателем, и тот, кому удавалось приноровиться к ее манере чтення лекций, мог получить от нее очень много. Значение деятельности Нётер в области алгебры не может быть сведено лишь к ее работам; она оказывала еще и огромное стимулирующее воздействие: многие ее идеи приняли окончательный вид в работах ее учеников или коллег. На счет Эмми Нётер следует отнести значительную часть всего того, что содержится во втором томе «Современной алгебры» Ван дер Вардена. То же самое в полной мере можно сказать и о многих разделах недавно вышедшей книги Дейринга об алгебрах. Хассе, автор прекрасных работ по связи между гиперкомплексными величинами и теорией полей классов, признает, что этими своими работами он обязан случайным замечаниям Эмми Нётер. Она действительно была способна на такие прозорливые замечания, как, например, вот это: «Символ норменного вычета есть не что иное, как циклическая алгебра» [14]. Подобные лапидарные пророческие изречения, порождаемые ее богатейшим воображением, в большинстве случаев попадали в точку, и их истинность с годами подтверждалась; такое высказывание могло со временем стать важнейшей вехой, указывающей верное направление в будущей нелегкой работе. О ее вкладе в науку ни в коем случае нельзя судить лишь по тем результатам, которые получены в ее работах; ее заслуга состоит в том, что она положила начало новому, сделавшему целую эпоху, способу мышления в алгебре.

Эмми поддерживала самые тесные отношения со своими учениками; она любила их, проявляла интерес к их личной жизни. Они образовали своего рода семью, шумную и беспокойную — «мальчики Нётер», как мы называли их в Геттингене. Среди ее непосредственных учеников я могу назвать Грету Германн, Круля, Хельзера, Греля, Кёте, Дейринга, Фиттинга, Витта, Цзеня, Шода, Левицкого. Она оказала большое влияние и на Ф. К. Шмидта, преимущественно через посредство Круля. Ван дер Варден приехал к ней из Голландии, будучи зрелым (или почти зрелым) математиком, имеющим собственные идеи; однако он перенял от Эмми Нётер аппарат понятий и новый способ мышления, которые позволили ему сформулировать свои идеи и решить поставленные задачи. Артин и Хассе стоят рядом с ней, занимая каждый свое независимое место в науке; сфера их деятельности тесно соприкасается с областью ее интересов, только у обоих заметен более сильный арифметический уклон. Именно с Хассе она особенно тесно сотрудничала все последние годы. Исключительно плодотворным было и сотрудничество Эмми Нётер с Ричардом Брауэром, поскольку оба они занимались, хотя и с разных сторон, одним и тем же — наиболее глубокими структурными проблемами для алгебр; Эмми подходила к ним с более абстрактных позиций, в то время как Брауэр, воспитанный школой великого алгебраиста И. Шура, был сторонником более конкретных манипуляций с матрицами и представлениями групп. Она поддерживала довольно тесные дружеские отношения с П. С. Александровым из Москвы, который часто гостил в Геттингене [15]. Я считаю, что ее способ мышления не мог не оказать влияния на топологические исследования Александрова. В 30-х годах Нётер провела в Москве целый семестр, и за это время близко познакомилась еще и с Понтрягиным. Перед этим, в 1928—1929 гг.,

она читала в течение одного семестра курс лекций во Франкфурте; в то же время Зигель читал лекции в Геттингене в качестве приглашенного профессора.

Весной 1933 г. по Германии прокатилась буря национал-социалистического переворота. Факультет математики и естественных наук Геттингенского университета, созданию и развитию которого Клейн и Гильберт отдали многие годы жизни, был подрублен под корень. После однодневного директорства Нейгебауэра обязанности директора математического института пришлось взять на себя мне. Что касается Эмми Нётер, как, впрочем, и многих других, ей было запрещено заниматься какой-бы то ни было преподавательской деятельностью, и вскоре она была лишена venia legendi [16], а также и Lehrauftrag [10], что означало и лишение заработка. Бурное время борьбы — вроде того, что мы пережили в Геттингене весной 1933 г.,— сближает людей; именно поэтому я сохранил такие живые воспоминания об этих месяцах. Эмми Нётер с ее смелостью, искренностью, безразличием к собственной судьбе, ее умиротворяющим духом была для нас моральной поддержкой среди всей той низости, отчаяния и горя, которые нас окружали. Конечно, были попытки оказать давление на министерство и на все более и менее ответственные, но влиятельные органы власти, с тем чтобы оставить ее в должности. Думаю, что никакое другое дело не собирало в министерстве такого количества энергичных протестов и бумаг, как дело Эмми Нётер. В то время мы действительно боролись; у нас все еще оставалась надежда на то, что самое худшее удастся отвести. Но все было напрасно. Франк, Борн, Курант, Ландау, Эмми Нётер, Нейгебауэр, Бернайс и другие — профессора, которыми гордился университет,— были вынуждены уйти, так как они были лишены возможности работать. Геттинген распылял свои таланты на все четыре стороны! В результате такого поворота судьбы Эмми Нётер оказалась в Брин Мор [17], и тот короткий промежуток времени, когда она преподавала там, а также ее приезд в качестве гостя в наш Принстонский Институт перспективных исследований настолько свежи в нашей памяти, что о них не стоит и говорить. Она не держала зла против Геттингена или против своей родины за все то, что они сделали ей. Она не разрывала дружеских отношений из-за политических разногласий. Прошлым летом она даже вернулась в Геттинген и жила и работала там, как будто ничего не произошло, она была искренне рада, что Хассе пытается (и не без успеха) возродить старые благородные математические традиции Геттингена, несмотря на изменившиеся политические условия. И все-таки она с необыкновенной легкостью приспособилась к своему новому окружению в Америке, и здешние студентки были так же близки ее сердцу, как «мальчики Нётер» в Геттингене. В Брин Мор она была счастлива. И, действительно, пожалуй, никогда еще в своей жизни она не получала столько знаков уважения, сочувствия и дружбы, сколько пришлось на ее долю в последние полтора года в Брин Мор. Теперь мы стоим у ее могилы.

Мы всегда будем помнить, что было сделано здесь для Эмми Нётер за эти два тяжелых года.

Поскольку после этого краткого описания жизни Нётер я дам обзор ее работ и характеристику ее как человека и ученого, мне следует попытаться вначале в двух словах описать ситуацию в науке, в которой она работала,—

описать мир алгебры. Система действительных чисел, имеющая столь первостепенное значение как для математики, так и для физики, напоминает двуликого Януса. С одной стороны, это поле, в котором определены алгебраические операции $+$ и $\times$, а также обратные к ним. С другой стороны, это непрерывное многообразие, части которого непрерывно связаны друг с другом. Одна сторона являет собой чисто алгебраическое, а другая — топологическое лицо чисел. Современная аксиоматика, довольно прямодушная в своей основе и потому не приемлющая эту странную смесь войны и мира (в этом отношении она отличается от современной политики), четко разделила эти стороны.

Таким образом, чистому алгебраисту нечего делать со своими числами, кроме четырех действий — сложения, вычитания, умножения и деления. Следовательно, для него множество чисел является замкнутым; он не имеет возможности выйти за его пределы, поскольку всякий раз, когда он применяет к каким-либо двум числам эти четыре операции, он получает новое число из того же самого множества. Множество этого типа называют областью рациональности, или полем. Простейшим примером поля служит множество всех рациональных чисел. Другой пример — так называемое алгебраическое числовое поле $(\sqrt{2})$ — множество чисел, имеющих вид $a + b\sqrt{2}$, где a, b — рациональные числа. Классической задачей алгебры является решение алгебраического уравнения $f(x) = 0$, коэффициенты которого лежат в некотором поле K, например в поле рациональных чисел. Зная корень δ уравнения, мы тем самым знаем все числа, получаемые из δ (и из чисел множества K) путем четырех операций: все эти числа образуют алгебраическое поле $K(\delta)$, включающее K. В пределах этого числового поля $K(\delta)$ само δ играет роль определяющего числа, из которого могут быть рационально получены все остальные числа. Однако многие, почти все числа из $K(\delta)$ могут в этом отношении выполнять роль δ. Таким образом, удобнее заменить изучение уравнения $f(x) = 0$ изучением поля $K(\delta)$. Тем самым мы отвлекаемся от несущественных характеристик; мы принимаем во внимание в равной мере все уравнения, получающиеся из одного уравнения $f(x) = 0$ путем рациональных преобразований неизвестного x, и формулу-уравнение $f(x) = 0$, которая могла бы соблазнить нас на механические вычисления, мы заменяем на понятие, а именно на понятие поля, которое мы можем получить лишь путем абстрактных размышлений.

В системе *целых* чисел неограниченным является применение лишь операций сложения, вычитания и умножения; от деления приходится отказаться. Такая область называется областью целостности, или *кольцом*. Поскольку понятие целого числа является основным в теории чисел, можно, по-видимому, утверждать, что теория чисел имеет дело именно с кольцами, а не с полями. Многочлены от одной переменной, или неизвестной x, похожим образом образуют область величин, являющуюся кольцом. В качестве коэффициентов многочленов можно принять элементы заданного числового поля или кольца. Алгебра не рассматривает аргумент x как переменную, принимающую непрерывный ряд значений, а рассматривает его как неизвестную, пустой символ [[18]], служащий только лишь для соединения коэффициентов многочлена в единое выражение, которое непосредственно подсказывает правила сложения и умножения. Утверждение, что многочлен исчезает, означает, что все его

коэффициенты равны нулю, а не то, что он как функция принимает значение нуль для всех значений независимой переменной. Не возбраняется заменять переменную x числом или многочленом от одной или нескольких неизвестных $y, z, \ldots$ Это есть, однако, формальный процесс, отображающий кольцо многочленов от x в точности на кольцо чисел или многочленов от $y, z, \ldots$ Таким образом, очевидно, что сохраняются все рациональные соотношения, которые могут быть выражены в терминах фундаментальных операций — сложения, вычитания, умножения.

Кроме присоединения неизвестных, алгебра знает и другой процесс для образования новых полей или колец. Пусть p — простое число, например 5. Рассмотрим обычные целые числа, уславливаясь при этом считать числа равными, если они сравнимы с mod p, т. е. когда они дают один и тот же остаток при делении на p. Это можно проиллюстрировать, расположив числовую прямую на окружности длиной p. Возникающее таким образом специфическое поле состоит лишь из p различных элементов. В кольце многочленов от одной переменной x (с числовыми коэффициентами из заданного числового поля K) *простому числу* соответствует *неприводимый многочлен* $p(x)$. Считая два многочлена равными, если они сравнимы по модулю данного неприводимого многочлена $p(x)$, мы преобразуем кольцо всех многочленов в поле, обладающее в точности теми же алгебраическими свойствами, что и числовое поле $K(\delta)$, возникающее из исходного поля K присоединением корня δ уравнения $p(x) = 0$. Но эта процедура проходит целиком внутри чистой алгебры и не требует решения уравнения $p(x) = 0$, которое на самом деле неразрешимо в поле K. Такая интерпретация алгебраического числового поля $K(\delta)$ была дана Кронекером после того, как Коши уже приводил на этой основе вычисления с мнимым числом i.

Вот так, ступень за ступенью, и воздвигалась алгебра чисто аксиоматического типа. Можно назвать целый ряд имен великих математиков, которые положили начало и затем развили это аксиоматическое направление: после Кронекера и Дедекинда это были Э. Мур в Америке, Пеано в Италии, Штейниц и, конечно же, Гильберт — в Германии. Теперь поле представляется такой областью элементов, называемых числами, в которой определены и удовлетворяют всем аксиомам две операции: $+$ и $\times$. Если исключить аксиому деления, постулирующую полную обратимость операции умножения, мы получим кольцо вместо поля. Теперь поля уже не являются частями универсальной области чисел — континуума рациональных и комплексных чисел, с которой имеет дело анализ; каждое поле теперь является, так сказать, миром в себе. Можно определить операции для связывания элементов любого заданного поля, но отнюдь не для элементов разных полей. Эта точка зрения, согласно которой каждый объект, подвергаемый математическому анализу, имеет свое собственное множество чисел, которое определяется только в рамках самого этого объекта и присущих ему составляющих, в противовес методу, при котором к каждому объекту подходят с одной и той же универсальной системой чисел, созданной a priori и независимо от приложений,— эта точка зрения, как мне кажется, все более завоевывает себе место в аксиоматических основаниях геометрии, а в последнее время, как это ни странно,— даже в квантовой физике. Здесь мы сталкиваемся с одним из тех мистических параллелизмов [19]

в развитии математики и физики, который побуждает нас поверить в предначертанную гармонию природы и разума.

Говоря об аксиоматике, я имел в виду следующую методическую процедуру: мы естественным образом разделяем различные стороны данного конкретного объекта математического исследования — так, чтобы каждая из них строилась бы на основе своей собственной достаточно узкой и легко обозримой группы предположений; а затем мы возвращаемся к единому целому путем объединения частных результатов, полученных после соответствующей специализации. Последний, синтезирующий этап является чисто механическим. Искусством же является первый, аналитический этап, состоящий в разделении целого на части и в формализации выделенных частей. Мы не занимаемся обобщениями ради обобщений; дело состоит в том, что каждое обобщение упрощает ситуацию путем уменьшения числа предположений, в результате чего становятся понятными некоторые стороны необозримого целого. Целесообразность разделения с последующим обобщением может быть оценена лишь по одному критерию — по продуктивности. Если какой-либо исследователь, опираясь на различные аналоги, подсказываемые ему математическим опытом и более или менее богатым воображением и восприимчивостью, возьмет на вооружение данную процедуру, он неизменно придет к аксиоматике. Таким образом, сегодня аксиоматика уже никоим образом не является лишь методом внесения логической ясности и углубленного проникновения в основания объекта; она стала мощным орудием проведения собственно математического исследования. Этот метод мастерски применялся Эмми Нётер; он соответствовал ее натуре, и она сделала алгебру настоящим Эльдорадо для аксиоматики. Важнейшим в этом методе является выделение «правильных» общих понятий — таких, как поле, кольцо, идеал и т. п.; разделение утверждений на более частные утверждения и последующее обобщение этих последних с помощью введенных общий понятий. После того как проведено деление целого числа на части и удалось отвлечься от малосущественных признаков, доказательство каждого конкретного шага во многих случаях уже не представляет какой-либо сложности. В 1931 г. в лекции о топологии и абстрактной алгебре как двух способах математического анализа я говорил:

«Тем не менее я не могу обойти молчанием тот факт, что сегодня у многих математиков возникло ощущение, что плодотворность этих абстрактных методов постепенно иссякает. Дело вот в чем: все эти прекрасные общие понятия не даются нам в руки сами собой. Что же касается определенных, конкретных проблем, то они были покорены во всей своей нерасчлененной сложности, так сказать, голыми руками, грубой силой. Только позже пришли аксиоматики и сказали: „Вместо того чтобы со всей силы ломиться в дверь, набивая себе синяки на руках, вам следовало бы сделать такой-то и такой-то хитроумный ключ, с помощью которого вы смогли бы открыть дверь совершенно без всякого напряжения“. Но они смогли подобрать такой ключ только потому, что дверь уже была выломана, и они имели возможность исследовать замок изнутри и снаружи. Для того чтобы иметь возможность обобщать, формализовать и аксиоматизировать, необходимо прежде иметь какой-то математический задел. Я думаю, что математический материал, в формализации которого мы упражняемся последние десятилетия, постепенно исчерпывается. В силу

этого я предвижу трудные времена для математиков подрастающего ныне поколения» [20].

Эмми Нётер была с этим не согласна и в самом деле привела в качестве довода тот факт, что как раз в последние годы аксиоматический метод позволил ей открыть новые, конкретные и глубокие проблемы приложения некоммутативной алгебры к коммутативным полям и их теории чисел, а также наметил путь к решению этих проблем.

Как мне кажется, научная деятельность Эмми Нётер распадается на три четко выделимых периода: 1) 1907—1919 гг.— период относительной научной несамостоятельности; 2) 1920—1926 гг.— в этот период исследования концентрируются вокруг общей теории идеалов; 3) с 1927 г. велись исследования по некоммутативным алгебрам, их представлениям линейными преобразованиями и их приложений к анализу коммутативных числовых полей и их арифметики. Первого периода деятельности я уже касался, когда говорил о ее жизни. Теперь мне хотелось бы сказать несколько слов о втором периоде — периоде общей теории идеалов.

Идеалы были придуманы Дедекиндом для того, чтобы введением подходящих идеальных элементов установить основной закон однозначного разложения числа на простые множители, который нарушается в алгебраических числовых полях. Идея состоит в замене числа, например, 6 в его функции как делителя множеством всех чисел, делящихся на 6. Это множество называется идеалом (6). Сходным образом можно интерпретировать наибольший общий делитель двух чисел a и b как множество всех чисел вида $ax + by$, где x и y пробегают независимо все целые числа. В кольце обычных целых это множество совпадает с множеством кратных некоторого числа d наибольшего общего делителя. Это, однако, не так в случае алгебраических числовых полей, так что становится необходимым допускать в качестве делителей не только числа, но и идеалы. Тогда идеал в кольце R можно определить как такое подмножество в R, что сумма и разность двух чисел из идеала снова принадлежат ему, равно как и произведение числа из идеала на произвольное число из кольца. С другой стороны, это понятие появляется в алгебраической геометрии. Алгебраическая поверхность в пространстве определяется одним алгебраическим уравнением $f = 0$, где f — многочлен относительно координат. Если рассмотреть алгебраические многообразия меньших размерностей, придется вместо этого взять конечную систему алгебраических уравнений $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., $f_h = 0$. Тогда все многочлены, исчезающие на алгебраическом многообразии, будут возникать как линейные комбинации основных многочленов $f_1, f_2, \ldots, f_h$ вида $A_1f_1 + A_2f_2 + \ldots + A_hf_h$, где $A_1, A_2, \ldots, A_h$ — совершенно произвольные многочлены. Все многочлены этого типа образуют идеал в кольце многочленов; алгебраическое многообразие состоит из точек, в которых исчезают все многочлены из идеала. К таким идеалам относится теорема Гильберта о базисе — одно из основных орудий в гильбертовском подходе к инвариантам. Она утверждает, что каждый идеал, состоящий из многочленов, имеет конечный базис. Нетерова теорема об остатках содержит критерий, позволяющий решить, принадлежит ли некоторый многочлен к идеалу, члены которого имеют в качестве общего множества лишь конечное число нулей. Для идеалов, состоящих из многочленов, Ласкер (более известный нематемати-

кам как чемпион мира по шахматам в течение многих лет) получил, что управляющие ими законы существенно отличаются от тех, что были открыты Дедекиндом для алгебраических числовых полей.

Рассмотрим, например, следующие три кольца: кольцо обыкновенных целых чисел и кольца многочленов от одной и двух независимых переменных с рациональными коэффициентами. Для каждого из них верна теорема об однозначном разложении на простые множители; однако только для первых двух случаев применим алгоритм Евклида и верно, что наибольший общий делитель двух элементов a и b содержится в идеале (a, b), т. е. он может быть выражен в форме $af + bg$, где f и g — подходящие элементы из кольца. В самом деле, в области многочленов двух переменных x и y сами многочлены x и y не имеют общего делителя; тем не менее уравнение типа $1 = xf + yg$, где f и g — два многочлена, невозможно, так как правая часть исчезает в начале координат $x = 0, g = 0$.

Эмми Нётер развила на аксиоматической основе общую теорию идеалов, которая включает все эти случаи. Ее основной аксиомой является Teilerkettensatz: предположение, что цепь идеалов $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$ непременно обрывается после конечного числа шагов, если каждый идеал $\mathfrak{a}_i$ включает предыдущий $\mathfrak{a}_{i-1}$ в качестве собственной части. В ее абстрактной теории многие важные достижения математики были спаяны воедино. Более того, она показала, как в той же самой аксиоматической манере можно, с одной стороны, прийти к многочленным идеалам, а с другой — к классическому случаю идеалов в алгебраических числовых полях. В некоторых случаях ее общая теория идет даже дальше того, что было известно до нее благодаря Ласкеру о многочленных идеалах.

До сих пор мы говорили об аксиомах, которым удовлетворяют обыкновенные числа. Однако существуют серьезные доводы в пользу того, чтобы отбросить коммутативный закон умножения. Действительно, такие операции, как вращение твердого тела в пространстве, являются объектами, которые ведут себя по отношению к композиции некоммутативным образом: композиция двух вращений зависит от того, производится ли сначала первое, а затем второе, или наоборот. Эта композиция рассматривается здесь как разновидность умножения. В терминах координат вращения представляются как линейные преобразования. Линейные преобразования относительно сложения и композиции, или умножения, являют собой наиболее важный пример некоммутативных величин. Естественно поэтому попытаться реализовать каждое данное абстрактное некоммутативное кольцо или «алгебру» величин с помощью линейных преобразований, не нарушая соотношений, установленных среди них фундаментальными операциями $+$ и $\times$. В этом и состоит цель теории представлений. Теория некоммутативных алгебр и их представлений была построена Эмми Нётер на новой единой чисто концептуальной основе с использованием всех данных, накопленных до нее в результате многолетних усилий Молина, Фробениуса, Диксона, Веддербарна и др. Понятие идеала в нескольких новых видах снова играет решающую роль. Помимо этого оказалась весьма полезной идея *автоморфизма*, т. е. тех отображений, которые можно производить внутри алгебры, не нарушая ее внутренних соотношений. При этом изгоняются вычислительные средства, например, такие, как определитель, не обращение кото-

рого в нуль Дедекинд использовал в качестве критерия полупростоты. Это было тем более желательно, что данный критерий оказывается ложным в некоторых областях рациональности. При интенсивном сотрудничестве с Хассе и Брауэром она исследовала структуру некоммутативных алгебр и применила эту теорию с помощью *verschränktes Produkt* (скрещенных произведений) к обыкновенным коммутативным числовым полям и их арифметикам. Наиболее важными работами этого времени являются «Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie» (1929), «Nicht-kommutative Algebra» (1933) и три работы меньшего объема о норменных вычетах и теореме о главных родах. Ее теория скрещенных произведений была опубликована Хассе в связи с его исследованиями по теории циклических алгебр. Совместная работа Брауэра, Хассе и Эмми Нётер, доказывающая, что всякая простая алгебра над обычным алгебраическим числовым полем является циклической в смысле Диксона, останется заметной вехой в истории алгебры.

Я воздержусь от описания полного содержания этих глубоких исследований. Вместо этого я попытаюсь лучше дать краткую общую оценку Эмми Нётер как ученого-математика и как человека.

Ее сильной стороной была способность оперировать с абстрактными понятиями. Она не испытывала потребности вставать на накатанный путь известных конкретных примеров для получения новых результатов. В этом были и свои минусы: иногда от нее полностью ускользали специфические детали более интересных приложений ее общих теорий. Она обладала исключительно живым воображением, с помощью которого могла выявлять весьма отдаленные связи; она постоянно стремилась к обобщениям. При этом она искала суть известных фактов, упорядочивала эти факты, используя соответствующие общие понятия, находила удобную позицию, с которой можно было обозревать целое, освобождала рассматриваемый объект от всего лишнего, наносного, и в результате приходила к простой и отчетливой форме — так, что эта победа сулила большие шансы на успех в дальнейшем продвижении. Свою способность к прояснению вещей Эмми доказала, например, своей теорией скрещенных произведений, для создания которой Диксоном и Брауэром уже были открыты почти все необходимые факты. Ей было присуще сильное стремление к аксиоматической чистоте. Все результаты должны получаться только в рамках исследуемой структуры и только при помощи свойств, присущих этой структуре; ничего не должно привноситься извне, и применяться могут только инвариантные операции. Так, ей представлялось неприемлемым столь характерное для работ Шура использование матриц, коммутирующих со всеми элементами данной матричной алгебры: она использовала в этом случае автоморфизмы. Однако тут Эмми могла иногда заходить слишком далеко: так, например, она считала ниже своего достоинства пользоваться примитивными идемпотентами при развитии теории Галуа. Однажды она заметила: «Показать, что $a \leqq b$ и $a \geqq b$,— еще не значит доказать равенство чисел a и b; надо показать, что эти числа действительно равны, раскрыв внутреннее основание их равенства».

Из всех предшественников Нётер в области алгебры и теории чисел наиболее близок к ней Дедекинд. Она испытывала к нему глубокое почтение. Она рекомендовала своим студентам читать приложения Дедекинда к «Zahlentheo-

rie» Дирихле, да не в каком-то одном, а во всех изданиях. Она принимала самое активное участие в редактировании трудов Дедекинда, причем делала попытку после каждой его работы указывать, какие современные исследования опираются на полученные в этой работе результаты. Ее поразительная научная близость к Дедекинду — этому нижнесаксонцу, который был, пожалуй, самым типичным немцем из немецких математиков,— являет собой яркий пример того, насколько бессмысленно пытаться строить какие-то схемы, связывающие расовую принадлежность с тем или иным стилем математического мышления. Наряду с работами Дедекинда для ее исследований большое значение имели, конечно, и работы Штейница по теории абстрактных полей. Она жила в период пышного расцвета алгебры в Германии — расцвета, которому она же сама в большой мере и способствовала. Однако не следует полагать, что ее методы являются единственно приемлемыми. Кроме Артина и Хассе, которые в известном смысле близки ей, можно назвать еще алгебраистов совершенно другого типа — таких, как И. Шур в Германии или Диксон и Веддербарн в США, чьи достижения не уступают ее собственным по глубине и значимости. Ее последователи, которые с вполне понятным энтузиазмом воспринимают ее идеи, пожалуй, не всегда в полной мере отдают себе в этом отчет.

Эмми Нётер со страстью отдавалась работе в редколлегии журнала «Mathematische Annalen» и, возможно, испытывала некоторое огорчение от того, что эта ее деятельность не получила выраженного признания.

Те, кто видел Эмми Нётер впервые или не имел представления о силе ее интеллекта, практически всегда находили ее чудаковатой, и она легко становилась объектом шуток. Она была грузновата, обладала слишком громким голосом, и при общении с ней собеседнику было непросто вставить слово. Эмми обладала большой силой убеждения, однако ей не был свойствен догматизм талмудистов. Она была грубовата и бесхитростна, но отнюдь не бессердечна. Ее прямота ни в коей мере не преследовала цели нанести кому-то обиду. В повседневной жизни отличалась скромностью и полным бескорыстием и была по натуре доброй и дружелюбной. Вместе с тем ей было приятно выражение признания в свой адрес, которое она принимала с застенчивой улыбкой девушки, выслушивающей комплимент. Никто, конечно, не станет утверждать, что у ее колыбели стояли грации, но если мы в Геттингене частенько в шутку называли ее между собой «der Noether» (der — артикль мужского рода), то делали это в знак признания необычайной силы и творческой направленности ее интеллекта, который никак не умещался в рамках принятого представления о женском интеллекте. Эмми обладала тонким чувством юмора и была очень общительна; чаепитие у нее дома бывало очень приятным. И все же она была человеком односторонним: ее жизнь имела явный перекос, вызванный ее математическим талантом. Существенные аспекты обычной жизни остались в ней нереализованными и среди них, по-моему, любовные переживания, которые, если верить поэтам, для многих из нас являются сильнейшим источником эмоций, восторгов, желаний, горестей и раздоров. Поэтому иногда она производила впечатление непослушного ребенка, но у нее было доброе и отважное сердце, она всегда была готова оказать помощь, способна на верность и привязанность. И еще: она была счастливейшим человеком из всех, кого я знал.

Само собой напрашивается сравнение Эмми Нётер с другой всемирно из-

вестной женщиной-математиком — Софьей Ковалевской. Софья была, конечно, человеком более гармоничным, но, вместе с тем, гораздо менее счастливым. Для того чтобы заниматься избранным делом, ей пришлось преодолеть сопротивление родителей и вступить в фиктивный брак, который, впрочем, в какой-то момент перестал быть фиктивным. Как я уже говорил, Эмми Нётер не была по своей природе борцом и не испытывала стремления к богемному образу жизни. Софья же обладала женским очарованием, чисто женским чутьем и тщеславием; ей отнюдь не был чужд успех в обществе. Она была капризна и часто имела весьма натянутые отношения с окружающими. Вы видите определенное противоречие между творческим складом ее ума и ее образом жизни со всеми ее страстями и самообманом, благодаря которому ей удавалось с иронией относиться к самым отчаянным конфликтам. Как далеко до этого было Эмми!

Итак, следующие две черты были определяющими для натуры Эмми. Во-первых, от природы она обладала исключительным по продуктивности математическим талантом. Она была не глиной, из которой искусные руки бога слепили совершенную форму, но скорее глыбой из человеческой плоти, в которую он лишь вдохнул жизнь и творческие способности. Во-вторых, в ее сердце не было места для зла; она никогда не верила в зло, и ей не приходило в голову, что оно может играть какую-то роль в судьбах людей. Эта ее черта в особенности ярко раскрылась мне в то последнее бурное лето 1933 г., которое мы провели вместе в Геттингене. Ее друзья будут долго помнить ее научные работы и не забудут о ней как о человеке. Эмми Нётер была великим математиком; как мне представляется — самым великим из математиков ее пола; она была великой женщиной.

ПРИЛОЖЕНИЯ

К. ШЕВАЛЛЕ, А. ВЕЙЛЬ

ГЕРМАН ВЕЙЛЬ *

«Известие о помолвке Германа Вейля и Геллы вызвало всеобщее удивление, ибо чести, которой добивались многие, был удостоен робкий, молчаливый человек, далекий от круга признанных законодателей математического мира Геттингена. И лишь потом все поняли, насколько удачен был выбор Геллы» [1].

Быть может, математические истины, как и женщины, избирают тех, кого они привлекают. Кого предпочитают они, наиболее талантливых или наиболее симпатичных? Тех, кто их страстно желает, или тех, кто их заслуживает? Иногда их выбор кажется поначалу странным и лишь со временем делается ясно, что они не ошиблись. Робким, молчаливым, далеким от круга законодателей — таким выглядел Герман Вейль в начале своей карьеры; таким, должно быть, и остался он в глубине несмотря на свои блестящие успехи. Как это часто бывает с робкими людьми, он умел, если ему удавалось сломать барьер своей застенчивости, быть вдохновенным и красноречивым. Вот как он вспоминает о первой встрече со своей будущей женой: «В этот вечер я описывал пожар на гумне, свидетелем которому мне только что довелось быть. Потом она говорила мне, что влюбилась в меня уже тогда, слушая мой рассказ» [2]. Из его воспоминаний мы узнаем также, насколько он был подвержен влиянию других людей, даже в том, что касалось самых сокровенных его мыслей. «Мой спокойный позитивизм был поколеблен, когда я влюбился в молодую, глубоко религиозную музыкантшу, принадлежавшую кружку, сформировавшемуся вокруг известного гегельянца. Позже я женился на ученице Гуссерля, и это способствовало моему окончательному разрыву с позитивизмом и принятию мною самого свободного мировоззрения в мире». Герману Вейлю было в то время 27 лет.

Таким предстает перед нами ко времени своей женитьбы один из наиболее замечательных и привлекательных математиков первой половины века, математик, за которым мало кому удавалось угнаться. «A country lad of eighteen», восемнадцатилетний парень из деревни — таким во время прибытия в Геттинген он вспоминает себя сам. «Я выбрал этот университет,— говорил он,— в основном потому, что директор моего лицея, двоюродный брат Гильберта, дал мне к нему рекомендательное письмо. Спустя короткое время я решил прочесть и выучить все, что написал этот человек. По окончании первого курса я отправился домой с экземпляром «Zahlbericht» под мышкой и во время каникул

---

* *Chevalley C.*, *Weil A.* Hermann Weyl (1885—1955).— Einseign. math., 1957, vol. 3, f. 3. Перевод Е. И. Коркиной, Д. Б. Фукса.

[1] Из речи Куранта на похоронах Геллы Вейль 9 сентября 1948 г.

[2] Эта цитата, как и многие последующие, взята из неопубликованной заметки Германа Вейля, посвященной памяти Геллы Вейль. В остальном мы цитируем Г. Вейля по его публикациям [1].

читал и перечитывал эту книгу, не зная до этого ничего ни из теории чисел, ни из теории Галуа. Это были самые счастливые месяцы моей жизни» [3].

Немного позже пришла радость открытия. «Событие, ставшее решающим для меня: я сделал серьезное математическое открытие. Оно относилось к закону распределения собственных частот сплошной среды, мембраны, упругого тела или электромагнитного эфира. Результат, давно предсказанный физиками, был, казалось, еще далек от математического обоснования. Пока я лихорадочно занимался доработкой своей идеи, моя керосиновая лампа начала дымиться. Едва я кончил, как густой дождь черных хлопьев повалил на мои бумаги, руки, лицо». К тому времени он уже стал приват-доцентом в Геттингене. И вскоре женитьба, кафедра в Цюрихе, война. После года гарнизонной службы в Сарребрюке (простым солдатом — уточняет он) швейцарское правительство добилось его возвращения преподавателем в Федеральный политехнический институт. «Я не могу вспомнить большей радости, чем та, которая овладела мною в погожий майский день 1916 г., когда мы с Геллой пересекли швейцарскую границу и снова спустились к озеру по прекрасному мирному городу».

Вейль вернулся к своей работе. Курс теории относительности, прочитанный им в Цюрихе, был опубликован в 1918 г. Эти его знаменитые «Raum, Zeit, Materie», издававшиеся пять раз в течение пяти лет, благодаря необычайной популярности темы даже среди неспециалистов сделали имя Вейля известным далеко за пределами математического мира, где его репутация была уже установлена. Время от времени из разных мест приходили предложения занять кафедру. Особенно долго он колебался, получив в 1922 г. предложение занять место Клейна в Геттингене. Он откладывал решение до последнего дня. В этот последний день они с женой бродили по улицам Цюриха, взвешивая все «за» и «против». Наконец, он отправился на почту, чтобы телеграфировать о своем согласии. Придя же туда, он послал отказ. Он не решился сменить спокойную жизнь в Цюрихе на послевоенную нестабильность в Германии. «Удивление Геллы,— говорит он,— было безгранично; однако события ближайшего времени подтвердили мою правоту».

Но когда в 1929 г. Геттинген предложил ему занять место Гильберта, он не смог противостоять соблазну. «Три последующих года были наиболее трудными из всех, что мы прожили с Геллой»,— говорит он.

Нацизм, появившись, как еле заметное облако на горизонте, разрастался на глазах и, наконец, обрушился ураганом на Германию, покрыв ее кровавой грязью. К счастью для Германа Вейля, недавно созданный в Принстоне Институт высших исследований предложил ему спасение от катастрофы. Но он колеблется. Сначала соглашается. Потом отказывается. На следующий год он снова соглашается. В 1933 г., находясь в Цюрихе, он сообщает в Геттинген о своей отставке и уезжает в Америку.

Ему не пришлось проходить испытательный срок, часто длинный, иногда унизительный и тягостный, с которым сталкивались многие ученые, бежавшие в Соединенные Штаты. Кафедрой в институте сразу же обеспечивалось его хорошее материальное положение и позиция в первых рядах американского научного

[3] «Из всех моих умственных упражнений,— пишет он в другом месте,— наибольшую радость мне доставили в 1905 г. (в бытность мою студентом) изучение «Zahlbericht» и великолепной зимой 1922 г. в Энгадине заворожившее меня чтение Майстера Экхарта».



Давид Гильберт и Герман Вейль в середине 20-х годов

мира, на что, без сомнения, он имел полное право. В Принстоне, по его словам, он провел счастливые годы. Он так и не смог освоиться с тем, что он называл «ярмом иностранного языка». Но благодаря уважению и привязанности, окружившим его с момента приезда, он чувствовал себя как дома; и, кажется, в его восторженном рассказе о том, как он строил дом на своем клочке земли в 1938 г., опять проступает портрет деревенского парня, только что приехавшего в Геттинген. Жестокую боль причинила ему смерть жены в 1948 г. Через некоторое время вторая женитьба вернула ему равновесие. Выйдя на пенсию, он делил свое время между Принстоном и Цюрихом. Он умер от разрыва сердца вскоре после того, как отпраздновал свое семидесятилетие.

К моменту прибытия в Америку он уже получил свои лучшие математические результаты, и хорошо понимал это сам. Другой мог бы не устоять перед соблазном почить на лаврах, исполняя роль «верховного жреца». Насколько же он не походил на тех, чья активность, начиная с определенного возраста, состоит из нескончаемых переходов из комиссии в комиссию, чтобы обсуждать там со всею серьезностью достоинства работ «молодых», которых они не читали и о которых могли судить лишь понаслышке! Он избрал совершенно иной и много более высокий род деятельности. Он верил, что только Принстон в его время мог стать тем, чем был некогда Париж, а затем Геттинген,— центром обмена, сортировочным пунктом математических идей, бродивших по свету. Вспоминая интенсивную математическую жизньв Геттингене, вдохновителем которой был Гильберт, он писал: «Идеи нарастают, как снежный ком, в условиях подобной концентрации исследований», и он добавляет: «Нечто подобное наблюдалось и у нас в Принстоне в первые годы существования Института высших исследований». Если так действительно было, то в этом большая заслуга принадлежит ему самому. Он взял на себя важную задачу — находясь в курсе последних достижений, осведомлять исследователей, служить им переводчиком, понимать лучше их самих, что они делали или пытались делать; он занимался со всей присущей ему скромностью, в то же время сознавая, что выполняет важную работу и что в ней он незаменим. В его работах, а их в течение всего этого периода было очень много и были они разнообразными, прослеживается отпечаток его лекций, семинаров, дискуссий, в которых он участвовал, проблем, относительно которых все ожидали его мнения. Среди его работ нет ни одной, которая не разъясняла бы какой-нибудь сложный вопрос или не заполняла бы какой-нибудь досадный пробел. И эта деятельность продолжалась до конца его жизни. Примечательно, что его последней публикацией стало обновленное и совершенно переосмысленное издание его первой книги, книги, всегда полезной, до сих пор актуальной, которой он придал этой переработкой новую жизненную силу. Кто из нас не пожелал бы закончить свою научную карьеру подобным образом?

Протей, бесконечно преображающийся, чтобы не угодить в ловушку, и становящийся самим собой лишь после триумфального финала,— такое впечатление остается у нас о Германе Вейле. Чем только ни занимался он, направляемый подчас средой и обстоятельствами, но также и беспокойством своего гения: логикой, физикой, философией. Аксиома «ne sutor ultra crepidam» [2] не позволяет нам слишком далеко следовать за ним в его превращениях. Даже изучая математические работы Вейля, вы обнаруживаете вдруг, что его мысль



Математический институт Университета в Геттингене



Институт высших исследований в Принстоне

ускользает от вас как раз в тот момент, когда кажется, что вы начали прекрасно ее понимать,— свойство, отнюдь не облегчающее чтение его работ. Правда, стоит заметить, что его творчество пришлось на переходный период в истории математики, и это наложило на него глубокий отпечаток. Порою он испытывал опьяняющий восторг, позволяя увлечь себя противоречащим друг другу течениям, волновавшим ту эпоху, но был твердо уверен (как во время своей приверженности интуиционизму Брауэра), что присущий ему рассудок защитит его от крушения. Работы Вейля во многом способствовали установлению нового мировоззрения в математике, основанного не на понятии действительного числа, как это было у классиков, а на понятии структуры. Систематическое и абсолютно абстрактное употребление универсальных накрытий и комплексно-аналитических многообразий, свободное владение и популяризация даже среди физиков векторной алгебры и понятия пространства представления группы — все это исходит в первую очередь от него. Но если он и был чересчур учеником Гильберта, чтобы отказаться от мощи аксиоматического метода, и чересчур математиком, чтобы не ценить достижений этого метода (об этом свидетельствует его пылкая похвала работам Эмми Нётер), все-таки не к нему лежала его душа. В аксиоматическом методе он видел «сеть, в которую мы хотим поймать простую, великую, божественную Идею», но всегда бывает страшно, как бы не вытащить этой сетью одни лишь трупы. Безжалостному препарированию под ярким светом прожекторов этот романтик предпочитал волнующую игру аналогий, к которой так хорошо приспособлен любимый им язык немецкой метафики. Не грубо хватать идею с риском ее убить, скорее ему нравилось подстерегать ее в тени, следовать за ней в ее развитии, описывать ее в разнообразных обличьях, в ее живой сложности. Его ли вина в том, что менее подвижные, чем он, читатели иногда с трудом следуют за его мыслями?

«Истинный принцип Дирихле,— слова Минковского, которые охотно цитировал Вейль,— состоит в том, чтобы решать задачи с помощью минимума слепого вычисления и максимума чистого размышления». И Вейль писал о своем учителе Гильберте: «Для его работ характерен метод прямой атаки; отбрасывая стандартные приемы, он снова и снова возвращается к проблеме в ее первоначальной чистоте» [3]. Два или три раза ему самому удалось достичь этого идеала классического совершенства, например в его работе 1916 г. о равномерном распределении по модулю 1 и сходных его исследованиях по почти периодическим функциям и по представлениям компактных групп. Как это естественно, именно о них легче всего рассказывать. С этих работ мы и начнем, отказавшись от логического порядка, которому все равно невозможно следовать, когда имеешь дело с таким богатством и разнообразием. Источником первой из этих работ послужили его размышления об эффекте Гиббса, при которых попутно возник вопрос о диофантовых приближениях: любое ли иррациональное число α может быть приближенно последовательностью дробей p_n/q_n, удовлетворяющих условиям $q_n = o(n)$, $|\alpha - p_n/q_n| = o(1/n)$. Несколько позже Ф. Бернштейн привлек внимание Вейля к задаче о среднем движении в небесной механике. Постановка этой задачи восходит к Лагранжу, ею также занимался Боль. Речь идет об определении асимптотического поведения при $t \to \infty$ конечной экспоненциальной суммы $\Sigma a_\nu e(\lambda_\nu t)$, где λ_ν — дей-

ствительные числа [4]. Вейль тут же заметил, что из леммы о диофантовых приближениях легко выводится равномерность распределения по модулю 1 последовательности $(n\alpha)$ для иррациональных α; этот результат одновременно был получен Болем и Серпинским. Но у Вейля после школы Гильберта и особенно после его исследований в области собственных функций и собственных значений развилось слишком верное чутье в гармоническом анализе, чтобы остановиться на этом.

Обозначим для последовательности (x_n) через $M(x_n)$ предел при $n \to \infty$ (если он существует) средних значений первых n членов последовательности $x_1, \ldots, x_n$. Равномерность распределения по модулю 1 последовательности α_n эквивалентна тому, что $M(f(\alpha_n)) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ для всех периодических (с периодом 1) функций f, ограничение которых на отрезок $[0, 1]$ есть характеристическая функция некоторого интервала. Вейль заметил, что если это равенство выполняется для описанного класса функций, то оно верно для функций с периодом 1 и интегрируемых по Риману (на отрезке $[0, 1]$) и, в частности, для характеров $e(nx)$ аддитивной группы действительных чисел по модулю 1; обратно, если равенство выполняется для характеров, то оно справедливо, в силу классической теоремы о рядах Фурье, и для любой интегрируемой по Риману периодической функции, откуда следует равномерность распределения (α_n) по модулю 1; все эти утверждения очевидны. Отсюда немедленно вытекает без использования леммы о диофантовых приближениях равномерность распределения по модулю 1 последовательности $(n\alpha)$ для иррационального α; заменив группу действительных чисел по модулю 1 тором произвольной размерности, мы получаем также без всяких вычислений количественную форму знаменитых теорем Кронекера об аппроксимации. Все это, столь новое во времена работы Вейля, сейчас нам кажется очень простым, почти тривиальным. Но и сегодня нас поражает немедленный переход Вейля к доказательству равномерности распределения последовательности $(P(n))$, где P — многочлен. Эта задача естественно появляется в связи с проблемой оценки экспоненциальной суммы $\Sigma e(P(n))$, которой занимались уже до этого Харди и Литтлвуд. Точнее, требуется показать, что если P — многочлен с иррациональным коэффициентом при старшем члене, то

$$\sum_{n=0}^{N} e(P(n)) = o(N).$$

Чтобы пояснить метод Вейля, который (с усовершенствованиями И. М. Виноградова и его школы) остается одним из фундаментальных в аналитической теории чисел, рассмотрим случай, когда P — многочлен второй степени. Пусть

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} e(\alpha n^2 + \beta n),$$

[4] Здесь и далее используется обозначение $e(t) = e^{2\pi i t}$.

где α иррационально. Как в классическом исчислении гауссовых сумм, делаем преобразования

$$|s_N|^2 = s_N \bar{s}_N = \sum_{m,\, n=0}^{N} e(\alpha(m^2 - n^2) + \beta(m - n)) = \sum_{r=-N}^{N} e(\alpha r^2 + \beta r) \sum_{n \in I_r} e(2\alpha rn);$$

здесь мы положили $m = n + r$ и через I_r обозначили пересечение отрезков $[0, N]$ и $[-r, N - r]$. Обозначив последнюю сумму (распространенную на I_r) через σ_r, получаем $|s_r|^2 \leqslant \Sigma\, |\sigma_r|$. Поскольку σ_r есть сумма не более чем $N + 1$ члена, для любого r имеем $|\sigma_r| \leqslant N + 1$; так как, с другой стороны, σ_r есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем $e(2\alpha r)$, имеем также

$$|\sigma_r| \leqslant |\sin(2\pi\alpha r)|^{-1}.$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$; в силу равномерности распределения чисел $2\alpha r$ по модулю 1 количество целых $r \in [-N, N]$, таких, что $2\alpha r$ принадлежит по модулю 1 отрезку $[-\varepsilon, \varepsilon]$, равно $4\varepsilon N + o(N)$ и, следовательно, $\leqslant 5\varepsilon N$ для достаточно больших N. Для каждого из этих r пользуемся оценкой $|\sigma_r| \leqslant N + 1$, для остальных оценкой $|\sigma_r| \leqslant 1/\sin(\pi\varepsilon)$. Для достаточно больших N получаем

$$|s_N|^2 \leqslant 5\varepsilon N(N + 1) + (2N + 1)/\sin(\pi\varepsilon).$$

При больших N правая часть $\leqslant 6\varepsilon N^2$; так как это верно для любых ε, мы заключаем, что $s_N = o(N)$. В случае когда степень многочлена P равна $d + 1$, где $d > 1$, доказательство проводится аналогично (а не сводится к случаю, когда степень равна d) с помощью леммы о равномерном распределении по модулю 1 полилинейной функции от d переменных. Полученный результат распространяется на многочлены от нескольких переменных индукцией по числу переменных.

В этой восхитительной работе Вейль уже очень близко подошел к почти периодическим функциям. В самом деле, в ней речь идет, по существу, о циклических и конечномерных торических подгруппах, в то время как в теории почти периодических функций мы имеем дело с торическими подгруппами бесконечной размерности.

Можно даже сказать, что эта теория, вызвавшая такой интерес в десятилетие, последовавшее за публикацией работы Г. Бора в 1924 г., сыграла принципиальную роль в установлении связи между классической и современной точками зрения на компактные и локально компактные группы. В то время когда Вейль занимался в Геттингене равномерными распределениями по модулю 1 (в 1913 г.), первые идеи о почти периодических функциях уже «носились в воздухе». Задача о среднем движении требовала изучения экспоненциальных сумм, правда на этот раз конечных, и Вейль здесь исследовал некоторые частные случаи, не углубляя этого вопроса, который должен был быть решен окончательно все теми же методами лишь спустя 25 лет [4]. Но Г. Бор, тогдашний ученик Ландау, занимался экспоненциальными рядами, изучая ζ-функцию на комплексной плоскости. С этой же проблемой вскоре мимоходом столкнулся Вейль, определив с помощью своего метода асимптотику $\zeta(1 + it)$ [5]. С другой стороны, ученики Гильберта имели обыкновение рассматривать члены ряда Фурье как собственные функции, а его коэффициенты как собственные значе-

ния надлежащим образом определенных операторов. И когда появились первые работы Бора по почти периодическим функциям, кажется, в сознании Вейля все было подготовлено к тому, чтобы взяться за изучение вопроса с точки зрения интегральных уравнений.

Но редко бывает так, чтобы математик, самый великий или самый скромный, избирал кратчайший путь от одного предмета к другому. Прежде чем вернуться к почти периодическим функциям, Вейль под впечатлением лекции, которую прочитал Г. Бор в Цюрихе, закончил свои знаменитые исследования по группам Ли и их представлениям и вынашивал необыкновенно смелый для своего времени замысел построения представлений компактных групп Ли посредством разложения бесконечномерного представления на неприводимые. Воспитанные на достижениях последних тридцати лет, мы уже не удивляемся подобной идее. Но самому автору успех казался истинным чудом. «В этом состоит,— повторял он неоднократно,— наиболее изумительное приложение методов интегральных уравнений». Еще И. Шур распространил на ортогональную группу посредством введения инвариантной меры на групповом пространстве соотношения ортогональности между матричными элементами представлений, которые Фробениус открыл для представлений конечных групп; но отсюда было еще далеко до теоремы существования. Вейль, не колеблясь, вводит групповую алгебру на компактных группах Ли, понимаемую им как алгебру непрерывных функций с операцией свертки

$$h = f * g, \quad h(s) = \int f(st^{-1})\, g(t)\, dt,$$

и эту алгебру он превращает в предгильбертово пространство, вводя норму $(\int |f|^2 ds)^{1/2}$; интегрирование, разумеется, проводится по инвариантной мере, которая постоянно используется в теории Ли и которую первым стал употреблять Гурвиц. В этом пространстве оператор $f \to \varphi * \tilde{\varphi} * f$, где через $\tilde{\varphi}$ обозначена функция $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s^{-1})$, является эрмитовым и вполне непрерывным; из теории Э. Шмидта известно, что собственные значения таких операторов образуют дискретный спектр и каждому соответствует конечномерное собственное пространство функций, и мы немедленно заключаем, что это пространство инвариантно относительно действия группы; следовательно, оно является пространством представления этой группы. Теоремы Шмидта позволяют получить, таким образом, разложение φ по матричным элементам полученных представлений, разложение, которое сходится по норме. Это является прямым обобщением метода Фробениуса, основанного на разложении регулярного представления конечной группы; единственным отличием, как замечает Вейль, является отсутствие единичного элемента в групповой алгебре компактной группы. Вейль здесь использует прием, взятый из теории рядов Фурье: единичную массу, помещенную в единицу группы, он приближает непрерывным распределением единичной массы в окрестности единицы; свертка с такой функцией определяет «оператор регуляризации», общеупотребимый сегодня, но в теории групп Ли в то время встретившийся впервые. Вейль пользуется этим для доказательства того, что всякая непрерывная функция может быть приближена линейными комбинациями матричных элементов представления не только по норме, но и поточечно.

Несмотря на то, что Вейль ограничивался рассмотрением групп Ли, в действительности им были получены результаты, касающиеся представлений любых компактных групп; после открытия меры Хаара оказалось, что в его изложении не надо менять ни единого слова, и, как редко бывает в математике, никому не пришла в голову идея переписать его работу. Если, как мы это делаем сегодня, рассматривать почти периодические функции как определяющие представление аддитивной группы действительных чисел в компактную группу и если еще использовать понятие меры Хаара, то сразу можно получить изложенные выше результаты Вейля о разложении функции в экспоненциальный ряд. Этого аппарата недоставало Вейлю в 1926 г., чтобы встать на такую точку зрения; поэтому он вместо интеграла использует среднее по прямой, определяемое как предел при $T \to \infty$ среднего значения на отрезке $[t, t+T]$, когда этот предел достигается равномерно по параметру t. В 1926 г. не было очевидным, что теорию интегральных уравнений можно применять к этому среднему; Вейлю пришлось посвятить значительную часть своего труда для обоснования этого применения. С другой стороны, достаточно заметить, что простейший способ построения меры Хаара на компактной группе состоит как раз в том, что каждой непрерывной функции ставится в соответствие ее среднее способом, пришедшим из теории почти периодических функций. То, что Вейль в теории Бора видел «первый пример представлений по настоящему некомпактных групп» (в отличие от полупростых групп Ли, представления которых, по его мнению, сводились «унитарным трюком» к представлениям компактных групп),— это показывает, что он питал еще некоторые иллюзии в отношении степени сложности задач, которые оставалось решить. Но тем не менее он, безусловно, открыл путь для дальнейшего прогресса в этом направлении.

Мы будем говорить об остальной части его работы аналитика более коротко, тем более что сам он прекрасно рассказал о большей части этой работы в своей гиббсовской лекции 1948 г. [6]. Вначале он принял активное участие в исследованиях, целью которых было углубление и приложение к различным задачам анализа спектральной теории симметричных операторов. Отметим, в частности, его «Habilitationsschrift» [7] 1910 г., где он изучает самосопряженный дифференциальный оператор L на полупрямой $[0, +\infty)$

$$L(u) = \frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right) - q(t)u,$$

где p и q принимают действительные значения и $p(t) > 0$. На каждом конечном отрезке $[0, l]$ этот оператор, удовлетворяющий условиям обычного типа на концах $(du/dt)_0 = Lu(0)$, $(du/dt)_l = L'u(l)$, подчиняется теории Штурма—Лиувилля, или, в современных терминах, теории вполне непрерывных операторов. Спектр этого оператора действителен и дискретен и состоит из тех λ, для которых уравнение $Lu = \lambda u$ имеет решение, удовлетворяющее условиям, наложенным на концах. При переходе к пределу при $l \to +\infty$ появляется не только непрерывный спектр, который может покрывать всю действительную ось, но и непредвиденные явления, открытие которых принадлежит Вейлю. Наиболее интересные касаются поведения решений при $l \to +\infty$, когда фиксируется чисто мнимое значение λ; замечательно, что они не зависят от выбора λ. Таким образом, Вейль выявил фундаментальное различие между случаем «предельной

точки» и случаем «предельного круга»: одна из отличительных особенностей первого состоит в том, что уравнение $Lu = \lambda u$ для любого чисто мнимого λ всегда имеет решения и притом ровно одно с суммируемым квадратом на полупрямой $[0, +\infty)$, в то время как в случае предельного круга все решения для чисто мнимых λ имеют суммируемый квадрат. Вейль изучает также переход к пределу при $l \to +\infty$ разложения Штурма—Лиувилля на отрезке $[0, l]$; он отсюда получает интегральные формулы, в которых в общем случае появляются интегралы Стильтьеса, как этого и можно было ожидать. Проблема моментов Стильтьеса есть, впрочем, не что иное, как конечно-разностный аналог уравнения $Lu = \lambda u$ на полупрямой, и Хеллингер впоследствии показал, что метод Вейля сюда переносится без изменений. Позже Вейлю удалось применить его к дифференциальному уравнению, куда спектральный параметр входит нелинейно, и к соответствующему уравнению в конечных разностях, которое он называл уравнением Пика—Неванлинны [8]; при этом он добился заметных улучшений по сравнению со своим первоначальным изложением. Хотя последние результаты были обобщены в нескольких направлениях, кажется, тем не менее, что истинное значение работы Вейля об уравнениях с нелинейным параметром еще не прояснено.

Другая серия работ посвящена проблеме распределения собственных значений для различных уравнений эллиптического типа. Эти работы основаны на принципе, который позже был популяризован Курантом в следующей форме: пусть A — симметричный вполне непрерывный оператор на гильбертовом пространстве H, тогда его n-е собственное число есть «minimum maximorum», т. е. минимум значений нормы ($\max (Ax, Ax)/(x, x)$) ограничений оператора A на подпространства H коразмерности $n - 1$. Впрочем, если иметь в своем распоряжении теорию вполне непрерывных операторов, принцип этот проверяется немедленно. Вейль виртуозно применял его в различных вопросах физики. Что касается асимптотического поведения собственных функций, то, как говорил он в 1948 г., у него были некоторые гипотезы, «но не предприняв в течение более чем тридцати лет никакой серьезной попытки их доказать, я предпочитаю держать их при себе», — добавляет он; эта более сложная задача осталась в наследство его преемникам.

Неудивительно, что Вейль, будучи аналитиком и учеником Гильберта, избрал в качестве предмета для одного из первых курсов, которые он читал в Геттингене как молодой приват-доцент, теорию функций по Риману. Закончив и отредактировав этот курс, он сделался геометром и заодно автором книги [9], которая оказала глубокое влияние на математическую мысль его века. Вначале он, возможно, предполагал лишь приспособить, используя идеи Гильберта о принципе Дирихле, традиционное изложение, пример которого дает классическое сочинение К. Неймана, к современным вкусам. Но вскоре ему стало ясно, что для того, чтобы заменить постоянные апелляции его предшественников к интуитивной очевидности корректными или, как тогда говорили, «строгими» обоснованиями (в окружении Гильберта не признавали жульничества), необходимо было прежде всего перестроить топологические основы. Не похоже, чтобы Вейль своими предыдущими работами был к этому подготовлен. Он мог опираться на работы Пуанкаре, но он мало говорит о них. Он упоминает как оказавшие на него глубокое влияние исследования Брауэра, которые тогда только

начинали появляться, но на самом деле нигде их не использует. Частые контакты с Кёбе, который в то время полностью посвятил себя униформизации функций одной комплексной переменной, должны были быть ему очень полезны, преимущественно для оттачивания собственных идей. Первое издание книги посвящено Феликсу Клейну, который, как говорит Вейль в предисловии, разумеется, не мог не заинтересоваться работой, столь близкой занятиям его молодости, и не дать ее автору некоторых советов, порожденных его блестящей интуицией и глубоким знанием работ Римана. Хоть Клейн и не был знаком с Риманом, именно он воплощал в Геттингене его традиции. Наконец, в одном из своих мемуаров об основаниях геометрии Гильберт сформулировал систему аксиом, основанную на понятии окрестности, подчеркивая, что это — наилучшая отправная точка для строгой аксиоматизации analysis situs. Из всех этих столь разных элементов, которыми Вейль был обязан традиции и окружению, он создал глубоко оригинальную книгу, открывшую эпоху.

Книга состоит из двух глав, первая из которых содержит количественную часть теории. Понятия «поверхности» (топологического двумерного многообразия со счетной базой) и «римановой поверхности» (комплексного аналитического многообразия со счетной базой комплексной размерности 1) здесь определены посредством системы аксиом, по образцу системы аксиом Гильберта, которой на этот раз, если забыть небольшую неточность в первом издании, суждено было существовать без изменений и послужить Хаусдорфу моделью для аксиоматизации общей топологии. В первом и во втором изданиях условие счетности базы появлялось в форме условий триангулируемости, и триангуляция играла большую роль во всей книге; из третьего издания она была полностью исключена. Вопросы, касающиеся фундаментальной группы, универсального накрытия и ориентации, были тщательно изложены во вполне современном духе, так же как и соотношения между гомологическими свойствами и периодами простых интегралов на поверхности. В первом и во втором изданиях автор подошел к построению для компактных ориентируемых поверхностей системы разрезов, т. е., в сущности, выделенной системы образующих первой группы гомологий. По его словам, он мог бы ценой небольшого дополнительного усилия дойти до представления поверхности посредством «канонического многоугольника» с $4g$ сторонами (g означает род поверхности) и до явного определения фундаментальной группы; можно пожалеть о том, что он этого не сделал. Но сама конструкция разрезов, основанная на триангуляции, исчезла в третьем издании, уступив место чисто гомологическому рассмотрению, не использующему ничего, кроме накрытия. Во всяком случае, основные вопросы, затронутые в этой главе, исследованы в ней почти до конца.

Вторая глава посвящена теоремам существования. С помощью принципа Дирихле Вейль дает более простое их доказательство, основанное, естественно, на идее Гильберта, которая состоит в использовании дифференцируемых функций в предгильбертовом пространстве с нормой Дирихле; но даже в третьем издании Вейль не использует прием, созданию которого он сам способствовал [10] и который заключается в ортогональном проектировании на пополнение исходного пространства и в последующем доказательстве дифференцируемости полученного решения. Пользуясь принципом Дирихле, автор получает основ-

ные свойства абелевых интегралов, мультипликативных функций, теорему Римана—Роха, теорему об униформизации, т. е. конформном представлении универсального накрытия римановой поверхности на сфере, плоскости или диске. Если не рассматривать случай, когда род поверхности равен 0 или 1, то результат можно сформулировать следующим образом: всякую компактную риманову поверхность рода больше 1 можно получить факторизацией плоскости Лобачевского по действию некоторой дискретной группы движений без неподвижных точек. «Таким образом,— пишет Вейль в предисловии к первому изданию,— мы проникаем в храм, где божество предстает перед нами самим собой, освобожденное от земных воплощений,— неевклидов кристалл, в котором риманова поверхность видна в своей первоначальной чистоте». Без сомнения, именно эту фразу Вейль имел в виду, когда позже писал о своем предисловии, что «оно более, чем сама книга, выдавало молодость автора». Сегодня мы бы сказали, что Вейль построил каноническую, с точностью до движений плоскости Лобачевского, модель римановой поверхности, иначе говоря, он канонически сопоставил одну структуру с другой. Но кто упрекнет Вейля, создавшего такую ценную книгу, за, быть может, чересчур романтическое выражение своего юношеского энтузиазма?

В 1916 г., во время войны, Вейль написал в Швейцарии свою первую геометрическую работу; она касалась знаменитой проблемы жесткости выпуклой поверхности [11]. Интерес к этой задаче зародился у него опять-таки в Геттингене. Так, под руководством Гильберта Вейль участвовал в издании полного собрания сочинений Минковского, в которых теория выпуклых тел занимает такое большое место. С другой стороны, Гильберт показал, как неравенства Брунна—Минковского связаны с теорией эллиптических дифференциальных операторов. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ введено скалярное произведение $\langle x, y\rangle$, V — выпуклое тело в этом пространстве, определяемое опорной функцией H; другими словами, H удовлетворяет условиям

$$H(x+x') \leqslant H(x) + H(x'), \qquad H(\lambda x) = \lambda H(x) \quad \text{при } \lambda \geqslant 0,$$

а V состоит из таких точек y, что $\langle x, y\rangle \leqslant H(x)$ для любого x. Если функция H дифференцируема всюду, кроме 0, то объем тела V определяется по формуле

$$\mathrm{vol}\,(V) = \int HQ(H)\,d\omega,$$

где интеграл берется по единичной сфере S_0 (определяемой условием $\langle x, x\rangle = 1$), $d\omega$ — элемент площади на S_0 и $Q(H)$ — некоторая квадратичная форма, составленная из вторых частных производных функции H.

Пусть F и F' — функции, дифференцируемые вне 0 и удовлетворяющие условию однородности $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ при $\lambda \geqslant 0$; пусть, далее, $B(F, F')$ — билинейная симметрическая форма, составленная из вторых частных производных функций F и F', которая получается из квадратичной формы $Q(H)$ посредством поляризации, т. е. такая, что $Q(H) = B(H, H)$; положим еще $L_F(F') = B(F, F')$. С помощью формулы Стокса легко проверить, что интеграл

$$I(F, F', F'') = \int\limits_{S_0} F''B(F, F')\,d\omega,$$

в котором F'' — третья функция, удовлетворяющая тем же условиям, что F и F', симметричным образом зависит от F, F' и F''. Таким образом, оператор L_F рассматриваемый как дифференциальный оператор на функциях на S_0, продолженный в $\boldsymbol{R}^3$ при помощи условия однородности, является самосопряженным оператором. Если выпуклые тела V' и V'' определяются опорными функциями H' и H'', то из приведенных выше формул следует, что «смешанные объемы», определенные Минковским для тройки V, V', V'', равняются I (H, H, H') и I (H, H', H''); более того, несложное вычисление показывает, что L_H есть эллиптический оператор. В своих «Основаниях» («Grundzüge») [12] Гильберт показал, что применение теории эллиптических самосопряженных операторов к L_H в дифференцируемом случае приводит к неравенству Брунна—Минковского. Оказывается, что L_H есть в точности оператор, возникающий в теории инфинитезимальных деформаций поверхности Σ, ограничивающей V; это наблюдение принадлежащее Бляшке, соединенное с результатами Гильберта, влечет за собой невозможность такой деформации поверхности Σ. Наконец, Гильберт, занимаясь основаниями геометрии, доказал, что не существует изометрического отображения сферы ни на какую выпуклую несферическую поверхность. Впрочем, подобные результаты о выпуклых многогранниках были ранее получены Коши: не только все выпуклые многогранники не допускают никаких бесконечно малых деформаций, но также любые два выпуклых многогранника P и P' с одинаковой комбинаторной схемой и с равными соответствующими гранями получаются один из другого движением или симметрией. Все это ставило на повестку дня распространения на выпуклые поверхности второй теоремы Коши.

Но Вейль не останавливается на этом. Он одновременно изучает проблему существования, которую до этого никто еще не формулировал, поскольку тогда не было ясного понятия абстрактного риманова многообразия. Имеется в виду вопрос, «всякая ли выпуклая замкнутая поверхность, заданная in abstracto», или, как мы бы сказали сегодня, всякое ли связное компактное двумерное риманово многообразие положительной кривизны допускает изометрическое вложение в евклидово пространство $\boldsymbol{R}^3$; Вейль начал с проблемы единственности, соответствующей этой проблеме существования. Его работа была прервана мобилизацией в 1915 г., и он лишь набросал идею доказательства, которое так никогда и не довел до конца. Он начал с того, что всякую выпуклую поверхность in abstracto представил конформно на сфере S_0, т. е. задал ее на S_0 метрикой $ds^2 = e^{2\Phi}d\sigma^2$, где $d\sigma$ — «естественная» длина дуги и Φ — дифференцируемая функция на S_0; пусть Σ (Φ) — «абстрактная поверхность», заданная таким образом. Условие положительности кривизны поверхности Σ (Φ) выражается дифференциальным неравенством $K(\Phi) > 0$; сразу видно, что множество функций Φ, удовлетворяющих этому неравенству, выпукло, откуда следует связность множества выпуклых абстрактных поверхностей. Идея Вейля состоит в применении к проблеме метода непрерывности. Все сводится к тому, чтобы определить отображение φ из $S_0 \times I$ (где I — отрезок $[0,1]$) в $\boldsymbol{R}^3$, такое, что для каждого τ отображение $x \to \varphi_\tau(x) = \varphi(x, \tau)$ из S_0 в R^3 есть изометрия поверхности Σ $(\tau\Phi)$ на выпуклую поверхность $S_\tau = \varphi_\tau(S_0)$. Для этого Вейль рассматривает $\partial\varphi/\partial\tau$ как инфинитезимальную деформацию, определение которой

сводится к решению уравнения $\Lambda u = f$, где f — функция на S_0, зависящая от S_τ, и Λ есть, по существу, эллиптический оператор, соответствующий S_τ. Применение метода Гильберта к этому уравнению приводит в принципе к дифференциальному уравнению для φ_τ; требуется найти решение этого уравнения, совпадающее при $\tau = 0$ с вложением S_0 в $\boldsymbol{R}^3$; можно было ожидать, что какими-нибудь классическими методами дифференциальных уравнений удастся это сделать. Полное доказательство, основанное на этой идее, было не так давно получено Ниренбергом [13], данных здесь кратких набросков по меньшей мере будет достаточно, чтобы представить величайшую смелость идеи Германа Вейля.

По возвращении в Цюрих в 1916 г. Вейль, казалось, был не прочь вернуться к выпуклым поверхностям. Его новое доказательство результатов Коши о многогранниках предвещало возможность формирования нового подхода, основанного на менее инфинитезимальных и более прямых методах. Но вскоре теория относительности привлекает и полностью захватывает его внимание.

Здесь он также следовал традициям. Минковский активно участвовал в исследованиях, которые развернулись вокруг специальной теории относительности. Гильберт внимательно следил за работой Эйнштейна, пытался, без особого, впрочем, успеха, прояснить физические проблемы с помощью аксиоматического метода [14]. «В физике нужен иной тип воображения, чем в математике»,— отмечает с оттенком грусти Герман Вейль позже в своей заметке о Гильберте. Когда он писал эти слова, он, без сомнения, думал также о своем собственном опыте, о той «теории Вейля», в которую, как он говорил в тот же период, он давно уже больше не верил. Но в течение нескольких лет, начиная с 1917 г., его энтузиазм был безграничен. В 1918 г. он публикует курс теории относительности, прочитанный им в предыдущем году под названием «Raum, Zeit, Materie» [15]. «По случаю этой важной темы,— пишет он в предисловии к первому изданию,— мне захотелось дать пример столь близкого моему сердцу взаимопроникновения философского, математического и физического мышления... однако,— не без наивной скромности добавляет он,— математик во мне взял верх над философом»; но не математикам об этом жалеть. Пять изданий его произведения сильно способствовали распространению среди математиков и физиков геометрических познаний и основных понятий алгебры и тензорного анализа. Начиная с третьего издания сюда входит также «теория Вейля», первая попытка «единой теории», объединяющей в одну геометрическую схему электромагнитные явления и гравитацию. Эта теория была основана, как сказали бы мы сегодня, на связности по отношению к группе преобразований подобия относительно квадратичной формы сигнатуры (1, 3), в то время как Эйнштейн ограничивался связностью по отношению к группе Лоренца (ортогональная группа, сохраняющая форму сигнатуры (1, 3). Более точно, теория была основана на связности без кручения, получающейся канонически (параллельным переносом) из формы ds^2 сигнатуры (1, 3). Достоинство этой теории состоит по меньшей мере в расширении рамок традиционной римановой геометрии и в подготовке путей для «обобщенных геометрий» Картана, т. е. для общей теории связностей по отношению к произвольным группам Ли.

Что касается философских занятий Вейля в этот период интенсивного брожения, они не замедлили (мы могли бы сказать, к счастью) вылиться в более узкую, математическую форму, приведя его к поиску возможно более простой аксиоматики геометрических структур, возникающих в теории Эйнштейна и его собственной; это то, что он называет «Raumproblem», проблемой пространства; ей он посвящает множество статей, курсы лекций в Барселоне и Мадриде и небольшую книжку по этим лекциям [16]. В действительности, в ней речь идет о том, чтобы охарактеризовать ортогональную группу (по отношению к комплексной или действительной квадратичной форме произвольной сигнатуры), как и линейную группу, несколькими простыми условиями, с помощью которых можно было бы показать, что геометрия «Вселенной» определяется локально такой группой. Разумеется, основную роль в этом вопросе играет теория групп Ли и их представлений; в приложении к своей книге Вейль дает ее конспективное изложение. Картан, со своей стороны, дал другое доказательство основного относящегося сюда математического результата Вейля, основанное на его собственных методах.

Не в характере Вейля было, оказавшись на пороге открытий Картана со своими достижениями в этой области, ограничиться здесь беглым взглядом. С другой стороны, возможно после ранившего его замечания Штуди, он заинтересовался инвариантами классических групп. Штуди в одном предисловии, написанном в 1923 г. [17], упрекнул его и других релятивистов в том, что они за недостатком внимания к предмету «пустили под пар богатую культурную область», подразумевая в основном теорию инвариантов проективной группы, к которой, с грехом пополам, присоединяли и другие группы при изучении инвариантов по отношению сразу к нескольким формам. Вейль ответил Штуди с необыкновенной находчивостью статьей, в которой вновь сводит все к классической теории посредством алгебраических тождеств Капелли и показывает также, как можно ее распространить на ортогональные и симметрические группы; и это не мешает ему возразить: «Если бы даже он был бы так же хорошо знаком с теорией инвариантов, как Штуди, у него все равно не нашлось бы никаких оснований для использования ее в своей книге: всему свое место!» [18].

Синтез этих двух направлений мысли совершается в его большом мемуаре 1926 г. [19], состоящем из четырех глав, о котором в конце своей жизни Вейль говорил, что он представляет «в некотором роде вершину его математического творчества». Проделанное Юнгом около 1900 г. исследование разложения тензоров на неприводимые, выделяемые условиями симметрии, привело, по существу, к определению всех «простых», т. е. неприводимых, представлений специальной линейной группы; но, поскольку эти исследования замыкались рамками традиционной теории, было, по определению, невозможно получить этот результат в такой форме. С другой стороны, Картан, отправляясь от общей теории групп Ли, нашел все эти представления: впрочем, как кажется, он не связывал эти результаты с результатами Юнга. Обозначим через G специальную линейную группу, через $\mathfrak{g}$ ее алгебру Ли, состоящую из матриц с нулевым следом, и через $\mathfrak{h}$ множество диагональных матриц, содержащихся в $\mathfrak{g}$. Неприводимое представление группы G определяет неприводимое представление ρ алгебры $\mathfrak{g}$ и, следовательно, представление алгебры $\mathfrak{h}$. Картан показывает, что

пространство V представления ρ натянуто на векторы, собственные для всех операторов $\rho(H)$, где $H \in \mathfrak{h}$. Пусть e — один из собственных векторов; тогда $\rho(H)\ e = \lambda(H)\, e$, где λ — линейная форма на $\mathfrak{h}$, называемая *весом* вектора e; если H — диагональная матрица с диагональными элементами $a_1, \ldots, a_n$, то, очевидно, $\lambda(H)$ имеет вид $m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n$, где m_i — целые числа, определенные с точностью до аддитивной постоянной. Упорядочив лексикографически множество наборов $(m_1, \ldots, m_n)$ из n целых чисел, получим отношение порядка на множестве весов представления группы G. *Старшим весом* неприводимого представления называется наибольший (в смысле введенного порядка) из весов этого представления. Картан показал, что этот старший вес полностью определяет представление (с точностью до эквивалентности), что соответствующий ему набор целых чисел (m_i) удовлетворяет условию $m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_n$, и обратно, всякий набор целых чисел, для которого выполнены эти неравенства, является старшим весом некоторого неприводимого представления группы G. Пусть теперь ρ и ρ' — два неприводимых представления группы G в пространствах V и V' соответственно, λ и λ' — их старшие веса, e и e' — векторы из V и V' с весами λ и λ' соответственно. Тензорное произведение $\rho \otimes \rho'$ представлений ρ и ρ' (называемое иногда произведением Кронекера и у Вейля чаще обозначаемое через $\rho \times \rho'$) действует в пространстве $V \otimes V'$ размерности, равной произведению размерностей пространств V и V', составленном из линейных комбинаций элементов, преобразующихся под действием G как формальные произведения xx' (где $x \in V$, $x' \in V'$); для этого представления вектор $e \otimes e'$ имеет вес $\lambda + \lambda'$. Пусть W — подпространство произведения $V \otimes V'$, порожденное вектором $e \otimes e'$ и его образами под действием элементов группы G; из результатов Картана легко выводится, что W не разлагается в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно действия группы G, и Картан сделал отсюда вывод, что W доставляет неприводимое представление со старшим весом $\lambda + \lambda'$. Вейль заметил, что этот вывод незаконен, поскольку неизвестно a priori, что все представления группы G являются полупростыми (т. е. вполне приводимыми). По правде говоря, этот последний результат не был необходим для доказательства того, что разложение Юнга пространства тензоров доставляет все простые представления группы G; на самом деле Юнг установил неприводимость построенных им представлений, и с помощью несложных вычислений оставалось показать, что все старшие веса, предсказанные теорией Картана, встречаются в этих представлениях. Но таким образом получалась классификация лишь неприводимых представлений. Вейль же, доказав полную приводимость всех представлений группы G, получил (с учетом результатов Юнга и Картана) полную классификацию, которая заключалась в том, что всякая, как он говорит «линейная величина», разлагается на неприводимые тензоры.

Сейчас известно алгебраическое доказательство полной приводимости; это отправная точка когомологической теории алгебр Ли. Но Вейль получает свое доказательство из совершенно других соображений. Он замечает, как это уже сделал Гурвиц в своей статье о построении инвариантов интегральным методом, что теория представлений *комплексной* линейной специальной группы G эквивалентна теории представлений группы G_u, образованной *унитарными* операторами, принадлежащими группе G; в конечном счете это ведет к тому, что лю-

бое алгебраическое тождество между элементами унитарной матрицы остается справедливым для произвольной матрицы. Группа G_u в отличие от группы G обладает одним важным свойством: она *компактна*, и это позволяет, как показал Гурвиц, строить инварианты группы G_u *и, следовательно, группы* G интегрированием в пространстве группы G по инвариантной мере, доставляемой теорией Ли. Таким образом, классический метод доказательства полной приводимости представлений конечных групп с помощью построения положительно определенной эрмитовой формы, инвариантной относительно действия группы, распространяется на группу G_u.

Сужение на унитарную группу G_u было использовано Вейлем не только для доказательства теоремы о полной приводимости: с его помощью он также явно вычисляет характеры и размерности неприводимых представлений группы G. Действительно, сразу видно, что если χ — характер представления группы G_u, S — диагональная унитарная матрица с единичным определителем и диагональными элементами $e(x_1), \ldots, e(x_n)$, то значение $\chi(s)$ выражается конечной суммой Фурье от $x_1, \ldots, x_n$ и не меняется при перестановках x_i. Вейль показывает, что этих свойств, соединенных с соотношениями ортогональности (также получаемых методом интегрирования), вполне достаточно для определения характеров и для получения их явных выражений.

Следующая часть работы Вейля посвящена обобщению этих методов на ортогональные, симплектические и затем на наиболее общие полупростые группы. Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли; для изучения ее представлений Вейль применяет метод унитарного ограничения в группе G, действующей в алгебре посредством присоединенного представления; элементы группы G записываются в виде матриц по отношению к подходящему базису в $\mathfrak{g}$. Для того чтобы в группе G было «достаточно» унитарных операций, необходимо, чтобы алгебра $\mathfrak{g}$ допускала, как говорят сегодня, компактную форму, или, более подробно, чтобы в ней существовал базис, действительные линейные комбинации элементов которого составляли алгебру Ли некоторой компактной группы.

Изучив по отдельности все простые группы, Картан проверил в каждом случае существование компактной формы; Вейль же дает доказательство, основанное на свойствах структурных констант алгебры $\mathfrak{g}$. После этого он вводит группу G_u унитарных операций группы G и ее алгебру Ли $\mathfrak{g}_u$. Группа G_u компактна, и теория представлений алгебры $\mathfrak{g}_u$ эквивалентна теории представлений алгебры $\mathfrak{g}$. Но здесь возникает новая трудность: поскольку группа G_u может оказаться неодносвязной, теория представлений алгебры $\mathfrak{g}_u$ не будет полностью эквивалентна теории представлений группы G_u. Если пытаться установить эквивалентность, заменив группу G_u ее универсальной накрывающей G_u^* (которая односвязна), приходится доказывать, что она компактна и является группой, локально-изоморфной группе G_u. Последняя трудность, которая несколько позже была преодолена Шрейером, совершенно игнорируется в книге Вейля. Но главную трудность представляет утверждение о компактности. Оно, естественно, эквивалентно утверждению о конечности фундаментальной группы группы G_u. Для доказательства этой конечности Вейль вводит подгруппу A_u группы G_u, которая играет ту же роль, что группа диагональных матриц в теории специальной унитарной группы. Всякий элемент s из G_u сопряжен

с некоторым элементом из s; если исключить сингулярные элементы из A_u, образующие в G_u множество коразмерности 3, то элемент s сопряжен лишь с конечным числом элементов из A_u; более того, несингулярные элементы из A_u составляют в A_u односвязную область Δ. Допустим, что элементы s описывают в G_u замкнутую кривую Γ, которая не пересекает множество сингулярных элементов. Пусть $s(t)$ — точка с параметром t на Γ; можно определить по непрерывности кривую $a(t)$ в A_u, такую, что при каждом t элемент $a(t)$ сопряжен с $s(t)$. Когда точка $s(t)$ возвращается к своему начальному положению, т. е. $s(1) = s(0)$, точка $a(t)$ приходит в точку $a(1)$, которая есть элемент A_u, сопряженный с $a(0)$, что оставляет для $a(1)$ лишь конечное число возможностей. Если $a(1) = a(0)$, кривая, описываемая точкой $a(t)$, замкнута и стягиваема в точку в Δ; Вейль показывает, что тогда и Γ стягивается в точку. Отсюда он легко выводит, что фундаментальная группа множества несингулярных элементов G_u конечна. Отсюда и из того, что сингулярные элементы принадлежат подмногообразию коразмерности по меньшей мере 3 в G_u, Вейль заключает (по правде говоря, без доказательства), что и у самой группы G_u фундаментальная группа конечна.

Теперь открывается путь для полного обобщения на случай полупростых групп результатов, полученных для специальной линейной группы. Вейль доказывает полную приводимость представлений алгебры $\mathfrak{g}$ и явно определяет характер и размерность неприводимого представления с заданным старшим весом. При этом он пользуется соотношениями ортогональности для характеров и формальными свойствами ограничения χ характера на группу A_u^*, которая накрывает A_u в универсальной накрывающей G_u^* группы G_u. Эта группа — тор, χ — конечная линейная комбинация характеров на торе, инвариантная относительно действия некоторой конечной группы автоморфизмов тора S, которая обобщает группу перестановок $x_1, \ldots, x_n$, о которой шла речь выше в связи со специальной унитарной группой. Группа S, которая, как показало дальнейшее развитие теории, играет фундаментальную роль, называется теперь группой Вейля.

Наконец, теория завершается доказательством существования неприводимых представлений с данным старшим весом. Для простых алгебр их существование установил Картан прямым построением в каждом отдельном случае. Вейль же применяет к компактной группе метод разложения «регулярного представления», полученного с помощью интегральных уравнений, следуя идее, которую мы изложили выше. На этом пути Вейлю понадобилась еще одна лемма технического характера, лишь анонсированная в статье 1926 г.; ее доказательство появилось только в его лекциях 1934—1935 гг. (вышедших в Принстоне в виде мимеографированных заметок под названием «Структура и представления непрерывных групп»).

Много позже Вейль возвращается к определению представлений полупростых групп в своей книге «Классические группы, их инварианты и представления». Эта книга сильно отличается от работы 1926 г. Она, с одной стороны, содержит чисто алгебраическое доказательство результатов, полученных для представлений классических групп (общей линейной, специальной линейной, ортогональной и симплектической), и, с другой стороны, объединение этих ре-

зультатов и формальной теории инвариантов, развивавшейся под влиянием Кэли и Сильвестра в течение XIX столетия. Надеялся ли Вейль на этот раз окончательно очиститься от упрека Штуди, возродя к жизни теорию, которая едва не увяла в забвении? Он сам говорит, что гильбертово доказательство конечности «почти убило тему», но можно спросить: не Вейль ли нанес ей последний удар?

Ситуация, с которой мы сталкиваемся в теории инвариантов, следующая. Имеется одно или несколько линейных представлений ρ, ρ', . . . группы G в пространствах V, V', ... Рассматриваются функции $F(x, x', \ldots)$, зависящие от аргумента x из V, x' из V' и т. д., выражающиеся полиномиально через координаты этих аргументов и однородные по отношению к координатам каждого из них. Такая функция называется инвариантом, если для каждого элемента s из G выполнено равенство

$$F(sx,\ sx', \ldots) = F(x,\ x', \ldots).$$

Если $J_1, \ldots, J_h$ — инварианты, то всякий многочлен от $J_1, \ldots, J_h$, удовлетворяющий наложенным условиям однородности, также является инвариантом. Первая задача в теории предлагает найти инварианты $J_1, \ldots, J_k$, такие, что любой другой инвариант является многочленом от J_i; после этого требуется определить алгебраические соотношения $F(J_1, \ldots, J_k) = 0$, называемые сизигиями и связывающие между собой построенные инварианты. Рассмотрим частный случай, когда группа G отождествлена (с помощью представления ρ_1) с некоторой подгруппой линейной группы от n переменных, действующей в векторном пространстве $V_1 = k^n$, где поле k предполагается имеющим нулевую характеристику. Разберем сначала случай, когда все представления ρ, ρ', . . . совпадают с ρ_1; тогда говорят, что ищутся инварианты некоторого числа векторов (подразумеваются векторы из V). Как и в работе 1924 г. [18], явившейся ответом Штуди, Вейль, не делая существенных изменений, показывает, что задача отыскания инвариантов для n векторов в случае унимодулярной группы с помощью тождеств Капелли сводится к аналогичной задаче для $n - 1$ вектора. Если группа G не унимодулярна, результат остается справедливым для «относительных инвариантов» (полиномов, умножающихся на степень определителя s, когда все векторы подвергаются преобразованию s). Отсюда Вейль находит решения двух поставленных задач для унимодулярной и ортогональной групп; он обобщает это решение на случай инвариантов не только от когредиентных векторов (преобразующихся согласно представлению ρ_1), но и от контрагредиентных векторов (преобразующихся как линейные функционалы на V_1). Затем он переходит к инвариантам, зависящим от «количеств» x, x', . . ., принадлежащих пространству произвольного представления изучаемой группы; случай, когда x, x', . . . — однородные формы по отношению к координатам «контрагредиентного» вектора, рассматривается более частным образом в классической теории. Для исследования вопроса в столь общем случае необходимо, прежде всего, знание всех неприводимых представлений группы; поэтому существенная часть книги посвящена алгебраическому определению «тензорных» представлений классических групп. После этого Вейль показывает, что инварианты, зависящие от произвольного числа «количеств» пространства, выража-

ются полиномиальным образом через конечное их число; он обобщает в некоторой степени этот результат на аффинную группу. Наконец, он применяет интегральный метод для доказательства этого результата в случае любого представления компактной группы в векторном пространстве над полем действительных чисел.

К семидесятилетию Германа Вейля его друзья и ученики опубликовали том «Selecta» [20] — избранных его трудов. Возможно, нет оснований особенно радоваться этой манере отмечать избранными трудами выход на пенсию выдающихся математиков. Это слишком много для одних и недостаточно для других. Но книга, о которой идет речь, содержит, что уже хорошо, полную библиографию трудов Германа Вейля, размещенных в хронологическом порядке [5]; мы, естественно, часто к ней обращались, пока писали эту заметку. Чтобы исправить в какой-то мере неизбежные недостатки такой библиографии, мы даем ниже список работ Вейля, отобранных по темам; ничто не может лучше, как мы полагаем, показать их удивительное разнообразие. Нумерация, разумеется, отсылает к списку «Selecta» [21].

[5] Следует заметить, что в этой библиографии не упоминаются записки лекций, изданные в мимеографированном виде принстонским Институтом высших исследований, в которых воспроизведены многие прочитанные им курсы.

БИБЛИОГРАФИЯ[1]

I. МОНОГРАФИИ

1. Die Idee der Riemannschen Fläche. Leipzig, 1913; 2. Aufl., 1923; 3. Aufl., ferarbeit., 1955; Пер. на англ.: N. Y., 1951.
2. Raum, Zeit, Materie. B., 1918.
3. Das Kontinuum. Leipzig, 1918; 2. Aufl., B. 1932.
4. Kommentar zu Riemanns «Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen». B., 1919; 3. Aufl., 1923.
5. Mathematische Analyse des Raumproblems. B., 1923.
6. Was ist Materie? B.: Springer, 1924.
7. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.— In: Handbuch der Philosophie. München, 1926; 2. Aufl. München, 1950; Пер. на англ. отд. глав.— In: Applied combinatorical mathematics/ Ed. by E. F. Beckenbach. N. Y., 1964; Полн. пер. на англ.: Philosophy of mathematics and natural science. Princeton, 1949; 1950.
8. Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig, 1928; 2. Aufl., 1931; Пер. на англ.: N. Y., 1932; N. Y., 1949; Пер. на рус.: М.: Наука, 1984.
9. Die Stufen des Unendlichen. Jena, 1931.
10. The open world. L., 1932.
11. Mind and nature. Philadelphia; London, 1934.
12. Algebraic theory of numbers. Princeton, 1940.
13. The classical groups, their invariants and representations. Princeton, 1939; 2. Aufl., 1946.
14. Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, 1943.
15. Symmetry. Princeton, 1952; Пер. на нем.: Symmetrie. Basel; Stuttgart, 1955.
16. Selecta. Basel; Stuttgart, 1956.
17. Gesammelte Abhandlungen. B. etc.: Spring.-Verl., 1968, Bd. 1/4.

II. СТАТЬИ. ДОКЛАДЫ И ВЫСТУПЛЕНИЯ[2]

1908

1. Singuläre Integralgleihungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems: Dissertation. Göttingen, 1908.
2. Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten.— Math. Ann., 1908, Bd. 66, S. 67—80 (Jerosch F, Weil H.).
3. Singuläre Integralgleichungen.— Math. Ann., 1908, Bd. 66, S. 273—324.

1909

4. Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten.— Math. Ann., 1909, Bd. 67, S. 225—245.
5. Über beschränkte quadratische Formen deren Differentz vollstetig ist.— Rend. Circ. math. Palermo, 1909, vol. 27 p. 373—392.
6. Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit Singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen.— Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1909, S. 37—63.

1910

7. Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit Singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen (2. Note).— Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1910, S. 442—467.
8. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Sungularitäten und die zuge-

---

[1] Составлена А. П. Василевичем.

[2] В основу библиографии положен полный перечень работ Г. Вейля в книге: *Weyl H.* Gesammelte Abhandlungen/Hrsg. von. K. Chandrasekharan. B. etc.: Spring.-Verl., 1968, Bd. 4, S. 687—694. Все работы, перечисленные в данном списке, собраны в четырех томах указанного издания.

hörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen.— Math. Ann., 1910, Bd. 68, S. 220—269.
9. Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe.—Math.-naturwiss. Bl., 1910, Bd. 7, S. 93—95, 109—113.
10. Die Gibbssche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen.— Rend. Cir. mat. Palermo, 1910, vol. 29, p. 308—323.
11. Über die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene.— Rend. Circ. math. Palermo, 1910, vol. 30, p. 377—407.

1911

12. Zwei Bemerkungen über das Fouriersche Integraltheorem.— Jber. Dt. Math. Ver., 1911, Bd. 20, S. 129—141; Berichtigung zu meinem Aufsatz: Zwei Bemerkungen über das Fouriersche Integraltheorem.— Jber. Dt. Math. Ver., 1911, Bd. 20, S. 339.
13. Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte.— Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1911, S. 110—117.
14. Konvergenzcharakter der Laplaceschen Reihe in der Umgebung eines Windungspunktes.— Rend. Circ. mat. Palermo, 1911, vol. 32, p. 118—131.

1912

15. Henri Poincaré.— Math.-naturwiss. Bl., 1912, Bd. 9, S. 161—163.
16. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung).— Math. Ann., 1912, Bd. 71, S. 441—479.
17. Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung.—J. reine und angew. Math., 1912, Bd. 141, S. 1—11.
18. Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung.— J. reine und angew. Math., 1912, Bd. 141, S. 163—181.

1913

19. Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze.— J. reine und angew. Math., 1913, Bd. 143, S. 177—202.

1914

20. Über ein Problem aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen.— Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1914, S. 234—244.
21. Sur une application de la théorie des nombres à la mécanique statistique et la theórie des perturbations.—Enseign. math., 1914, vol. 16, p. 455—467.

1915

22. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers.— Rend. Circ. math. Palermo, 1915, vol. 39, p. 1—50.

1916

23. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.— Math. Ann., 1916, Bd. 77, S. 313—352.
24. Strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen.— Jber. Dt. Math. Ver., 1916, Bd. 25, S. 265—278.
25. Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement.— Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich, 1916, Bd. 61, S. 40—72.

1917

26. Le problème de l'analysis situs.— Enseign. math., 1917, vol. 19, p. 95—96.
27. Über die Starrheit der Einflächen und konvexer Polyeder.— S.-Ber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1917, S. 250—266.
28. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung.— Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich, 1917, Bd. 62, S. 296—302.
29. Zur Gravitationstheorie.— Ann. Phys., 1917, Bd. 54, S. 117—145.

1918

30. Reine Infinitesimalgeometrie.— Math. Ztschr., 1918, Bd. 2, S. 384—411.
31. Gravitation und Elektrizität.— S.-Ber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1918, S. 465—480.

1919

32. Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis.— Jber. Dt. Math. Ver., 1919, Bd. 28, S. 85—92.
33. Über die statischen kugelsymmetrischen Lösungen von Einsteins «kosmologischen» Gravitationsgleichungen.— Phys. Ztschr., 1919, Bd. 20, S. 31—34.
34. Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie.— Ann. Phys., 1919, Bd. 59, S. 101—133.
35. Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.— Ann. Phys., 1919, Bd. 59, S. 185—188.
36. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter.— Ann. Phys., 1919, Bd. 60, S. 481—500.

1920

37. Erwiderung auf Herrn Sommerfelds Bemerkungen über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie.— Ann. Phys., 1920, Bd. 62, S. 482—484.
38. Das Verhältnis der kausalen zur statistischen Betrachtungsweise in der Physik.— Schweiz. med. Wochenschr., 1920, S. 10.
39. Die Einsteinsche Relativitätstheorie, Schweizerland, 1920.— Schweiz. Bauzeitung, 1921.
40. Elektrizität und Gravitation.— Phys. Ztschr., 1920, Bd. 21, S. 649—650.

1921

41. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.— Math. Ztschr., 1921, Bd. 10, S. 39—79.
42. Zur Abschätzung von $\zeta(1 + ti)$.— Math. Ztschr., 1921, Bd. 10, S. 88—101.
43. Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und konformen Auffassung.— Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1921, S. 99—112.
44. Bemerkung über die Hardy-Littlewoodschen Untersuchungen zum Waringschen Problem.— Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys., Kl., 1921, S. 189—192.
45. Das Raumproblem.— Jber. Dt. Math. Ver., 1921, Bd. 30, S. 92—93.
46. Über die physikalischen Grundlagen der erweiterten Relativitätstheorie.— Phys. Ztschr., 1921, Bd. 22, S. 473—480.
47. Feld und Materie.— Ann. Phys., 1921, Bd. 65, S. 541—563.
48. Electricity and gravitation.— Nature, 1921, vol. 106, p. 800—802.

1922

49. Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Massbestimmung.— Math. Ztschr., 1922, Bd. 12, S. 114—116.
50. Zur Infinitesimalgeometrie: p-dimensionale Fläche im n-dimensionalen Raum.— Math. Ztschr., 1922, Bd. 12, S. 154—160.
51. Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.— Math. Ztschr., 1922, Bd. 13, S. 134—145.
52. Die Relativitätstheorie auf der Naturforscherversammlung.— Jber Dt. Math. Ver., 1922, Bd. 31, S. 51—63.
53. Das Raumproblem.— Jber. Dt. Math. Ver., 1922, Bd. 31, S. 205—221.

1923

54. Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe.— Math. Ztschr., 1923, Bd. 17, S. 293—320.
55. Entgegnung auf die Bemerkungen von Herrn Lanczos über die de Sittersche Welt.— Phys. Ztschr., 1923, Bd. 24, S. 130—131.
56. Zur allgemeinen Relativitätstheorie.— Phys. Ztschr., 1923, Bd. 24, S. 230—232.
57. Repartición de corriente en una red conductora. (Introducción al análisis combinatorio).— Rev. mat. hisp.-amer., 1923, vol. 5, p. 153—164; Englische Übersetzung: George Washington University Logistics Research Project, 1951.
58. Análisis situs combinatorio (continuación).— Rev. mat. hist., 1923, vol. 5, p. 43.

1924

59. Análisis situs combinatorio (continuación).— Rev. mat. hisp.-amer., 1924, vol. 6, p. 1—9, 33—41.
60. Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik.— Math. Ztschr., 1924, Bd. 20, S. 131—150.
61. Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen. (Aus einem Schreiben an Herrn I. Schur).— S.-Ber., Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1924, S. 338—345.

62. Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1924, S. 218—224.
63. Über die Symmetrie der Tensoren und die Tragweite der symbolischen Methode.— Rend. Circ. mat. Palermo, 1924, vol. 48, p. 29—36.
64. Observations on the Note of Dr. L. Silberstein. Determination of the curvature invariant of space-time.— London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag. and J. Sci., 1924, vol. 48, p. 348—349.
65. Massenträgheit und Kosmos: Ein Dialog.— Naturwissenschaften, 1924, Bd. 12, S. 197—204.
66. Was ist Materie? — Naturwissenschaften, 1924, Bd. 12, S. 561—568, 585—593, 604—611.

1925

67. Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik.— Symposion, 1925, Bd. 1, S. 1—32.
68. Theorie der Darstellung kontunuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I.— Math. Ztschr., 1925, Bd. 23, S. 271—309; II.— Math. Ztschr., 1926, Bd. 24, S. 328—376; III.— Math. Ztschr., 1926, Bd. 24, S. 377—395; Nachtrag.— Math. Ztschr., 1926, Bd. 24, S. 789—791.

1926

69. Zur Darstellungstheorie und Invariantenabzählung der projektiven, der Komplex- und der Drehungsgruppe.— Acta math., 1926, vol. 48, p. 255—278.
70. Elementare Sätze über die Komplex- und die Drehungsgruppe.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1926, S. 235—243.
71. Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der fastperiodischen Funktionen.— S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1926, S. 211—214.

1927

72. Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen.— Math. Ann., 1927, Bd. 97, S. 338—356.
73. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.— Math. Ann., 1927, Bd. 97, S. 737—755 (Peter F., Weyl H.).
74. Sur la représentation des groupes continus.— Enseign. math., 1927, vol. 26 p. 226—239.
75. Quantenmechanik und Gruppentheorie.— Ztschr. Phys., 1927, Bd. 46, S. 1—46.
76. Strahlbildung nach der Kontinuitätsmethode behandelt.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1927, S. 227—237.

1928

77. Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten} Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik.— Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg., 1928, Bd. 6, S. 86—88.

1929

78. Consistency in mathematics.— Rice Inst. Pamphlet, 1929, vol. 16, p. 245—265.
79. Der Zusammenhang zwischen der symmetrischen und der linearen Gruppe.— Ann. Math., 1929, vol. 30, p. 499—516.
80. Kontinuierliche Gruppen und ihre Darstellungen durch lineare Transformationen.— Atti Congr. Int. mat. Bologna, 1929, vol. 1, p. 233—246.
81. On a problem in the theory of groups arising in the foundations of infinitesimal geometry.— Bull. Amer. Math. Soc., 1929, vol. 35, p. 686—690.
82. On the foundations of infinitesimal geometry.— Bull. Amer. Math. Soc., 1929, vol. 35, p. 716—725.
83. Gravitation and the electron.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1929, vol. 15, p. 323—334.
84. Gravitation and the electron.— Rice Inst. Pamphlet, 1929, vol. 16, p. 280—295.
85. Elektron und Gravitation.— Ztschr. Phys. 1929, Bd. 56, S. 330—352.
86. The spherical symmetry of atoms.— Rice Inst. Pamphlet, 1929, vol. 16, p. 266—279.
87. The problem of symmetry in quantum mechanics.— J. Franklin Inst., 1929, vol. 207, p. 509—518.

1930

88. Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart.— Naturwissenschaften, 1930, Bd. 18, S. 4—11.
89. Redschift and relativistic cosmology.— London, Edinburgh and Dublin Phi-

los. Mag. and J. Sci., 1930, vol. 9, p. 936—943.
90. Zur quantentheoretischen Berechnung molekularer Bindungsenergien.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1930, S. 285—294.

1931

91. Zur quantentheoretischen Berechung molekularer Bindungsenergien.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1931, S. 33—39.
92. Über das Hurwitzsche Problem der Bestimmung der Anzahl Riemannscher Flächen von gegebener Verzweigungsart.— Comment. math. helv., 1931, Bd. 3, S. 103—113.
93. Geometrie und Physik.— Naturwissenschaften, 1931, Bd. 19, S. 49—58.

1932

94. Zu David Hilberts siebzigstem Geburtstag.— Naturwissenschaften, 1932, Bd. 20, S. 57—58.
95. Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses.— Unterrichtsbl. Math. und Naturwiss., 1932, Bd. 38, S. 177—188.
96. Über Algebren, die mit der Komplexgruppe in Zusammenhang stehen, und ihre Dastellungen.— Math. Ztschr., 1932, Bd. 35, S. 300—320.
97. Eine für die Valenztheorie geeignete Basis der binären Vektorinvarianten.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1932, S. 499—504 (Rumer G., Teller E., Weyl H.).

1934

98. Harmonics on homogenous manifolds.— Ann. Math., 1934, vol. 35, p. 486—499.
99. On generalized Riemann matrices.— Ann. Math., 1934, vol. 35, p. 714—729.
100. Observations on Hilbert's independence theorem and Born's quantization of field equations.— Phys. Rev., 1934, vol. 46, p. 505—508.
101. Universum und Atom.— Naturwissenschaften, 1934, Bd. 22, S. 145—149.

1935

102. Emmy Noether.— Scr. math., 1935, vol. 3, p. 201—220.
103. Über das Pick-Nevanlinnasche Interpolationsproblem und sein infinitesimales Analogon.— Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 230—254.
104. Geodesic fields in the calculus of variation for multiple integrals.— Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 607—629.
105. Spinors in n dimensions.— Amer. J. Math., 1935, vol. 57, p. 425—449 (Brauer R., Weyl H.).
106. Elementare Theorie der konvexen Polyeder.— Comment. math. helv., 1935, Bd. 7, S. 290—306; Englische Übersetzung in: Contributions to the theory of games. I.— Ann. Math. Stud., 1950, vol. 24, p. 3—18.

1936

107. Generalized Riemann Matrices and factor sets.— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 709—745.

1937

108. Riemannsche Matrizen und Faktorensysteme.— C. r. congr. Intern. math. Oslo, 1937, vol. 2, p. 3.
109. Note on matric algebras.— Ann. Math., 1937, vol. 38, p. 477—483.
110. Commutator algebra of a finite group of collineations.— Duke Math. J., 1937, vol. 3, p. 200—212.

1938

111. Symmetry.— J. Wash. Acad. Sci., 1938, vol. 28, p. 253—271.
112. Meromorphic curves.— Ann. Math., 1938, vol. 39, p. 516—538 (Weyl H., Weyl J.).
113. Mean motion.— Amer. J. Math., 1938, vol. 60, p. 889—896.

1939

114. Mean motion. II.— Amer. J. Math., 1939, vol. 61, p. 143—148.
115. On unitary metrics in projective space.— Ann. Math., 1939, vol. 40, p. 141—148; Addition to my note: On unitary metrics in projective space.— Ann. Math., 1939, vol. 40, p. 634—635.
116. On the volume of tubes.— Amer. J. Math., 1939, vol. 61, p. 461—472.
117. Invariants.— Duke Math. J., 1939, vol. 5, p. 489—502.

1940

118. The ghost of modality.— In: Philosophical essays in memory of Edmund Husserl. Cambridge (Mass.), 1940, p. 278—303.

119. The mathematical way of thinking.— Science, 1940, vol. 92, p. 437—446; Pennsylvania University Bicentennial Conference.: Studies in the history of science. Philadelphia, 1941, p. 103—123.
120. Theory of reduction for arithmetical equivalence.— Trans. Amer. Math. Soc., 1940, vol. 48, p. 126—164.
121. The method of orthogonal projection in potential theory.— Duke Math. J., 1940, vol. 7, p. 411—444.

1941

122. On the use of indeterminates in the theory of the orthogonal and symplectic groups.— Amer. J. Math., 1941, vol. 63, p. 777—784.
123. Concerning the differential equations of some boundary layer problems.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1941, vol. 27, p. 578—583.

1942

124. Concerning the differential equations of some boundary layer problems. II.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1942, vol. 28, p. 100—102.
125. On the differential equations of the simplest boundary-layer problems.— Ann. Math., 1942, vol. 43, p. 381—407.
126. Theory of reduction for arithmetical equivalence. II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1942, vol. 51, p. 203—231.
127. On geometry of numbers.— Proc. London Math. Soc., 1942, vol. 47, p. 268—269.
128. Elementary note on prime number problems of Vinogradoff's type.— Amer. J. Math., 1942, vol. 64, p. 539—552 (James R. D., Weyl H.)
129. On the theory of analytic curves.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1942, vol. 28, p. 417—421 (Weil H., Weyl J.)

1943

130. On Hodge's theory of harmonic integrals.— Ann. Math., 1943, vol. 44, p. 1—6.

1944

131. Obituary: David Hilbert, 1862—1943.— Obituary Notices Fellows Roy. Soc., 1944, vol. 4, p. 547—553; Amer. Philos. Soc. Year Book, 1944, p. 387—395.
132. David Hilbert and his mathematical work.— Bull. Amer. Math. Soc., 1944, vol. 50, p. 612—654; Portugiesische Übersetzung.— Bol. Soc. mat. São Paulo, 1946, vol. 1, p. 76—104; 1947, vol. 2, p. 37—60.
133. Concerning a classical problem in the theory of singular points of ordinary differential equations.— Actas Acad. Nat. Ciencias Exactas. Fis. y natur. Lima, 1944, vol. 7, p. 21—60.
134. Comparison of a degenerate form of Einstein's with Birkhoff's theory of gravitation.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1944, vol. 30, p. 205—210.
135. How far can one get with a linear field theory of gravitation in flat space-time? — Amer. J. Math., 1944, vol. 66, p. 591—604.

1945

136. Fundamental domains for lattice groups in division algebras. I.— In: Festschrift zum 60. Geburstag von Prof. Dr. A. Speiser. Zürich: Orell Füssli, 1945, S. 218—232; II.— Comment. math. helv., 1944/1945, Bd. 17, S. 283—306.

1946

137. Encomium (Wolfgang Pauli).— Science, 1946, vol. 103, p. 216—218.
138. Mathematics and logic: A brief survey serving as a preface to a review of «The philosophy of Bertrand Russell».— Amer. Math. Month., 1946, vol. 53, p. 2—13.
139. Comment on a paper by Levinson.— Amer. J. Math., 1946, vol. 68, p. 7—12.

1948

140. A remark on the coupling of gravitation and electron.— Actas Acad. Nat. Ciencias Exactas. Fis. y natur. Lima, 1948, vol. 11, p. 1—17[3].
141. A remark on the coupling of gravitation and electron.— Phys. Rev., 1950, vol. 77, p. 699—701[4].

1949

142. Wissenschaft als symbolische Konstruktion des Menschen.— Eranos-Jahrb., 1948/1949, S. 375—431.

[3] В публикации имеется ряд опечаток.
[4] Сокращенный вариант статьи № 140.

143. Elementary algebraic treatment of the quantum mechanical symmetry problem.— Canad. J. Math., 1949, vol. 1, p. 57—68.
144. Supplementary note (anschliessend an: S. Minakshisundaram: A generalization of Epstein zeta functions).— Canad. J. Math., 1949, vol. 1, p. 326—327.
145. Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space.— Amer. J. Math., 1949, vol. 71, p. 178—205.
146. Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1949, vol. 35, p. 408—411.
147. Relativity theory as a stimulus in mathematical research.— Proc. Amer. Philos. Soc. 1949, vol. 93, p. 535—541.
148. Shock waves in arbitrary fluids.— Communs Pure and Appl. Math., 1949, vol. 2, p. 103—122.

1950

149. 50 Jahre Relativitätstheorie.— Naturwissenschaften, 1950, Bd. 38, S. 73—83.
150. Ramifications, old and new, of the eigenvalue problem.— Bull. Amer. Math. Soc., 1950, vol. 56, p. 115—139.
151. Elementary proof of a minimax theorem due to von Neumann: Contributions to the theory of games. I.— Ann. Math. Stud., 1950, vol. 24, p. 19—25.

1951

152. A half-century of mathematics.— Amer. Math. Month., 1951, vol. 58, p. 523—553.
153. Radiation capacity.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1951, vol. 37, p. 832—836.

1952

154. Kapazität von Strahlungsfeldern.— Math. Ztschr., 1952, Bd. 55, S. 187—198.
155. Die natürlichen Randwertaufgaben im Aussenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges.— Math. Ztschr., 1952, Bd. 56, S. 105—119.

1953

156. Über den Symbolismus der Mathematik und mathematischen Physik.— Stud. gen., 1953, vol. 6, p. 219—228.
157. Universities and science in Germany.— Math. Stud., 1953, vol. 21, p. 1—26.
158. A simple example for the legitimate passage from complex numbers to numbers on an arbitrary field.— In: Scientific papers presented to Max Born. N. Y.: Hafner Publ. Co, 1953, p. 75—79.
159. Über die kombinatorische und kontinuumsmässige Definition der Überschneidungszahl zweier geschlossener Kurven auf einer Fläche.— Ztschr. angew. Math. und Phys., 1953, Bd. 4, S. 471—492.

Рецензии разных лет

160. Bauer on theory of groups.— Bull. Amer. Math. Soc., 1934, vol. 40, p. 515—516.
161. Cartan on groups and differential geometry.— Bull. Amer. Math. Soc., 1938, vol. 44, p. 598—601.
162. Courant and Hilbert on partial differential equations.— Bull. Amer. Math. Soc., 1938, vol. 44, p. 602—604.
163. Review: The philosophy of Bertrand Russell.— Amer. Math. Month., 1946, vol. 53, p. 208—214.

1954

164. Address of the President of the Fields Medal Committee, 1954.— Proc. Intern. Congr. Math., 1954.
165. Address on the unity of knowledge delivered at the Bicentennial Conference of Columbia University.— In: Columbia University in the City of New York Bicentennial Celebration. N. Y., 1954.
166. Erkenntnis und Besinnung (Ein Lebensrückblick).— Stud. Philos.: Jb. Schweiz. Philos. Ges. Annu. Soc. Suisse Philos, 1954.

1955

167. Rückblick auf Zürich aus dem Jahr 1930.— Schweiz. Hochschulzeitung, 1955, Bd. 28, S. 180—184.

III. ПЕРЕВОДЫ НА РУССКИЙ ЯЗЫК

1. О философии математики. М.; Л.: ОНТИ, 1934 (отрывки из [I, 7]) [5].
2. О полноте примитивных представлений компактной непрерывной группы.— Усп. мат. наук, 1936, т. 2, с. 144—160 [II, 73]. В соавт. с Петером Ф.

[5] Ссылки типа [I, 7] следует читать: см. наст. библиографию, раздел I, работу 7.

3. Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований.— Усп. мат. наук, 1938, т. 4, с. 201—246 [II, 68].
4. Классические группы, их инварианты и представления. М.: Изд-во иностр. лит., 1947 [I, 13].
5. Алгебраическая теория чисел. М.: Изд-во иностр. лит., 1947 [I, 12].
6. Об определении замкнутой выпуклой поверхности ее линейным элементом.— Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 2 (24), с. 159—190 [II, 25].
7. Комментарии к речи Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии».— В кн.: *Риман Б.* Сочинения. М., 1948, с. 510—526; и в кн.: Об основаниях геометрии. М., 1956 [I, 4].
8. Искусство комбинаторики.— В кн.: Прикладная комбинаторная математика. М.: Мир, 1968 [I, 7, приложение B].
9. Квантовая физика и причинность.— В кн.: Прикладная комбинаторная математика. М.: Мир, 1968 [I, 7, приложение C].
10. Химическая валентность и иерархия структур.— В кн.: Прикладная комбинаторная математика. М.: Мир, 1968 [I, 7, приложение D].
11. Физика и биология.— В кн.: Прикладная комбинаторная математика. М.: Мир, 1968 [I, 7, приложение E].
12. Симметрия. М.: Наука, 1968 [I, 15].
13. Полвека математики. М.: Знание, 1969 [II, 152].
14. Среднее движение.— Усп. мат. наук, т. 31, 1976, вып.4 (190), с. 213—219 [II, 113].
15. Структура математики.— Усп. мат. наук, 1976, т. 31, № 4, с. 220—238 [I, 7, приложение A].
16. Давид Гильберт и его математические труды.— В кн.: Рид К. Гильберт. М.: Наука, 1977, с. 308—360 [II, 131].
17. Гравитация и электричество.— В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 513—527 [II, 31].
18. Познание и осмысление.— В кн.: Проблема объекта в современной науке. М., 1980, с. 144—167 [II, 166].
19. Относительность.— В кн.: Эйнштейновский сборник. 1978—1979. М.: Наука, 1983, с. 92—108 (гл. из книги [I, 11]).
20. Математическое мышление М: Наука, 1984 [I, 3; II, 65, 93, 95, 147, 157, 166 и др.].

IV. ЛИТЕРАТУРА О ГЕРМАНЕ ВЕЙЛЕ

1. *Bierman K.-R.* Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810—1920. B.: Akad.-Verl., 1973 (Содержит отзыв Э. Шмидта в 1917 г. о работах Вейля, с. 226—229).
2. *Beisswanger P.* Die Phasen in Herman Weyls Beurteilung der Mathematik.— Math.-phys. Semesterberichte, 1965, Bd. 12, N 2, S. 132—156.
3. *Борн М.* Письмо А. Эйнштейну от 22 февраля 1931 г.— в кн.: Эйнштейновский сборник, 1972. М.: Наука, 1974, с.18.
4. *Chevalley C., Weil A.* Hermann Weyl.— Enseign math. 1957, vol. 3, N 3, p. 157—187; наст. изд., с. 413—433.
5. *Pauli W.* Wissenschaftliche Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u. a. B.: Spring-Verl., 1979, Bd. 1, S. 1919—1929. (Содержит переписку Паули и Вейля).
6. *Polya G.* Eine Erinnerung an Hermann Weyl.— Math. Ztschr., 1972, Bd. 126, p. 296—298.
7. *Newman M. H. A.* Hermann Weyl, 1885—1955.— Biogr. Mem. Fellows Roy. Soc., 1957, vol. 3, p. 305—328.
8. *Newman M. H. A.* Hermann Weyl.— J. London Math. Soc., 1958, vol. 33, p. 500—511; Рус. пер.: Усп. мат. наук, 1976, т. 31, № 4, с. 239—250.
9. *Reid C.* Hilbert. B.: Spring.-Verl., 1970; Рус. пер.: *Рид. К.* Гильберт. М.: Наука, 1977.
10. *Seeling C.* Albert Einstein. Zürich: Europa-Verl., 1960. (Рус. пер.: *Зелиг К.* Альберт Эйнштейн. М., 1964; о Вейле см. с. 134—139 и др.; в книге имеются неточности и ошибки.)
11. *Яглом И. М.* Герман Вейль и идея симметрии [III, 12, с. 5—32].
12. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. (На с. 528—535 дается краткий обзор ряда работ Г. Вейля по анализу и их дальнейшего развития.)
13. *Кас М.* Can one hear the shape of a drum.— Amer. Math. Month., 1966, vol. 73, pt. II, p. 1—23. (Предыстория появления формулы Вейля для спектра оператора Лапласа, с. 3, 4).
14. *Яглом И. М.* Герман Вейль. М.: Знание, 1967.
15. *König R.* Hermann Weyl [некролог].— Jahrb. Bayer. Akad. Wiss., 1956, S. 236—248.

КОММЕНТАРИИ И ПРИМЕЧАНИЯ

Следующие комментарии содержат сведения, необходимые для понимания работ Вейля, а также кратко обрисовывают дальнейшее историческое развитие его идей вплоть до последнего времени. Ссылки типа [II, 116] относятся к разделам библиографии (см. наст. изд., с. 434—441).

Асимптотический закон распределения частот собственных колебаний упругих тел произвольной формы

Свои исследования асимптотического распределения частот собственных колебаний двумерной мембраны и других непрерывных тел Вейль начал, исходя из физических соображений. Одной из его целей было строгое доказательство асимптотического закона теплового излучения черного тела. Позднее он распространил свои методы на случай упругих колебаний трехмерных тел.

Знаменитый результат Вейля состоит в следующей асимптотической формуле. Пусть $\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$ — ограниченная область и пусть $\Delta = -(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$. Обозначим через $N(\lambda)$ для $\lambda > 0$ число собственных значений задачи Дирихле, которые меньше, чем λ. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{\mathrm{Vol}\,(\Omega)}{4\pi}.$$

Итак, спектр задачи Дирихле определяет площадь области Ω. Соответствующая формула имеется для ограниченной области $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$. Можно спросить, до какой степени спектр определяет геометрическую структуру области Ω. В своей гиббсовской лекции [II, 150] (наст. изд., с. 361—382) Вейль дал обзор результатов, полученных до 1950 г.

Естественно заменить область Ω произвольным римановым многообразием M и исследовать спектральные свойства оператора Лапласа Δ и его связи с геометрической и топологической структурой M. В прошедшие десятилетия наблюдался значительный прогресс в этом вопросе, в частности для случая компактного риманового многообразия. В своем докладе на конгрессе в Ванкувере И. М. Зингер дал обзор большого числа результатов, полученных до 1974 г. (*Singer I. M.*— Proc. Intern. Congr. Math. Vancouver, 1974, vol. 1, p. 187—200).

Мы обсудим некоторые направления исследований, связанных с работой Вейля о собственных колебаниях. Более детальные и обширные изложения см.: *Berger M.*, *Gauduchon P.*, *Mazet E.* Le Spectre d'une Variété Riemannienne.— Lect. Notes Math., 1971, N 194; Geometry of the Laplace operator.— Proc. Symp. Pure Math., 1980, vol. 36; и доклад Зингера. Хороший перечень литературы содержится в: *Bérard P. H.*, *Berger M.* Le spectre d'une variété riemannienne. P., 1981.

Пусть M — замкнутое риманово многообразие и пусть $\Delta_p = dd^* + d^*d$ — оператор Лапласа на p-формах. Этот оператор имеет чисто точечный спектр. Обозначим через $\mathscr{H}^p(M) = \ker \Delta_p$ пространство гармонических p-форм. Одним из наиболее важных следствий спектрального анализа лапласиана является теорема Ходжа—Де Рама, утверждающая, что естественное отображение $\mathscr{H}^p(M) \to H^p(M; \mathbf{C})$ является изоморфизмом. Эта теорема дает

основу для изучения компактных келеровых многообразий, а также для многих других задач геометрии.

Исследования Вейля асимптотического распределения собственных частот колеблющейся мембраны основаны на принципе минимакса. После работ Вейля была развита другая техника, которая оказалась очень полезной в задачах о собственных значениях. Вообще говоря, непосредственно изучать спектр нелегко. Вместо этого рассматриваются некоторые функции спектра. Наиболее полезные получаются из уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Пусть $e^{-t\Delta}$ — оператор, дающий решение уравнения теплопроводности $(\partial/\partial t + \Delta)\, u = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = u_0$. Соответственно $e^{-it\Delta^{1/2}}$ — волновой оператор. Если $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ — спектр оператора Δ, то ряд $\operatorname{Tr}(e^{-t\Delta}) = \Sigma e^{-t\lambda_j}$ сходится при $t > 0$. $\operatorname{Tr}(e^{-it\Delta^{1/2}})$ является распределением умеренного роста на R^1. Уравнение теплопроводности $(\partial/\partial t + \Delta_p)\, u = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = u_0$ имеет фундаментальное решение $K_p(x, y, t)$. $K_p(x, y, t)$ — гладкое ядро и $\operatorname{Tr}(e^{-t\Delta}) = \int\limits_M \operatorname{tr} K_p(x, x, t)$, где $\operatorname{tr} K_p(x, x, t)$ — матричный след. Минакшисандарам и Плейель (J. Different. Geom., 1967, vol. 1, p. 43—69) показали, что $\operatorname{tr} K_p(x, x, t)$ имеет при $t \to 0$ асимптотическое разложение вида

$$(4\pi t)^{-n/2} \left(\sum_j U_j(x)\, t^j\right), \qquad n = \dim M.$$

Коэффициенты $U_j(x)$ — метрические инварианты. Они допускают локальное представление в виде многочленов от метрического тензора и его ковариантных производных. Интегрирование по M дает

$$\operatorname{Tr}(e^{-t\Delta_p})_{t\to 0} \sim (4\pi t)^{-n/2} \left(\sum C_j t^j\right).$$

Одно из доказательств теоремы Атьи—Зингера об индексе основано на использовании уравнения теплопроводности. Атья, Ботт и Патоди доказали (Invent. math., 1973, vol. 19, p. 279—300) локальную теорему об индексе, из которой глобальная теорема об индексе получается интегрированием. Доказательство локальной теоремы основано на более глубоком анализе коэффициентов $U_{n/2}(x)$.

Первый коэффициент C_0 в разложении $\operatorname{Tr}(e^{-t\Delta_0})$ равен $\operatorname{Vol}(M)$. Формула Вейля получается из этого разложения, если использовать тауберову теорему. Намного труднее получить оценку остаточного члена в формуле Вейля. Когда $\partial M = \phi$, В. Г. Авакумович (Math. Ztschr., 1956, Bd. 65, S. 327—344) и Б. М. Левитан (Изв. АН СССР. Сер. мат., 1952, т. 16, с. 325—352) доказали оценку Вейля с наилучшим остаточным членом

$$N(\lambda) = c_n \frac{\operatorname{Vol}(M)}{(2\pi)^n} \lambda^{n/2} + o\left(\lambda^{(n-1)/2}\right),$$

где $N(\lambda)$ — число собственных значений оператора Δ_0, которые не меньше λ, и c_n — объем единичного шара в R^n. Этот результат был обобщен на более общие операторы высших порядков Хёрмандером (Acta math., 1968, vol. 121, p. 193—217). Методы, связанные с волновым уравнением, дают очень сильные результаты. Хёрмандер изучал распределение $\operatorname{Tr}(e^{-it\Delta^{1/2}})$ около $t = 0$, используя распространение особенностей и интегральное представление оператора $e^{-it\Delta^{1/2}}$ с помощью интегральных операторов Фурье. Более простой подход использовался Дюйстермаатом и Гийеминым (Invent. math., 1975, vol. 29, p. 39—79). Они показали, что при дополнительном условии, ограничивающем величину множества замкнутых

геодезических, имеет место та же оценка $o\,(\lambda^{(n-1)/2})$. За прошедшие несколько лет эти результаты были распространены на случай непустой границы Мельроузом (Proc. Symp. Pure Math., 1980, vol. 36, p. 257—274), Сили (Adv. Math., 1978, vol. 29, p. 244—269) и В. Я. Ивриием (Функцион. анализ и его приложения, 1980, т. 14, № 2, с. 25—34). Пусть M — компактное риманово многообразие с границей ∂M. Рассмотрим оператор Лапласа с граничными условиями:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}+\varphi\right)u\Big|_{\partial M}=0, \qquad \varphi\in C^\infty(\partial M), \qquad (+)$$

$$u\,|_{\partial M}=0. \qquad (-)$$

Пусть $N_\pm(\lambda)$ — число собственных значений $\leqslant\lambda$ соответствующей граничной задачи. При некоторых условиях на множество периодических геодезических имеем

$$N_\pm(\lambda)=c_n\frac{\operatorname{Vol}(M)}{(2\pi)^n}\lambda^{n/2}\pm\frac{1}{4}\,c_{n-1}\frac{\operatorname{Vol}(\partial M)}{(2\pi)^{n-1}}\lambda^{(n-1)/2}+o\,(\lambda^{(n-1)/2}).$$

Волновое уравнение имеет много других интересных приложений, связывающих спектр оператора Δ и геометрическую структуру многообразия M. В частности, техника, развитая Л. Хёрмандером, Ю. В. Егоровым и В. П. Масловым, была использована Дюйстермаатом и Гийемином для доказательства того, что собственные значения определяют длины замкнутых геодезических для общей римановой метрики. Сингулярный носитель распределения $\operatorname{Tr}(e^{-it\Delta^{1/2}})$ содержится в спектре длин геодезических. Если метрика общая (нужно, чтобы $\det(I-P_\gamma)\neq 0$, P_γ — отображение Пуанкаре для всех замкнутых геодезических γ), то спектр длин совпадает с сингулярным носителем и

$$\operatorname{Tr}(e^{-it\Delta^{1/2}})=\sum_{\tilde\gamma}2\pi l_{\tilde\gamma}\sum_{k>0}\frac{1}{|\det(I-P_{k\tilde\gamma})|^{1/2}}\,\frac{e^{(\pi/2)\sigma_{k\tilde\gamma}}}{t-l_{k\tilde\gamma}}+f(t),$$

где $\tilde\gamma$ — примитивные замкнутые геодезические, $\sigma_{\tilde\gamma}$ — индекс Морса и $l_{\tilde\gamma}$ — длина геодезической $\tilde\gamma$. $f(t)$ — локально интегрируемая функция, и около $l_{\tilde\gamma}$ имеем $|f(t)|\leqslant\log|t-l_{\tilde\gamma}|$.

Особый интерес представляют многообразия с условиями симметрии, например однородные и локально симметрические пространства. По поводу имеющихся здесь важных связей с теорией чисел и теорией представлений см: *Гельфанд И. М.*, *Граев М. И.*, *Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966; *Hejhal D. A.*— Duke Math. J., 1976, vol. 43, p. 441—482.

До сих пор мы рассматривали только компактный случай. В последние годы наблюдается существенный прогресс в изучении спектральных свойств оператора Лапласа на некомпактных римановых многообразиях. Одно из направлений в этой области исследует полные римановы многообразия при весьма общих предположениях. В частности, рассматривались многообразия с ограниченной геометрией (полные многообразия, у которых радиус инъективности ограничен снизу, а кривизна и некоторые (или все) ее ковариантные производные равномерно ограничены). Другое направление занимается более специальными классами многообразий, из которых наибольший интерес представляют два класса. Один состоит из римановых многообразий с особенностями. К ним относятся, в частности, комплексные проективные многообразия $X\subset \boldsymbol{P}_C^N$ с индуцированной келеровой метрикой на неособой части. Анализ на таких пространствах представляет собой анализ на дополнение к особому множеству. Простейший пример дают многообразия с коническими особенностями, спектраль-

ный анализ на которых был развит Чиигером (Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1979, vol. 76, N 5, p. 2103—2106). В этой ситуации возникают интересные новые явления, не имеющие аналога в неособом случае. Например, обобщение формулы Хирцебруха для сигнатуры содержит вклады от каждой конической особенности. Если окрестность особенности имеет вид $N \times (0, u)$, $ds^2 = dr^2 + r^2 g$, где g — метрика на N, то вклад дается η-инвариантом $\eta_N(0)$ многообразия N, введенным в работе: *Atiyah M. F.*, *Patodi V. K.*, *Singer I. M.*— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1975, vol. 77, p. 43—69. Это нелокальный спектральный инвариант многообразия [1]. Для многообразий с коническими особенностями имеется также вариант изоморфизма Ходжа—Де Рама. При этом гармонические формы заменяются на L^2-гармонические формы $\mathscr{H}^*_{(2)}(X)$, $X = M$ — {особенности}, а обычные когомологии — на когомологии Горески — Мак-Ферсона $IH_*(M)$ (см.: *Чиигер Дж.*, *Горески М.*, *Мак-Ферсон Р.* L^2-когомологии и ГМ-когомологии особых алгебраических многообразий.— В кн.: *Фултон У.*, *Мак-Ферсон Р.* Категорный подход к изучению пространств с особенностями. М.: Мир, 1983, с. 162—197). Имеется естественный изоморфизм $\mathscr{H}^*_{(2)}(X) \xrightarrow{\sim} (IH_*(M))^*$. Интерес к нему объясняется тем, что аналогичный изоморфизм предполагается для любого комплексного проективного многообразия. Подобный факт был бы важным шагом в доказательстве существования чистой структуры Ходжа на $IH_*(M)$.

Недостатком этого подхода является неполнота метрики на X. Другое направление исследований состоит в построении полной метрики на неособой части. Простейшими примерами многообразий такого типа являются многообразия с остриями (cusps), которые обобщают локально симметрические пространства вещественного ранга один (и имеющие конечный объем). Спектральный анализ на них изучался В. Мюллером (Math. Nachr., 1983; Spectral geometry and non-compact Riemannian manifolds.— Proc. Intern. Congr. Math. W-wa, 1983). M — многообразие с остриями, если оно вне компактного множества является непересекающимся объединением конечного числа многообразий вида $N \times [a, \infty)$, $a > 0$, $ds^2 = dy^2/y^2 + (1/y^2)\, g$, g — метрика на N. Оператор Лапласа Δ_p на p-формах может иметь теперь непрерывный спектр. Это зависит от топологии особых точек. Для общей римановой метрики Δ_0 имеет лишь конечное число собственных значений и вместо формулы Вейля можно получить лишь, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{n/2}} \leqslant c_n \frac{\mathrm{Vol}(M)}{(2\pi)^n}, \qquad n = \dim M.$$

Тем не менее если использовать дополнительно функцию спектрального сдвига, то многие геометрические свойства многообразия M и, в частности, объем определяются его спектром. Острия также вносят свой вклад в аналог формулы Хирцебруха для сигнатуры, который выражается через η-инвариант $\eta_N(0)$. Если $\mathscr{H}^*_{(2)}(M)$ — пространство L^2-гармонических форм и $\bar{M}$ — компактификация, получаемая добавлением к каждому острию по одной точке в бесконечности, то имеется естественный изоморфизм $\mathscr{H}^*_{(2)}(M) \simeq (IH_*(\bar{M}))^*$. Здесь $IH_*(\bar{M})$ — когомологии Горески —Мак-Ферсона.

Очень важный класс некомпактных римановых многообразий составляют локально симметрические пространства конечного объема и, в частности, арифметические факторы симметрических областей. Спектральный анализ на таких пространствах тесно связан с теорией автоморфных форм и теорией представлений. Одним из основных средств здесь служит формула следа Сельберга (J. Indian Math. Soc., 1956, vol. 20, p. 47—87). Можно ожидать,

[1] Формула Вейля для асимптотики собственных значений имеет тот же вид, что и в неособом случае. Совсем недавно В. Петков (C. r. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 1983) добился успеха в оценке остаточного члена.

что более глубокое понимание природы спектра будет иметь важные следствия для арифметики (*Венков А. Б.* Спектральная теория автоморфных функций, дзета-функция Сельберга и некоторые проблемы аналитической теории чисел и математической физики.— УМН, 1979, т. 34. № 3, с. 69—135; *Hejhal D. A.* Loc. cit.). Новая особенность, возникающая при изучении спектра арифметических факторов симметрических областей, состоит в том, что спектр оператора Лапласа зависит от теоретико-числовых свойств дискретной группы.

В. Мюллер

Формула Вейля для асимптотики собственных чисел оператора Лапласа в области явилась одним из источников квантовой механики (см.: *Паули В.* Труды по квантовой теории. М.: Наука, 1975, с. 101; *Fefferman Ch.*— Bull. Amer. Math. Soc., 1983, vol. 9, p. 129—206). С другой стороны, эта же формула заложила основу своеобразной области математического анализа — так называемой спектральной геометрии, в которой речь идет о тех геометрических характеристиках области или риманова многообразия, которые можно восстановить по спектру оператора Лапласа (см. выше). По образному выражению М. Каца, вопрос формулируется так: «Можно ли услышать форму барабана?» [IV, 13]. Формула Вейля показывает, что можно «услышать» объем. С другой стороны, Милнор построил два неизометричных 16-мерных плоских тора, для которых собственные числа операторов Лапласа (как на функциях, так и на дифференциальных формах) совпадают (Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1964, vol. 51, p. 542). Следовательно, риманова метрика не всегда восстанавливается по спектру. Для замкнутых поверхностей постоянной отрицательной кривизны спектр лапласиана и длины геодезических определяют друг друга (*Huber H.* Math. Ann., 1959, Bd. 138, S. 1—26). В связи с этим И. М. Гельфанд поставил вопрос, определяет ли спектр однозначно модули римановой поверхности (Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1962, p. 74—85), и показал, что любая деформация поверхности, не меняющая спектра, является тривиальной. Мак-Кин доказал, что класс сопряженности соответствующей фуксовой группы в $SL(2, \mathbf{R})$ определяется спектром оператора Лапласа—Бельтрами с точностью до конечного числа возможностей (Communs Pure and Appl. Math., 1972, vol. 25, p. 225—246), но М. Ф. Виньера нашла затем пример двух несопряженных групп с одинаковым спектром (C. r. Acad. Sci. Paris (A), 1978, vol. 287, p. 47—50). Быть может, более тонкие спектральные характеристики поверхности позволят восстановить риманову поверхность (см. обсуждение у А. Б. Венкова (цит. соч., § 6, 11)).

Распределение собственных чисел мембраны компактной области в евклидовом пространстве может быть весьма нерегулярным, однако сглаженные (усредненные) характеристики асимптотического поведения собственных чисел с большими номерами ведут себя достаточно регулярно. Сглаженная асимптотика связана с интересными геометрическими характеристиками границы области. Наиболее обычный способ сглаживания заключается в том, чтобы рассмотреть след оператора теплопроводности (см. выше). Мы будем обозначать этот след через Z_- при граничных условиях Дирихле и Z_+ при граничных условиях Неймана. Разложение Минакшисундарама и Плейеля дает асимптотическое равенство (указанное Сили и в более общей ситуации) для области $\subseteq \mathbf{R}^{d+1}$

$$Z_{\mp}(t) = (4\pi t)^{-d/2} \Sigma c_k^{\mp} t^{k/2}, \qquad k \geqslant -1.$$

Согласно формуле Вейля первый коэффициент c_{-1} равен объему области. Следующие два коэффициента вычислены Мак-Кином и Зингером (*McKean H. P.*, *Singer I. M.*— J. Different. Geom., 1967, vol. 1, p. 43—69, перевод в сб.: Математика, 1969, № 13 : 6, с. 138—161),

использовавших для этого теорию инвариантов ортогональной группы в форме, изложенной Вейлем в [I, 13]:

$c_0^{\mp} = \mp{}^1/_4\sqrt{4\pi}\cdot$площадь границы области,

$c_1^{\mp} = -{}^1/_6\cdot$интеграл от средней кривизны границы.

Объем, площадь и интеграл от средней кривизны — три коэффициента многочлена от ε, выражающего объем ε-окрестности области в евклидовом пространстве. Эти и другие результаты подсказывают гипотезу, что и следующие коэффициенты вплоть до c_d выражаются, подобно коэффициентам в формуле для объема ε-окрестности области в евклидовом пространстве, через интегралы от симметрических функций главных кривизн по границе. (Эта гипотеза В. И. Арнольда (1965) неточно цитирована в статье Мак-Кина и Зингера.)

Указанная гипотеза, по-видимому, до сих пор не доказана и не опровергнута. С. А. Молчанов (Успехи мат. наук, 1975, т. 30, № 1, с. 3—59) вычислил еще один коэффициент для области в трехмерном пространстве, например, при граничном условии Дирихле

$$c_2^- = \int k_1k_2dS/(96\pi) - \int (k_1 + k_2)^2\, dS/(2^8\pi),$$

где k_i — главные кривизны границы. Первое слагаемое по формуле Гаусса-Бонне пропорционально эйлеровой характеристике, второе же не имеет топологической природы и показывает, что коэффициенты Минакшисундарама—Плейеля во всяком случае отличаются от коэффициентов в формуле для объема ε-окрестности (не только не зависящими от области множителями).

Для области на плоскости коэффициенты вычислены вплоть до c_5 (*Stewartson K.*, *Weachter R. T.*— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1971, vol. 69, p. 353—363).

На компактном римановом d-мерном многообразии без края разложение Минакшисундарама—Плейеля имеет вид

$$Z \sim (4\pi t)^{-d/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \qquad (t \to +0),$$

где коэффициенты c_k выражаются как интегралы по многообразию от некоторых функций метрики и ее производных. Аналогичные разложения имеются и для операторов, действующих в сечениях векторного расслоения, например, на дифференциальных формах. Доннели (Invent. math., 1975, vol. 29, N 3, p. 239—243) обнаружил связь этих разложений с формулой Вейля для объема труб. Именно, коэффициент при ε^{m+2k} в представлении объема ε-окрестности подмногообразия коразмерности m в евклидовом пространстве в виде многочлена от ε оказался линейной комбинацией коэффициентов c_k, соответствующих спектрам операторов Лапласа на дифференциальных формах всех степеней. Более того, уже функция от кривизны, являющаяся подынтегральным выражением коэффициента формулы Вейля для объема трубы, линейно выражается через подынтегральные выражения для c_k.

В. С. Буслаев (Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 5, с. 999—1002) указал, что коэффициенты Минакшисундарама—Плейеля границы выпуклой области в евклидовом пространстве появляются при исследовании асимптотики рассеяния. А именно, для фазы рассеяния он получил разложение, которое для граничного условия Дирихле имеет вид

$$\ln\det S\,(k) \sim \Sigma b_j\bar{c}_j k^{d-j}, \quad j \geqslant -1,$$

где S — «матрица рассеяния», а числовые коэффициенты b_j не зависят от области (см. также: *Jensen A.*, *Kato T.*— Communs Part. Different. Equant., 1978, vol. 3, p. 1165—1195; *Majda A.*, *Ralston J.*— Duke Math. J., 1978, vol. 45, p. 183—196, 513—536; 1979, vol. 47, p. 725—731).

Первый член пропорционален объему области и может рассматриваться как аналог формулы Вейля для внешности области.

Эти результаты обобщались на случай рассеяния невыпуклым препятствием, удовлетворяющим условию «неловушечности», т. е. отражающим все падающие на него лучи (*Petkov V., Popov G.*— Ann. Inst. Fourier, 1982, vol. 32, p. 111—149), на матричные эллиптические операторы (*Иврий В. Я., Шубин М. А.*— Докл. АН СССР, 1982, т. 263, № 2, с. 283—284) и на случай, когда вместо препятствия имеется финитное возмущение метрики (*Majda A., Ralston J.*— Duke Math. J., 1978, vol. 45, p. 513—536).

Другое обобщение формул Вейля и Минакшисундарама—Плейеля на случай внешности области обнаружено Р. Мельрозом (*Mellrose R.*— Communs Pure and Appl. Math., 1980, vol. 33, p. 461—499). Мельроз рассматривает амплитуду рассеяния плоской волны вперед. Для коротких волн первая поправка к амплитуде падающей волны пропорциональна площади тени от выпуклого препятствия на перпендикулярной лучу гиперплоскости (*Majda A., Taylor M. E.*— Communs. Pure and Appl. Math., 1977, vol. 30, p. 639—669). Соответствующая поправка в величине следа (т. е. в интеграле амплитуды по всем направлениям падающего луча) пропорциональна объему препятствия, так как площадь тени, усредненная по всем направлениям проектирования, пропорциональна объему выпуклого тела (см. комментарий к статье Вейля «Об объеме труб»).

Следующие члены разложения амплитуд вперед (это асимптотическое разложение по дробным степеням длины волны со знаменателем 3, быть может, с логарифмами) выражаются через кривизну границы. Первый из этих коэффициентов получается при интегрировании вдоль терминатора (границы тени на поверхности препятствия) кубического корня из кривизны поверхности препятствия в направлении падающего луча.

Возвращаясь к исследованиям Вейля, отметим, что в [II, 19] он поставил вопрос о следующем члене в асимптотическом поведении числа $N(\lambda)$ собственных значений $\leqslant\lambda$ (проблема Вейля; предыстория работ Вейля в этой области анализа изложена в [II, 16, p. 442] и [IV, 13]). Наиболее общим результатом в решении проблемы Вейля является недавняя теорема Д. Г. Васильева (Функцион. анализ и приложения, 1983, т. 17, с. 79—81). Он рассмотрел эллиптические дифференциальные операторы A порядка $2m$ на компактном многообразии X с краем Γ и задачи на собственные значения с краевыми условиями весьма общего вида. С оператором A связана гамильтонова система на X (геодезический поток, если A — оператор Лапласа), на траектории которой накладываются два условия: условие простого отражения относительно границы Γ, обеспечивающее однозначность отраженной траектории, и равенство нулю меры множества так называемых абсолютно периодических точек (в аналитическом случае последнее условие вытекает из простого критерия — неотрицательности на границе некоторой скобки Пуассона). Тогда

$$N(\lambda) = a\lambda^{n/2m} + b\lambda^{(n-1)/2m} + o(\lambda^{(n-1)/2m}),$$

где a выражается через интеграл от главного символа оператора A, а b есть интеграл по $T^*\Gamma$ суммы функции распределения собственных значений и фазы рассеяния одномерной задачи на полуоси для уравнения с постоянными коэффициентами, получающейся из исходной краевой задачи (в каждой точке границы Γ). Этот результат включает цитированные выше теоремы Дюйстермаата и Гийемина, Сили и В. Я. Иврия (см. также работу: *Бабич В. М., Левитан Б. М.*— Докл. АН СССР, 1978, т. 230, № 5, для областей с геодезически вогнутой границей).

Вопрос об асимптотике числа $N(\lambda)$ на открытых римановых многообразиях (конечного объема) весьма далек от своего решения, даже для двумерного случая. Основная задача со-

стоит здесь в существовании у оператора Лапласа бесконечного дискретного спектра (проблема Рёльке, см.: *Венков А. Б.*— Цит. соч., § 11). Из имеющихся общих теорем о спектре оператора Лапласа в некомпактной фундаментальной области D фуксовой группы (*Selberg A.*— Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1962, p. 177—189; *Фаддеев Л. Д.* Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. 17, с. 323—349; см. также: *Ленг С.* $SL_2(R)$. М.: Мир, 1977; *Лакс П.*, *Филиппс Р.* Теория рассеяния для автоморфных функций. М.: Мир, 1979) не удается получить требуемой информации о дискретном спектре, за исключением случая арифметических групп. А. Б. Венков доказал недавно (см. цит. соч.; Proc. Intern. Congr. Math. W-wa, 1982) бесконечность дискретного спектра и асимптотическую формулу

$$N(\lambda) = (4\pi)^{-1}\mathrm{vol}(D)\lambda - (4\pi)^{-1}m\sqrt{\lambda}\ln\lambda + O(\sqrt{\lambda})$$

для дискретных групп Γ_M на плоскости Лобачевского, порожденных четными произведениями отражений относительно сторон некоторого геодезического многоугольника M с углами вида π/k, $k > 1$ — целое или ∞ (m — число нулевых углов в M). Фундаментальную роль в этом круге вопросов играет аналогия между простыми числами и классами сопряженности элементов в фуксовых группах, находящая свое выражение в определении дзета-функции Сельберга и установлении ее связи с оператором Лапласа и его спектром (с помощью формулы следа Сельберга). Об аналогичных задачах для дискретных групп в трехмерном гиперболическом пространстве см.: *Элстрод Дж.*, *Грюневальд Ф.*, *Менника Дж.*— Успехи мат. наук, 1983, т. 38, с. 119—147.

Отметим еще обширную область исследований, связанных с оценками первых собственных чисел оператора Лапласа на римановых многообразиях через такие инварианты, как диаметр или изопериметрическая константа (*Gallot S.* Seminaire Bourbaki, 1980/81. B., 1981, p. 132—148. (Lect. Notes Math., N 901); Proc. Sympos. Pure Math., 1980, vol. 36; *Li P.*, *Yau S.-T.*,— Communs Math. Phys., 1983, vol. 88, p. 309—318; *Polya G.*— Proc. London Math. Soc., 1961, vol. 11, p. 419—433).

В. И. Арнольд, А. Н. Паршин

[1] (с. 10). a и b — продольная и поперечная скорости звука; σ — коэффициент Пуассона.

[2] (с. 12). Связную, как добавлено автором в издании [I, 16].

[3] (с. 12). Мы будем говорить о поверхности V и в том случае, когда тело имеет внутри себя пустоты и вследствие этого V состоит из нескольких поверхностей (конечного числа связных компонент) (добавление 1955 г. в [I, 16]).

[4] (с. 12). Символ «$++$» следует понимать как сумму всех слагаемых, полученных при циклической перестановке индексов.

[5] (с. 14). В оригинале «Potenzialgleichung», т. е. дословно «потенциальное уравнение».

[6] (с. 15). P — фундаментальное решение уравнений теории упругости.

[7] (с. 16). В [I, 16] к этому месту добавлено: если отказаться от условия $a > b/3 > 0$, то для вывода этого факта нужно вместо неравенства (D_0) воспользоваться неравенством (C_0). Дальнейшее доказательство проводится по схеме, намеченной ниже на с. 23 для задачи II.

[8] (с. 18). Изменение 1955 г. в [I, 16]. Первоначальная формулировка этого предложения по крайней мере при предположении $a > b/3 > 0$.

[9] (с. 19). В первоначальном тексте статьи была допущена ошибка, утверждалось, что в общем случае $\int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{b}(o)\mathfrak{c}(o)\,do \neq 0$. Поэтому в данном издании первоначальный текст статьи

с 29-й строки [с. 18 наст. изд.] по 7-ю строку снизу, [с. 21 наст. изд.] изменен с сохранением основных идей. При этом одновременно снимается сделанное там ради удобства предположение: $n = 1$, где n — число линейно независимых собственных функций $e(o)$. Значительно позже Клаусом Мюллером и автором для уравнения электромагнитных волн во внешнем пространстве был развит другой метод решения однородных интегральных уравнений; ср. *Müller C.*— Math. Ann., 1951, Bd. 123, S. 345—371; *Weyl H.*— II, 153—155. (Примеч. авт. 15 мая 1955 г.)

[10] (с. 22). и $\bar{\Lambda}$ — резольвента $\Lambda(0, 0')$ — добавление 1955 г. в [I, 16].

[11] (с. 24). Далее см. [II, 153], добавление 1955 г. в [I, 16].

[12] (с. 31). Дадим более подробные пояснения. Пусть a — плотность заряда; α — угол между антеннами; x, y — координаты фиксированной точки M. Тогда проекции точки M на первую и вторую антенны равны соответственно $r\cos(\operatorname{arctg}(y/x) - \alpha/2)$ и $r\cos(\operatorname{arctg}(y/x) + \alpha/2)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Потенциал точки M равен $a \ln r\,[1 + \cos(\operatorname{arctg}(y/x) - \alpha/2)] - a \ln r \cdot [1 + \cos(\operatorname{arctg}(y/x) + \alpha/2)]$ и при $\alpha \to 0$ эквивалентен $\alpha a y/(r + x)$. Если считать, что по мере сближения антенн плотность заряда на них растет обратно пропорционально углу между ними, «синхронный рост», то в пределе получится $y/(r + x)$.

[13] (с. 43). На протяжении этого параграфа предполагается, что $K(x, \xi)$ — скалярная функция. Однако все результаты остаются справедливыми и в том случае, когда $K(x, \xi)$ — матричное ядро. Чтобы в этом убедиться, достаточно каждое доказательство повторить дословно с использованием матрично-векторных обозначений. Отметим, что в дальнейшем изложении фактически используются матричные аналоги соответствующих утверждений.

[14] (с. 43). В оригинале «reziproken positiven Eigenwerte», дословно «величины, обратные к положительным собственным значениям». Отметим, что термин «Eigenwert» (собственное значение) автор одновременно применяет как к собственным значениям дифференциального оператора, так и к характеристическим числам обратного к нему интегрального оператора. Такое употребление этого термина вполне объяснимо, поскольку если собственное значение λ дифференциального оператора Δ^* ($\Delta^* u = \lambda u$) не равно нулю, то оно же служит характеристическим числом соответствующего интегрального оператора

$$u(x) = \lambda \int K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi.$$

Однако при последующем развитии общей теории операторов термин «собственное значение» оператора P стал применяться только к таким числам λ, для которых $Pu = \lambda u$; числа, обратные к собственным значениям, стали называться характеристическими числами. Именно поэтому на протяжении всей статьи, во избежание путаницы, термин «Eigenwert» переводился как «собственное значение», если он относился к дифференциальному оператору, и как «характеристическое число», если он относился к интегральному оператору; термин «reziproken Eigenwert» (обратное к собственному значению), который в статье применяется только к интегральным операторам, переводился как «собственное значение».

[15] (с. 45). Точнее: В случае когда f не является собственной функцией K, ядро $K - \dot{K}$ имеет только одно отрицательное и только одно положительное характеристическое число. В случае когда f является собственной функцией K с не равным нулю собственным значением μ, ядро $K - \dot{K}$ обладает только одним характеристическим числом $1/\mu$. Наконец, в случае когда f является собственной функцией K с нулевым собственным значением, ядро $K - \dot{K}$ не имеет характеристических чисел. Действительно, ядро $K - \dot{K}$ вырождено. Нетрудно проверить, что его ненулевые собственные значения совпадают с ненулевыми собственными

значениями матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 0 & \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(y)\,KK(y,\eta)\,f(\eta)\,dy\,d\eta - \left[\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(y)\,K(y,\eta)\,f(\eta)\,dy\,d\eta\right]^2 \\ 1 & \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(y)\,K(y,\eta)\,f(\eta)\,dy\,d\eta \end{matrix} \right\|.$$

Детерминант этой матрицы в силу неравенства Коши—Буняковского—Шварца меньше или равен нулю, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда f — собственная функция ядра K. Отметим, что дальнейшие рассуждения автора остаются справедливыми и в том случае, когда f — собственная функция ядра K.

[16] (с. 47). «$+$» здесь означает теоретико-множественное объединение.

[17] (с. 51). В каждую линейную комбинацию входят собственные функции, отвечающие одному и тому же собственному значению $\frac{\pi^2}{c^2}(l^2+m^2+n^2)$, т. е. такие функции, для которых $(l^2+m^2+n^2)$ равны между собой.

М. И. Зеликин

О равномерном распределении чисел по модулю один

Работа Г. Вейля оказала значительное влияние на развитие нескольких областей математики. Прежде всего она сыграла основополагающую роль в создании теории равномерного распределения. Введение в современное состояние этой теории можно найти в книге Эдмунда Хлавки (*Hlawka E.* Theorie der Gleichverteilung. Wien; Zürich, 1979). В основе теории равномерного распределения лежит тригонометрический критерий Вейля (§ 1 статьи, теорема 1). Его применение к задачам о равномерном распределении дробных долей функций $f(x)$, т. е. последовательностей $f(n) \bmod 1$, приводит к необходимости оценивать тригонометрические суммы вида

$$\sum_{n=1}^{P} e^{2\pi i f(n)}, \tag{1}$$

где P — растущий параметр.

Для приложений весьма важны суммы, в которых $f(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Эти суммы называют суммами Вейля, а полученные в § 3 (теорема 9 и ее доказательство) оценки таких сумм — неравенством Вейля. Оценки тригонометрических сумм с многочленом и сумм, в некотором смысле близких к ним,— это второй важный аспект идей, заложенных в работе Вейля. Эти оценки весьма важны для многих задач аналитической теории чисел и прежде всего для задачи о распределении простых чисел (см.: *Чандрасекхаран К.* Арифметические функции. М.: Наука, 1975, гл. 3). Вскоре после работы Вейля его оценка тригонометрических сумм была использована Харди и Литтлвудом для обоснования созданного ими кругового метода в теории диофантовых уравнений (Götting. Nachr., 1920, S. 33—54). Найденная Харди и Литтлвудом асимптотическая формула для числа целочисленных решений в проблеме Варинга содержит так называемый сингулярный ряд, выражающийся через числа решений соответствующих сравнений по всем простым модулям (см.: *Davenport H.* Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities.— Ann. Arbor, 1962). Это обстоятельство имеет поразительную и до сих пор не проясненную аналогию с гипотезами о распределении рациональных точек на эллиптических кривых, определенных над Q (*Birch B. J., Swinnerton-Dyer H. P. F.*— J. reine und angew. Math.

1963, Bd. 212, S. 7—25; 1965, Bd. 218, S. 79—108) и работой К. Л. Зигеля по квадратичным формам (Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 527—606).

В 1933—1934 гг. И. М. Виноградов предложил метод оценки сумм Вейля, основанный на других идеях и давший гораздо более сильные неравенства (при $n \geqslant 11$, n — степень многочлена $f(x)$), чем оценка Вейля. Дальнейшие подробности о подходе Вейля к оценкам тригонометрических сумм см. в [IV, 4] (наст. изд., с. 418—420) и [IV, 8]. Метод И. М. Виноградова изложен в книгах (*Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980; *Хуа Ло-ген.* Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1964; *Чандрасекхаран К.* Указ. соч., гл. 4). Эти книги содержат также подробные исторические очерки. Отметим еще, что Вейль отозвался на решение Виноградовым тернарной проблемы Гольдбаха заметкой [II, 128], в которой обобщил этот результат на случай представлений вида $N = a_1p_1 + \ldots + a_rp_r$, где $a_1, \ldots, a_r$, $r \geqslant 1$,— заданные целые числа (другие работы Вейля в этой области [II, 42; 44]).

Возвращаясь к задачам равномерного распределения последовательностей, укажем, что критерий Вейля дал толчок к многочисленным результатам такого рода. Среди них выделяется критерий Фейера (*Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978, с. 97, 276), из которого, в частности, вытекает равномерное распределение mod 1 последовательностей $a \cdot n^{\alpha}$, $a \neq 0$, $0 < \alpha < 1$ и $(\log n)^{\sigma}$, $\sigma > 1$. Дж. фон Нейман доказал, что любая плотная в [0, 1] последовательность становится равномерно распределенной после подходящего переупорядочивания (Mat.-fiz. Lapok, 1925, vol. 32, p. 32—40). Особенно важное значение имела теорема Ван дер Корпута (*Van der Corput J. G.*— Acta math., 1931, vol. 56, p. 375—456): если последовательность $a(n + q) - a(n)$ равномерно распределена для всех натуральных q, то и исходная последовательность $a(n)$ равномерно распределена. Н. М. Коробов и А. Г. Постников показали (Докл. АН СССР, 1952, т. 84, с. 217—220), что в этой ситуации равномерно распределены также последовательности вида $a(mn + r)$, где m — натуральное, а $r > -m$ — целое число.

Седьмой параграф работы Вейля привел к вопросу о строении множества равномерно распределенных последовательностей в пространстве всех последовательностей, см.: *Hlawka* Op. cit., Cap. 5. В частности, из теоремы 21 вытекает, что последовательность $\alpha \cdot r^n$ равномерно распределена при $r \geqslant 2$ и почти всех вещественных α. Числа α, для которых это верно, называют нормальными (по основанию r). В полном согласии с замечанием Вейля на с. 86 до сих пор не удается выяснить нормальность таких конкретных чисел, как $\sqrt{2}$, $\log 2$, e или π. В теории равномерного распределения много внимания уделялось также вопросу об оценке скорости, с которой происходит равномерное распределение, т. е. об оценке следующего члена асимптотики (1) на с. 58, для последовательности α_n. Такая оценка была получена Эрдешем и Тураном (*Erdös P., Turan P.*— Indig. math., 1948, vol. 10, p. 370—378, 406—413). Впоследствии многие из этих результатов стали исходным пунктом для обширной теории статистических свойств числовых последовательностей (см.: *Постников А. Г.* Арифметическое моделирование случайных процессов.— Тр. МИАН СССР, 1962, т. 57; *Rauzy G.* Propriétés statistiques de suites arithmetiques. P., 1976).

Уже в работе Вейля рассматривалось равномерное распределение не только на окружности $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$, но и на торах любой размерности (§ 2). Последовательность $a(n)$ со значениями в некотором топологическом пространстве X с мерой μ называется равномерно распределенной, если для любой непрерывной функции $f(x)$, $x \in X$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(a(n)) = \int_X f(x)\, d\mu(x). \tag{2}$$

Если $X = G$ — компактная группа и μ — нормированная мера Хаара, то теорема Петера—Вейля [II, 73; III, 2] немедленно дает обобщение тригонометрического критерия: если для характеров χ всех нетривиальных унитарных неприводимых представлений группы G

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(a(n)) = 0,$$

то последовательность $a(n)$ равномерно распределена (*Eckmann B.*— Comment. math. helv., 1943/44, vol. 16, p. 33—47; *Hlawka.* Op. cit., Cap. 4). В качестве приложения этого результата укажем на следующий вариант теоремы Н. Г. Чеботарева о плотности. Пусть L/K — конечное расширение Галуа поля алгебраических чисел K, неразветвленное вне множества S простых идеалов поля K, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ и Fr_v, $v \notin S$,— автоморфизмы Фробениуса, произвольно выбранные из классов сопряженности группы G. Последовательность (Fr_v) будет равномерно распределенной в G относительно нормированной меры Хаара, если ее упорядочить по возрастанию норм идеалов v (см.: *Серр Ж.-П.* Абелевы l-адические представления и эллиптические кривые. М.: Мир, 1973). Там же указано обобщение на бесконечные расширения L/K и приведена гипотеза Сато—Тейта о равномерном распределении на $[0, \pi]$ относительно меры $2\pi^{-1}\sin^2 \varphi d\varphi$ чисел φ_v, если $\sqrt{Nv}e^{\pm i\varphi_v}$ — собственные значения автоморфизмов Фробениуса эллиптической кривой без комплексного умножения, определенной над числовым полем K (см. также: *Lang S.*, *Trotter H.* Frobenius distributions in GL_2-extensions. B., 1976).

Как неоднократно указывал сам Вейль (см. § 2 его работы [II, 113; II, 150]), исходным пунктом для его исследований по теории равномерного распределения была старая задача Лагранжа из небесной механики (о вековых возмущениях долготы перигелия планетных орбит). В 1782 г. Лагранж показал, что в первом приближении эта задача сводится к изучению изменения аргумента $\arg F(t)$ некоторого тригонометрического многочлена

$$F(t) = a_1 e^{i\lambda_1 t} + \ldots + a_N e^{i\lambda_N t}$$

(с комплексными $a_1, \ldots, a_N$, вещественными $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, t) при больших значениях (времени) t. Математически задача состоит в доказательстве существования *среднего движения*

$$c = \lim_{t\to\infty} \frac{\arg F(t)}{t}$$

и выражении его через параметры многочлена F. Именно в связи с этой задачей (для $N = 3$) в работе Боля появилось понятие равномерного распределения mod 1. Как отметил Вейль в [II, 113], его разбор одного из случаев для $N = 4$ (в § 2) содержал ошибку (см. ниже). Случай любого N был рассмотрен Вейлем в [II, 113; III, 14] (для целочисленно независимых $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$) и [II, 114] (при более слабых ограничениях). Он воспользовался доказанным в § 2 (теорема 5) законом равномерного распределения для условно-периодического (как теперь говорят) движения $\vartheta_1 = e^{i\lambda_1 t}, \ldots, \vartheta_N = e^{i\lambda_N t}$ на N-мерном торе X с координатами $\vartheta_1 \bmod 1, \ldots, \vartheta_N \bmod 1$: для любой ограниченной интегрируемой функции $f(\vartheta)$ на X

$$\lim_{t_2 - t_1\to\infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(\vartheta(t))\, dt = \int_X f(\vartheta)\, d\vartheta \qquad (3)$$

(т. е. временно́е среднее равно фазовому среднему). Непосредственное применение этой теоремы связано с той трудностью, что в X имеется подмногообразие, на котором $F(t) = F(\vartheta(t))$

обращается в нуль, а соответствующая функция $f = \mathrm{Re}\,(2\pi i F)^{-1}F'$ в бесконечность. Детальное изучение топологии этого подмногообразия в X и поведения ветвей функции $\arg F(\vartheta)$ в его окрестности привело Вейля к доказательству равенства $c = W_1\lambda_1 + \ldots + W_N\lambda_N$, где $W_1, \ldots, W_N$ выражаются через $a_1, \ldots, a_N$. Общий случай (когда $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ произвольны) был решен Иессеном и Торнхавом (Acta math., 1945, vol. 77, p. 137—279). По поводу связи с небесной механикой см.: *Арнольд В. И.*— Успехи мат. наук, 1963, т. 18, №6, с. 92—192. Литературу и подробную историю задачи Лагранжа, включая обобщение на почти периодические функции, см. в обзоре Б. Иессена (Междунар. мат. конгр. Амстердам. М.: Физматгиз, 1961, с. 151—164).

Равенство (3) является простейшим примером эргодической теоремы в теории динамических систем (для систем с дискретным временем, т. е. автоморфизмов $T : X \to X$, эргодические теоремы имеют вид (2) с $a(n) = T^n x_0$, $x_0 \in X$). Общие эргодические теоремы были получены в начале 30-х годов Г. Биркгофом и Дж. фон Нейманом (см.: *Хопф Э.*— Успехи мат. наук, 1949, т. 4, с. 113—182; *Neumann J. von.*— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 587—789, о работе Вейля, р. 629) в связи с проблемой обоснования классической статистической механики (эргодическая гипотеза Максвелла—Больцмана, квазиэргодическая гипотеза Эренфеста и гипотеза перемешивания Гиббса (см.: *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978, т. 2, приложение).

Современное состояние эргодической теории изложено в книге: *Корнфельд И. П., Синая Я. Г., Фомина С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980 (в гл. 7 рассмотрены связи с теорией чисел и дано, в частности, доказательство Фюрстенберга (Amer. J. Math., 1961, vol. 83, p. 573—601) теоремы Вейля о распределении дробных долей многочленов (теорема 12) без использования оценок сумм (1)). Роль условно-периодических движений в механике обсуждается в книге: *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, с. 247—252, 365—383.

Замечательным приложением теории равномерного распределения являются методы приближенных вычислений. По этому вопросу мы отсылаем читателя к цитированной книге Хлавки (гл. 8). Еще одно приложение теории равномерного распределения, вне математики, было указано нам В. И. Арнольдом. Он заметил, что распределение первых цифр чисел, выражающих население или территории стран мира, близко к распределению первых цифр чисел вида λ^n, которое легко вычисляется в силу равномерного распределения mod 1 последовательности $n \log \lambda$. Для выборки из $\sim$190 стран (Атлас мира. М., 1975) эти распределения имеют вид (составлено М. Б. Севрюком):

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Население, %	27,3	23,0	11,8	8,1	12,8	5,3	4,3	5,3	2,1
Территория, %	31,1	23,8	9,9	10,4	3,8	6,1	5,5	3,3	6,1
$100 \lg \left(\frac{s+1}{s}\right)$	30,1	17,61	12,5	9,69	7,92	6,69	5,8	5,11	4,58

Другой пример относится к известной загадке из истории античной математики — реконструкции процесса, с помощью которого Феодор из Кирены доказывал (*Платон.* Теэтет, 147d) иррациональность $\sqrt{n}$ для неквадратных $n \leqslant 17$ (*Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука. М.: Физматгиз, 1959, с. 197—202). Хлавка (Указ. соч., с. 25) заметил, что лучи в геометрической интерпретации процесса Феодора на плоскости будут равномерно распределены.

[1] (с. 58). Вейль часто употребляет термин «равномерно плотное распределение», вместо которого теперь говорят просто «равномерное распределение». Это понятие было введено независимо П. Болем и В. Серпинским (см. примеч. на с. 61).

[2] (с. 59). Т. е. два числа x, y сравнимы mod 1 тогда и только тогда, когда $e(x) = e(y)$.

[3] (с. 63). Эта книга так и не появилась.

[4] (с. 67). Как отмечает Вейль в [II, 113], эта сумма равна 0, что дает дополнительное слагаемое X_1 в окончательный ответ.

[5] (с. 69). Т. е. несравнима с 1 mod 1.

[6] (с. 69 и 76). Proc. Intern. Congr. Math. Cambridge, 1912, p. 223—229.

[7] (с. 69). Эта третья часть так и не появилась (Дополнение 1955 г. в [I, 16]). Харди и Литтлвуд откликнулись на работу Вейля статьей (Proc. Nat. Acad. Sci., 1916, vol. 3, p. 84—88), содержащей подробное изложение несколько запутанной истории возникновения теории равномерного распределения.

[8] (с. 75). См. [II, 42].

[9] (с. 78). Some problems of Diophantine approximations. I. The fractional part of $n^k\theta$.— Acta math., 1914, vol. 37, p. 155—191.

[10] (с. 90). Сейчас вместо первого издания 1913 г. предпочтительнее обратиться к переработанному третьему изданию 1955 г., прежде всего к § 4 и 8 (замечание 1955 г. в [I, 16]).

[11] (с. 93) Односвязно.

А. Г. Постников, А. Н. Паршин

Порочный круг в современном обосновании анализа. Математика и логика

Обе статьи Вейля, разделенные промежутком времени в двадцать семь лет, посвящены обсуждению проблемы непредикативности и статусу существования объектов исследования в математике. В этом комментарии мы попытаемся кратко осветить современную трактовку этих вопросов и указать на некоторую библиографию, в которой заинтересованный читатель найдет и дальнейшую литературу.

Всякая естественно-научная теория характеризуется двумя важнейшими чертами — своими объектами исследования и способом рассуждения относительно этих объектов. Своеобразие объектов исследования в математике состоит, прежде всего, в том, что они, объекты, обычно не существуют в привычном смысле. Так, действительные числа в своей классической трактовке суть принципиально бесконечные объекты (например, это всевозможные классы эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел), и большая их часть не имеет аналога в окружающей нас действительности. Не имеют непосредственного аналога в окружающем нас мире и множества высоких мощностей, неизмеримые множества и функции и т. п.

Такое положение вещей требует строго регламентировать способы рассуждения о математических объектах. Типичное теоретико-множественное математическое рассуждение зачастую неверифицируемо, не проверяемо экспериментально, так что неосторожное или приблизительное рассуждение легко может привести к нелепым результатам или даже к противоречиям. Таким образом, математические утверждения следует доказывать по точным правилам. Математика есть дедуктивная наука и не потому, что математики — особо строгие и дотошные люди, а в силу необходимости, ввиду особого онтологического статуса своих объектов исследования.

К началу текущего столетия способ рассуждения в классической математике в основном канонизировался. В терминах математической логики этот способ рассуждения может быть уточнен в форме так называемого классического исчисления предикатов (формулировку см., например, в учебниках: *Колмогоров А. Н.*, *Драгалин А. Г.* Введение в математическую логику. М.: Изд-во МГУ, 1982, гл. 3; *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976, гл. 2). И хотя законы классического исчисления предикатов могут быть подвергнуты критике с различных точек зрения, из которых наиболее интересной является критика с позиций интуиционизма Брауэра, все же большинство исследователей, в том числе и Вейль в основной части своих работ, склонны рассматривать именно классическое исчисление предикатов в качестве приемлемого базиса для построения всего здания классической математики.

Гораздо более спорная проблема состоит в том, каков объем семейства объектов исследования в математике. Традиционная математика имеет дело с множествами, функциями, свойствами, отношениями. Эти четыре категории объектов могут быть рутинным образом сведены к одной из них, например к понятию множества (или, скажем, к понятию отношения). Но какую совокупность множеств следует рассматривать, чтобы «обеспечить» всю математику? Современная математическая логика все еще очень далека от точной постановки этого вопроса, а тем более от его решения. Имеется широкий спектр точек зрения на эту важную проблему. С некоторыми из них читатель может познакомиться в книге: *Френкель А.*, *Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.

Для математического рассуждения характерна **абстракция отчуждения**, в силу которой мыслительный процесс математика-исследователя на некотором этапе и в некоторой своей части сам становится объектом исследования. В теории множеств эта абстракция типичным образом проявляется в форме так называемого **принципа свертывания:** математик сначала формулирует в языке исследования некоторое свойство $\varphi(x)$ объектов исследования определенного типа, а затем образует новый объект исследования — множество $\{x \mid \varphi(x)\}$ всех объектов x, для которых имеет место свойство φ. В этой ситуации наша проблема может быть конкретизирована следующим образом: для каких свойств φ можно рассматривать соответствующее множество как законный объект исследования? Драматизм проблемы усугубляется здесь еще и тем хорошо известным обстоятельством, что неосторожное применение принципа свертывания ведет непосредственно к противоречиям, парадоксам.

Рассмотрим парадокс Рассела. Предположим, что переменные x, u пробегают произвольные множества. Рассмотрим свойство множеств «не принадлежать самому себе»: $x \notin x$. По принципу свертывания образуем множество всех множеств, не принадлежащих самому себе, обозначим это множество через R. Таким образом, $R = \{x \mid x \notin x\}$. Тогда по определению R для всякого множества u имеем

$$u \in R \equiv u \notin u.$$

В частности, взяв в качестве u само множество R, получим

$$R \in R \equiv R \notin R,$$

что логически противоречиво.

Еще более непосредственна опасность появления противоречия при неосторожном употреблении абстракции отчуждения вида в известном парадоксе лжеца. Субъект сначала высказывает суждение: «я лгу», а затем задается вопросом, истинно или ложно сделанное им высказывание. На этом втором этапе сделанное высказывание уже выступает в роли объекта исследования, относительно которого задаются различные вопросы.

Следует подчеркнуть, что проблема описания объема совокупности множеств, употребляемых в математике, возникает независимо от парадоксов и касается в том числе и таких семейств множеств, которые явно не приводят к парадоксам, например семейства подмножеств множества всех натуральных чисел. Парадоксы свидетельствуют о том, что нельзя толковать принцип свертывания слишком расширительно, но они не дают ни малейших указаний относительно того, по отношению к каким свойствам принцип свертывания применять должно и безопасно.

Вейль исходит из конструктивной по своему духу концепции, что объекты исследования в математике должны строиться итеративно и новые объекты исследования возникают из уже построенных путем повторения заранее принятых конструктивно сформулированных правил построения. При этом конечно, молчаливо принимается **абстракция потенциальной осуществимости**, в силу которой мы считаем процесс итераций неограниченно продолжаемым, отвлекаясь от трудностей осуществления процесса, носящих физический или технический характер.

В этой концепции натуральные числа, например, являются законными объектами исследования, так как их можно итеративно порождать с помощью однородного процесса, например, в виде последовательности черточек |, ||, |||, . . . и т. д. Каждое натуральное число возникает в этом процессе, совокупность натуральных чисел образует объемно определенное понятие по Вейлю. Имеет смысл говорить об объекте исследования, когда оно является натуральным числом. Подобным образом можно порождать и конструктивные объекты иных типов, например рациональные числа, целочисленные матрицы, формулы программы, полиномы с рациональными коэффициентами и т. п.

Ситуация становится совершенно иной, когда мы переходим к рассмотрению множеств. Ни в какой мере не видно, с помощью каких итеративных процессов можно было бы исчерпать, скажем, все подмножества множества натуральных чисел. Более того, в математике сплошь да рядом встречаются множества, описания которых носят явно не итеративный характер. Рассмотрим пример. Пусть x — переменная для множеств натуральных чисел. Определим свойство $\psi(x)$ следующим образом: $\psi(x)$ означает «$7 \in x$, и для всякого натурального n, если $n \in x$, то $(n+1) \in x$». Множество Z натуральных чисел опишем теперь так:

$$n \in Z \equiv \forall x (\psi(x) \to n \in x). \qquad (1)$$

Т. е. в соответствии с принципом свертывания

$$Z = \{n \mid \forall x (\psi(x) \to n \in x)\}.$$

Для того чтобы выяснить, принадлежит ли некоторое число m множеству Z, следует согласно описанию множества выяснить, принадлежит ли m всем множествам x таким, что $\psi(x)$. В том числе следует рассмотреть и само описываемое множество Z и выяснить, принадлежит ли m множеству Z! Отсюда видно, что описание (1) множества Z нельзя рассматривать как определение *нового множества* Z с помощью уже построенных множеств. Такое «определение» явно содержало бы порочный круг, для его понимания необходимо ссылаться на сам определяемый объект. Именно это обстоятельство Вейль и называет порочным кругом в современном обосновании анализа.

Тем не менее принцип свертывания по произвольному свойству широко используется в классическом анализе для образования множеств ограниченной мощности, например для образования множеств натуральных чисел. В этом состоит так называемый **принцип выделения** в теории множеств. Для избегания порочного круга при этом считается, что принцип

свертывания не определяет нового множества. Область $\mathfrak{E}$ всех множеств натуральных чисел «уже есть», она задана и объемно определена независимо от наших определений, а условие вроде условия (1) лишь *выделяет* из этой области некоторый элемент Z, удовлетворяющий условию. Мы не строим множества, мы лишь констатируем, что в области $\mathfrak{E}$ множеств уже имеются множества, удовлетворяющие интересующим нас условиям. Область $\mathfrak{E}$ при этом считается априорно заданной независимо от каких-либо построений. В этом и состоит так называемая **платонистская концепция** в основаниях теории множеств.

Можно попытаться придать условию (1) характер итеративного построения, если поступить следующим образом. Будем считать, что x — переменная не для всей области $\mathfrak{E}$ множеств натуральных чисел (так как эта область, по-видимому, не может рассматриваться как объемно определенная), а лишь для некоторой области $\mathfrak{E}_k$ множеств, которые считаются построенными на данном этапе, например это могут быть множества, определяемые бескванторными арифметическими формулами. Тогда можно считать, что (1) определяет новое множество Z, которое, однако, следует отнести уже к иной, более широкой области $\mathfrak{E}_{k+1}$. При такой постановке множество Z можно рассматривать как вновь построенное, так как понимание условия справа от эквивалентности (1) уже не зависит от Z, а ссылается лишь на объекты уже определенной области $\mathfrak{E}_k$. Объем множества Z в этом случае, однако, зависит от объема $\mathfrak{E}_k$ и может быть существенно иным, чем при наивном определении. При таком подходе множества естественно делятся на типы, слои в зависимости от того, на каком этапе они были определены. Возникает иерархия множеств. Это так называемая **предикативная иерархия множеств.**

В общем случае принцип свертывания утверждает существование множеств, задаваемых произвольными, в том числе и непредикативными определениями. В некоторых случаях такое определение может оказаться эквивалентным некоторому другому, уже не содержащему круга. Так, в нашем примере множество Z можно определить и иначе: это просто множество всех чисел, больших или равных 7, $Z = \{n \mid n \geqslant 7\}$. Однако далеко не всякое непредикативное определение может быть заменено эквивалентным предикативным.

Возражения против употребления непредикативных определений в математике впервые определенно были высказаны А. Пуанкаре в 1906 г., ему же принадлежит и сам термин. Пуанкаре заметил, в частности, что в известных парадоксах теории множеств непременно фигурируют непредикативные определения. Так, для выяснения объема множества Рассела $R = \{x \mid x \notin x\}$ следует понимать, что означает $x \in x$ для произвольного множества, в том числе и для самого множества R.

Вейль выдвинул идею конструктивного, итеративного построения объектов исследования в математике и в своей книге «Континуум» (1918) предпринял продвинутую попытку построения математики на предикативной основе. Попытку эту можно расценить как удачную в том смысле, что для каждой из рассмотренных классических теорем удалось найти естественный предикативный аналог. И все же ввиду сложного расслоения множеств в предикативную иерархию формулировки теорем часто загромождались необходимостью учета типов. Типичный пример — верхняя грань ограниченного множества действительных чисел определенного типа оказывается действительным числом, вообще говоря, более высокого типа.

Пусть P обозначает операцию взятия множества всех подмножеств. Иерархию множеств вида $x, Px, PPx, \ldots$ назовем **простой** иерархией типов множеств. Если же теперь мы будем в каждом из слоев $Px, PPx, \ldots$ в свою очередь классифицировать множества по способу определения в стиле предикативной иерархии, то получим более сложную, **разветвленную** иерархию типов множеств. Рассел строил свою знаменитую теорию Principia mathematica первоначально (1908 г.) именно для описания разветвленной теории типов, но, столкнувшись

с трудностями при построении математики, ввел специальную **аксиому сводимости,** фактически аннулирующую предикативную иерархию. По отношению к множествам натуральных чисел, например, эта аксиома гласит, что для всякого множества x, принадлежащего любой из областей $\mathfrak{E}_k$, найдется множество y из исходной области $\mathfrak{E}_1$, равнообъемное с x. Таким образом, постулируется, что область $\mathfrak{E}_1$ с самого начала фактически содержит все построенные на более поздних этапах области $\mathfrak{E}_k$. Как заметил Рамсей, разветвленную иерархию в этом случае можно исключить из теории, заменив эквивалентным образом на непредикативную аксиому свертывания. Соответствующая теория получила название **простой теории типов.**

Как мы видели, интуитивная семантика простой теории типов предполагает актуальное наличие обширных областей множеств, независимо от наших построений, и поэтому выглядит весьма малопривлекательной с конструктивной точки зрения. Об аксиоме сводимости Вейль говорит: «Это дерзкая и едва ли не фантастическая аксиома; для нее мало оправдания в реальном мире, в котором мы живем, и нет вообще оправдания в основаниях, на которых наш разум базирует свои конструкции» (наст. изд., с. 332).

Особая роль аксиомы сводимости ясно видна и в современных исследованиях по теории доказательств. Имеется непроходимая грань между предикативными и непредикативными теориями. Последние оказываются значительно сильнее своих предикативных аналогов, причем это усиление носит «трансцедентный» характер: не видно никаких возможностей получить непредикативную теорию как конструктивный предел последовательности предикативных теорий.

Следует заметить, что в настоящее время традиционная математика в своем большинстве строится тем не менее на непредикативной теоретико-множественной основе, в стиле системы Цермело—Френкеля, так что вопросы понимания и истолкования сложных теоретико-множественных суждений остаются актуальными. Мы по-прежнему заняты вопросом, откуда берется тот платонистский мир идей, который изучает математика. И если в начале века математику часто рассматривали как науку, получающую неопровержимые вечные истины, то с современной точки зрения вопрос об истинности математических теорем, соответствии их с действительностью как раз кажется наиболее трудным и вызывающим споры.

Направление в математике, которое развивается в книге Вейля «Континуум» и о котором говорил Пуанкаре, можно назвать предикативизмом. Это направление имеет две характерные особенности. Во-первых, объекты исследования в математике ограничиваются лишь объектами, возникающими в результате итерации построений, и, в частности, множества определяются предикативно, в стиле разветвленной теории типов. Это свидетельствует вообще о подчиненном характере идеи множества и фундаментальности, первичности конструкции и принципа полной математической индукции как способа рассуждения. Во-вторых, способ рассуждения остается классическим в стиле классического исчисления предикатов.

Уже Вейль заметил непоследовательность предикативизма во втором пункте: более естественно принять и эффективное толкование логических связок в соответствии с эффективным характером объекта исследования. Подобные соображения ведут к интуиционистской и конструктивной математике, концепциям, которые Вейль считал основополагающими в основаниях математики.

В настоящее время интуиционистская математика является весьма обширной и развитой областью математического знания. В рамках интуиционизма имеются глубокие разработки конкретных математических дисциплин в различных направлениях и, что для нас наиболее интересно, имеется обширная теория доказательств с развитым спектром математических

средств. Традиционное введение в интуиционистскую математику читатель найдет в книге: *Гейтинг А.* Интуиционизм. М.: Мир, 1965; более подготовленного читателя можно отослать к монографиям: *Клини С., Весли Р.* Основания интуиционистской математики. М.: Наука, 1978; *Драгалин А. Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979, где имеется дальнейшая библиография по теме. Существенный вклад вносит интуиционистская математика и в трудную проблему обоснования непредикативных теорий. Так, Спектор (см.: Proc. Sympos. Pure Math., 1962, p. 1—27), развивая идеи Геделя о вычислимости объектов высоких ступеней, сумел построить интуиционистскую интерпретацию непредикативного классического анализа — арифметики второго порядка. Другая интуиционистская интерпретация анализа основана на идее Брауэра о построении последовательностей, зависящих от решения проблем (*Гейтинг А.* Указ. соч., п. 8.1; *Драгалин А. Г.* Указ. соч., ч. 4, п. 2). По поводу конструктивной математики см.: *Марков А. А.* О конструктивной математике.— Тр. МИАН СССР, 1962, т. 67, с. 8—14.

С формулировками основных предикативных теорий и с историей вопроса можно ознакомиться по книгам: *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Указ. соч., гл. 3, § 10; *Черч А.* Введение в математическую логику. М.: Изд-во иностр. лит., 1960, т. 1, гл. V. Современное исследование предикативных теорий методами теории доказательств см. в следующих четырех статьях: *Feferman S.*— J. Symbol. Log., 1964, vol. 29, N 1, p. 1—30; *Feferman S.*— J. Symbol. Log., 1968, vol. 33, N 2, p. 193—220; *Prawitz D.*— Filos. stud. Filos. fören. Filos. Inst. Uppsala univ., 1970, N 9, p. 169—180; *Феферман С.*— В кн.: Справочная книга по математической логике. М.: Наука, 1983, ч. 4, с. 100—159.

Изучение простой теории типов и формулировку, близкую к предлагаемой Вейлем, можно найти в книге: *Такеути Г.* Теория доказательств. М.: Мир, 1978, гл. 3. Теория множеств Цермело—Френкеля интенсивно изучалась главным образом, с точки зрения совместности или независимости математических суждений в этой теории, основные результаты можно найти в книгах: *Шенфилд Дж.* Математическая логика. М.: Наука, 1975; *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум — гипотеза. М.: Мир, 1969; *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973. Программа Гильберта обоснования математики подробно обсуждается в фундаментальной монографии: *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Т. 1—2. М.: Наука, 1982/83; краткий очерк этой программы можно найти, например, в учебнике А. Н. Колмогорова, А. Г. Драгалина «Математическая логика. Дополнительные главы» (М.: Изд-во МГУ, 1984).

Упомянем еще работы, в которых с точки зрения оснований математики анализируются сами конструктивные процессы итераций, например шаги построения натурального ряда классифицируются на достижимые и недостижимые. Общее обсуждение достижимости имеется в работах: *Рашевский П. К.*— Успехи мат. наук, 1973, т. 28, вып. 4 (172), с. 243—246; исследование методами теории доказательств см. в статье: *Parikh R.*— J. Symbol. Log., 1971, vol. 36, N 3, p. 494—508.

И еще несколько слов относительно давнего спора о том, что фундаментальнее, логика или математика, конструкция или логическая истина, знаменитого спора трех школ в основаниях математики — логицизма, формализма и интуиционизма. Этот спор сейчас кажется не актуальным. Мы, вероятно, яснее, чем это было в начале века, понимаем сложную взаимосвязь объекта исследования и способа рассуждения о нем, всю невозможность отделить логическое от конструктивного. Сейчас на первый план выдвигается проблема приемлемости математического рассуждения, вопрос о соотнесении математического утверждения с реальностью. И можно восхищаться гением Вейля, более шестидесяти лет назад ясно указавшего на важность изучения именно этих аспектов в основаниях математики. К трудностям, ус-

пехам и исканиям в этой области знания не останутся равнодушными «математики, которым не безразлично, что означают их усилия в развитии науки в плане всего человеческого существования, исполненного творческого познания, страданий и творчества».

[1] (с. 97). [I, 3] (см. также [III, 20]).

А. Г. Драгалин

Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований

По свидетельству Ньюмена, математического биографа Г. Вейля (*Newman M. H. A.*— J. Lond. Math. Soc., 1958, vol. 33, p. 500—511), это исследование рассматривалось самим Г. Вейлем как его наиболее значительный вклад в математику. Г. Вейль осуществляет здесь синтез и существенное дальнейшее развитие двух, до того не связанных друг с другом теорий: теории Э. Картана линейных конечномерных представлений комплексных полупростых алгебр Ли (теории старшего веса) и теории Фробениуса линейных представлений конечных групп (теории характеров), распространенной Шуром на ортогональные группы с помощью идеи Гурвица инвариантного интегрирования на группе. В своих исследованиях Г. Вейль впервые последовательно встает на глобальную точку зрения: до тех пор группы Ли рассматривались главным образом на инфинитезимальном или локальном уровнях. Эта точка зрения получила затем быстрое распространение (см. изложение Э. Картана теории «конечных непрерывных групп», данное им в 1930 г.: *Cartan E.* Oeuvres, t. 1, pt 2, p. 1165—1225) и стимулировала дальнейшие многочисленные исследования.

Указанное объединение теорий Э. Картана и Фробениуса—Шура было осуществлено Г. Вейлем прежде всего в исследовании вопроса о полной приводимости представлений комплексных полупростых алгебр Ли. Г. Вейль исходит из «существенного пробела» теории Э. Картана, в которой с помощью образования (картановской) композиции предлагается общая конструкция всех неприводимых конечномерных комплексных представлений полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Он отмечает, что вывод о неприводимости такой композиции неприводимых представлений $\mathfrak{g}$ будет обоснован, если установить теорему о полной приводимости любого представления $\mathfrak{g}$. Исходной точкой доказательства Г. Вейля этой теоремы служат результаты Шура, который, построив с помощью интегрирования соответствующее скалярное произведение, установил полную приводимость представлений ортогональной и унитарной групп и вывел отсюда (применяя «унитарный трюк») полную приводимость голоморфных представлений комплексной ортогональной и унимодулярной группы (*Schur I.* S-Ber. Akad. Wiss. Berlin, 1924, S. 189—208, 297—321, 346—355). Шур в свою очередь развивал идею Гурвица, получившего с помощью интегрирования способ строить инварианты для унитарной и (ортогональной) группы и заметившего (это было первым примером «унитарного трюка»), что так получаются инварианты полной линейной группы (*Hurwitz A.*— Götting. Nachr., 1897, S. 71—90). Г. Вейль распространяет эти результаты на общий случай. Он развивает аппарат инвариантного интегрирования на любой компактной группе и с его помощью (построением соответствующего скалярного произведения) устанавливает теорему о полной приводимости представлений компактных групп. Идея применения этого результата к доказательству теоремы о полной приводимости представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (составляющая суть «унитарного трюка») основана на следующих, доказанных Г. Вейлем в общем контексте полупростых алгебр и групп Ли, теоремах: 1) $\mathfrak{g}$ обладает компактной вещественной формой $\mathfrak{g}_R$ (т. е. вещественной подалгеброй $\mathfrak{g}_R$, комплексификацией которой является $\mathfrak{g}$ и присоединенная группа G которой компактна); 2) фундаментальная группа группы G ко-

нечна, и, значит, универсальная накрывающая $\tilde{G}$ группы G тоже компактна. Поскольку всякое представление $\mathfrak{g}_R$ может быть «проинтегрировано по Ли» до представления G, теорема о полной приводимости для $\tilde{G}$ дает полную приводимость представлений $\mathfrak{g}_R$; полная приводимость представлений $\mathfrak{g}$ следует теперь из равенства $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_R \otimes_R C$. Как отмечает сам Г. Вейль (§ 5, гл. I), чисто алгебраическое доказательство теоремы о полной приводимости представлений комплексной полупростой алгебры Ли ему было не известно. Такое доказательство впервые было найдено в 1935 г. Казимиром и Ван дер Варденом (*Casimir H.*, *Waerden B. L. van der.*— Math. Ann., 1935, Bd. 111, S. 1—12); позже появились и другие доказательства: Брауэра (*Brauer R.*— Math. Ztschr., 1936, Bd. 41, S. 330—339) и Уайтхеда (*Whitehead J. H. C.*— Quart. J. Math. (2), 1937, vol. 8, p. 220—237). Это последнее доказательство было одним из основополагающих результатов в теории когомологий алгебр Ли (в нем устанавливалась тривиальность ненульмерных когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в конечномерном $\mathfrak{g}$-модуле).

Г. Вейль распространяет на общий случай не только упомянутый результат Шура о полной приводимости представлений ортогональной (и унимодулярной) групп, но и его результаты о характерах ортогональной (и унимодулярной) группы: формулы для характеров и соотношения ортогональности. С этой целью он снова применяет интегральный метод и доказывает знаменитую «формулу интегрирования Г. Вейля» (§ 2 гл. IV), которая сводит интегрирование функций классов по группе к интегрированию соответствующих функций по максимальному тору. Используя этот результат, он находит (столь же знаменитые) общие формулы для характеров конечномерных неприводимых представлений любой комплексной полупростой алгебры Ли и как следствие формулы для размерностей таких представлений. Чисто алгебраический способ доказательства этих формул был получен значительно позже Фрейденталем (*Freudenthal H.*— Indig. Math., 1954, vol. 16, p. 369—376; 487—492; 1956, vol. 18, p. 511—514).

Как доказательство, так и самый вид упомянутых формул предполагает рассмотрение важнейшего объекта, связанного с полупростой алгеброй Ли,— «группы Вейля» S симметрий системы корней, впервые введенной Г. Вейлем в настоящих исследованиях (§ 4 гл. IV). Отдельные элементы такой группы — перестановки S_α, определенные корнями α, их произведение, ассоциированное с набором фундаментальных корней (ныне известное как «преобразование Кокстера»),— рассматривались еще Киллингом и Э. Картаном. Но именно Г. Вейлю принадлежит заслуга рассмотрения всей группы S и ее геометрической реализации как конечной группы, порожденной отражениями в дуальном пространстве к подалгебре Картана. Он показывает, как с помощью S естественно получаются «многочисленные результаты (и частично в более простой форме)» структурной теории комплексных полупростых алгебр Ли, найденные Киллингом и Э. Картаном «при помощи сложных вычислений с определителями». В доказательстве конечности фундаментальной группы компактной полупростой группы Г. Вейль по существу пользуется фундаментальной областью соответствующей «аффинной группы Вейля».

Эти исследования Г. Вейля, обнаружившего замечательную связь теории полупростых алгебр Ли с группами, порожденными отражениями, стимулировали как дальнейшее систематическое изучение дискретных групп, порожденных отражениями в евклидовом пространстве (завершившееся их полной классификацией и абстрактной характеризацией в работах Кокстера (*Coxeter H. S. M.*— Ann. Math. (2), 1934, vol. 35, p. 588—621; J. London Math. Soc., 1935, vol. 10, p. 21—25), так и дальнейшее изучение связей таких групп с полупростыми алгебрами Ли. Шевалле (*Chevalley C.*— C. r. Acad. Sci., 1948, vol. 227, p. 1136—

1138) и Хариш-Чандра (*Harish-Chandra.*— Trans. Amer. Math. Soc., 1951, vol. 70, p. 28—96) дали позже априорное доказательство взаимно однозначной связи между кристаллографическими группами, порожденными отражениями, и полупростыми алгебрами Ли. Наше время демонстрирует поистине вездесущий характер групп Вейля и их обобщений: они являются важнейшим инструментом в современной теории бесконечномерных представлений полупростых алгебр Ли, в теории алгебраических групп над произвольными полями (в теории их представлений, в изучении геометрии их однородных пространств, см. комментарии к статье Ю. Б. Румера, Е. Теллера и Г. Вейля, вошедшей в это издание), в теории конечных групп (в контексте систем Титса), в прикладных вопросах (в теории квадратичных форм, теории автоморфных функций, теории кодирования, теории особенностей и др.).

С появлением чисто алгебраических доказательств теоремы о полной приводимости представлений полупростой алгебры Ли (над полем нулевой характеристики) фундаментальный результат Г. Вейля о полной приводимости был — чисто алгебраическими средствами — перенесен на любые полупростые алгебраические группы над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Это позволило в дальнейшем восстановить статус-кво алгебраических методов построения инвариантов: применение метода интегрирования (о котором Г. Вейль в § 5 гл. IV пишет, как об имеющем «значительное превосходство над чисто алгебраическими методами») оказалось равносильным применению так называемого оператора Рейнольдса, который есть просто проектор на алгебру инвариантов параллельно сумме всех остальных изотипических компонент. Такой подход позволил распространить этот метод построения инвариантов и доказательство Гильберта первой основной теоремы теории инвариантов на регулярные действия редуктивных групп на аффинных алгебраических многообразиях. При положительной характеристике основного поля теорема о полной приводимости представлений полупростой алгебраической группы оказалась неверной (согласно Нагате: *Nagata M.*— J. Math. Kyoto Univ., 1961, vol. 1, p. 87, такая теорема для связных групп верна лишь для торов). Однако, как доказал в 1975 г. Хабоуш (*Haboush W. J.*— Ann. Math., 1975, vol. 102, p. 67, 67—83), в характеристике $p > 0$ для полупростых групп имеется некоторый аналог свойства полной приводимости: для любой инвариантной прямой l в пространстве рационального представления имеется однородная инвариантная гиперповерхность Γ (не обязательно гиперплоскость!), для которой $l \cap \Gamma = \{0\}$ (это свойство было высказано в 1965 г. в качестве гипотезы Мамфордом). Указанного свойства оказалось достаточно для доказательства первой основной теоремы теории инвариантов (*Nagata M.*— J. Math. Kyoto Univ., 1964, vol. 3, p. 369—377).

Результаты Картана—Вейля о классификации неприводимых представлений с помощью старших весов полностью переносятся на случай связной полупростой алгебраической группы над алгебраически замкнутым полем любой характеристики p; однако для алгебр Ли при $p > 0$ это не так. Метод построения неприводимых представлений с помощью регулярного представления, о котором Г. Вейль кратко пишет в § 4 гл. IV, получил дальнейшее развитие; в 1927 г. Петером и Вейлем (*Weyl H.*, *Peter F.*— Math. Ann., 1927, Bd. 97, S. 737—755) была доказана теорема о полноте системы ортогональных функций, образуемых коэффициентами неэквивалентных неприводимых унитарных представлений компактной группы, доставляющая полный аналог разложения регулярного представления на неприводимые составляющие в теории конечных групп. Этот метод оказался важным в теории представлений полупростых алгебраических групп над любым алгебраически замкнутым полем: модели таких представлений получаются рассмотрением некоторых канонически определяемых подмодулей в алгебре регулярных функций на группе, правоинвариантных относительно максимальной унипотентной подгруппы (это можно интерпретировать как рассмотрение представлений в про-

странстве сечений соответствующих одномерных векторных расслоений над обобщенными многообразиями флагов — факторами полупростых групп по их борелевским подгруппам).

[1] (с. 101). Имеется в виду фактор-пространство и фактор-представление.

[2] (с. 101). Т. е. $\mathfrak{g}$ является прямой суммой $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$.

[3] (с. 101). Композиция по Гурвицу — это взятие тензорного произведения представлений.

[4] (с. 103). Т. е. алгебра Ли.

[5] (с. 105). Первое следует из перестановочности элементов H между собой.

[6] (с. 105). Например, из теоремы о полной приводимости.

[7] (с. 106). Т. е. преобразования из некоторого открытого плотного множества.

[8] (с. 106). Так как t «произвольно», то $\chi(t)$ есть функция на g.

[9] (с. 107). Т. е. задающиеся рациональными функциями.

[10] (с. 107). Такой найдется, так как e_0, e_1 — весовые векторы разных весов и, значит, линейно независимы.

[11] (с. 107). С точностью до пропорциональности.

[12] (с. 110). Ввиду неприводимости R и R^* состоят из линейных комбинаций векторов рядов (5) и (5*) соответственно (см. доказательство в той части текста, где помещена формула (5)).

[13] (с. 110). Рассмотренное отображение есть продолжение по линейности отображения, переводящего i-й вектор ряда (5) в i-й вектор ряда (5*) для всех i. Поскольку векторы этих рядов не являются, вообще говоря, линейно независимыми, нужна проверка корректности определения; она и сводится к доказательству указанного утверждения.

[14] (с. 110). Точнее, из линейных комбинаций таких векторов.

[15] (с. 110). Речь идет о представлениях во внешних степенях основного пространства.

[16] (с. 112). Г. Вейль повторяет здесь аргументацию Э. Картана. Прояснению точного смысла этой фразы и обсуждению имеющегося здесь пробела в рассуждениях Э. Картана посвящено следующее непосредственно ниже изложение. Это тот пункт, в котором естественно возникает вопрос о полной приводимости представлений.

[17] (с. 113). Т. е. с помощью взятия тензорного произведения $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ и выделения из него старшего неприводимого слагаемого.

[18] (с. 113). Т. е. симметризации.

[19] (с. 113). Нужно считать, что в клетках схемы $\{m\}$, указанной на чертеже, выписаны в первой строке слева направо числа 1, 2, . . ., 7, во второй — числа 8, . . ., 12 и т. д.

[20] (с. 115). Гурвиц, который первым рассматривал инвариантное интегрирование на ортогональной группе (он дает явное выражение, используя параметрическое представление углами Эйлера), отмечает (*Hurwitz A.*— Gotting. Nachr., 1897, S. 71—90), что методы Ли доставляют существование инвариантной меры на любой группе Ли.

[21] (с. 116). Для произвольных непрерывных групп эта теорема неверна: например, представление $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ аддитивной группы основного поля приводимо, но не вполне приводимо. В 1965 г. Нагата (*Nagata M.* Lectures on the Fourteenth problem of Hilbert. Tata Inst., 1965) показал, что в случае нулевой характеристики основного алгебраически замкнутого поля k свойство полной приводимости рациональных представлений является характеристическим для редуктивных алгебраических групп (т. е. групп с тривиальным унипотентным радикалом): это в точности те группы, каждое конечномерное рациональное (=голоморфное, если $k = C$) представление которых вполне приводимо (если char $k > 0$, это уже неверно).

[22] (с. 117). Имеется в виду экспоненциальное отображение.

[23] (с. 117). Это следует из того, что любая окрестность e порождает $\mathfrak{g}$.

[24] (с. 117). Г. Вейль не дает в этой работе ни точного определения «накрывающего пространства», ни доказательста однозначности. Детальное и строгое изложение дано Л. С. Понтрягиным в его книге «Непрерывные группы» (впервые конструкцию универсальной накрывающей, как, впрочем, и определение топологической и «непрерывной» группы, дал Шрейер: *Schreier O.*— Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1926, Bd. 4, S. 15—32; 1927, Bd. 5, S. 233—243).

[25] (с. 117). Этим пространством является вещественная прямая $\boldsymbol{R}$ (накрытие φ: $\boldsymbol{R} \to \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z| = 1\}$ задается формулой $\varphi(r) = e^{ri}$).

[26] (с. 117). Иначе говоря, описанный выше процесс продолжения (с помощью экспоненциального отображения) представления алгебры Ли до представления группы Ли (в данном случае — окружности) приводит к неоднозначному отображению.

[27] (с. 118). Речь идет о том, чтобы рассмотреть определенное представление $X \mapsto \lambda X$ одномерной комплексной алгебры Ли (многозначное отображение одномерной унитарной группы).

[28] (с. 118). Как в приводимом ниже доказательстве, так и в сходных по идее доказательствах односвязности унитарной, симплектической группы (§ 3, гл. II) и двусвязности ортогональной группы (§ 5, гл. II), а также, впрочем, и доказательстве конечности фундаментальной группы максимальной компактной подгруппы в комплексной полупростой группе (§ 2, гл. IV) Г. Вейль не входит в обсуждение топологических деталей (связанных, например, с «многообразием» сингулярных элементов: с расшифровкой самого термина «многообразие» и смыслом его размерности, с возможностью его обхода в процессе стягивания кривой). В своей книге «Классические группы, их инварианты и представления» (М.: Изд-во иностр. лит., 1947) Г. Вейль приводит другой, более простой вариант доказательства, принадлежащий Гуревичу (впрочем, и здесь он избегает топологических деталей). В строгой современной форме суть этого последнего доказательства (например, для ортогональной группы $SO(n)$) такова. Если v — ненулевой вектор n-мерного пространства, то его орбитой относительно $SO(n)$ является $(n-1)$-мерная сфера S^{n-1}, а стабилизатором — подгруппа, изоморфная $SO(n-1)$,— это геометрически очевидно. Этим, естественно, определяется расслоение $SO(n) \xrightarrow{SO(n-1)} S^{n-1}$. Его точная последовательность гомотопических групп дает ввиду $\pi_2(S^{n-1}) = \pi_1(S^{n-1}) = 0$ при $n \geqslant 4$ изоморфизм $\pi_1(SO(n)) \cong \pi_1(SO(n-1))$ при $n \geqslant 4$, т. е. $\pi_1(SO(n)) \simeq \pi_1(SO(3))$ при $n \geqslant 4$. Из представления вращения 3-мерного пространства с помощью единичных кватернионов непосредственно вытекает, что универсальная накрывающая двулистно накрывает $SO(3)$ и гомеоморфна S^3 (а $SO(3)$ гомеоморфна трехмерному проективному пространству). Поэтому $\pi_1(SO(3))$ — группа порядка 2.

[29] (с. 120). Пространство смежных классов $\mathfrak{g}_u$ по подгруппе диагональных матриц.

[30] (с. 122). Это утверждение общеизвестно под названием леммы Шура.

[31] (с. 122). Далее Г. Вейль применяет метод Шура.

[32] (с. 125). Тем самым p_s есть характер s-й симметрической степени простейшего представления группы $\mathfrak{g}_u$.

[33] (с. 125). Выражение $\chi(t)$ с помощью правой части формулы (40) иногда называют второй формулой Г. Вейля. Ввиду аддитивности (мультипликативности) характеров относительно взятия прямой суммы (тензорного произведения) представлений эта формула имеет интерпретацию в терминах спектрального синтеза представлений. А именно, она дает разложение (в кольце представлений группы $\mathfrak{g}_u$) неприводимого представления с заданной сиг-

натурой $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_n$ в линейную комбинацию тензорных произведений симметрических степеней простейшего представления (нужно лишь формально считать характеры символами самих представлений, см. примеч. 32, и при разложении определителя в сумму n мономов под произведением понимать тензорное произведение; см.: *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970).

[34] (с. 126). Это есть элемент групповой алгебры группы Σ.

[35] (с. 127). Т. е. в групповой алгебре группы Σ.

[36] (с. 127). Это следует из того, что E пропорционален проектору, и, значит, в некотором базисе его матрица имеет вид $\mathrm{diag}\,(\rho, \ldots, \rho, 0, \ldots, 0)$.

[37] (с. 128). И, значит, это число совпадает с числом всех неэквивалентных неприводимых представлений группы Σ.

[38] (с. 129). Такое распределение чисел называется стандартной таблицей Юнга. В 1954 г. Фрейм, Робинсон и Тролл нашли явную формулу для числа таких таблиц — так называемую формулу крюков (*Frame J. S., Robinson B. de, Thrall R. M.*— Canad. J. Math., 1954, vol. 6, p. 316—325). Впрочем, ее эквивалентные варианты были получены в работах Фробениуса, Мак-Магона, в вычислениях Шуберта, в книге Ходжа и Пидо по алгебраической геометрии (во втором томе).

[39] (с. 134). Для матриц с разными собственными значениями.

[40] (с. 134). Это связано с существованием непрерывного нетривиального гомоморфизма $t \mapsto \ln|t|$ мультипликативной группы основного поля в аддитивную: композиция его с гомоморфизмом $\mathfrak{g} \mapsto \det \mathfrak{g}$ дает гомоморфизм GL_n в аддитивную группу поля, а последняя не обладает свойством полной приводимости, см. примеч. 21. Если, однако, для комплексной полной линейной группы ограничиться лишь голоморфными представлениями, то свойство полной приводимости будет выполнено, см. примеч. 21 (отметим, что это же верно и для антиголоморфных представлений и что любые конечномерные непрерывные представления классических групп получаются некоторым стандартным способом из голоморфных и антиголоморфных; см.: *Наймарк М. А.* Теория представлений групп. М.: Наука, 1976).

[41] (с. 136). А точнее, замкнуто в унитарной группе и, следовательно, компактно.

[42] (с. 140). Ср. с леммой в начале § 4 гл. I.

[43] (с. 140). Имеется в виду картановская композиция; см. примеч. 17.

[44] (с. 142). Чтобы всякое представление c_u^0 индуцировалось представлением c_u.

[45] (с. 150). Неприводимое представление со старшим весом μ_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, есть представление в i-й внешней степени простейшего (т. е. тождественного $(2n+1)$-мерного).

[46] (с. 150). См. лемму в начале § 4 гл. I.

[47] (с. 150). Это так называемое спинорное представление. Глобальная его конструкция дана в статье Брауэра и Г. Вейля, вошедшей в это издание (с. 224—245).

[48] (с. 150). Это следует из того, что их (картановский) квадрат имеет целочисленные коэффициенты старшего веса (он есть удвоенный старший вес исходного представления) и потому является однозначным представлением. Следовательно, исходное представление было определено, быть может, с точностью до изменения знака у матриц-образов.

[49] (с. 151). Это так называемые полуспинорные представления. Их глобальную конструкцию см. в статье Брауэра и Г. Вейля, вошедшей в настоящее издание (с. 224—245).

[50] (с. 152). Точнее, гомотопна.

[51] (с. 152). Г. Вейль понимает здесь «абстрактную группу» как группу Ли, не заданную априори как матричная группа.

[52] (с. 158). Подгруппа, инвариантная подгруппа, фактор-группа инфинитезимальной

группы $\mathfrak{a}$ — это, в современной терминологии, подалгебра, идеал и соответственно фактор-алгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$.

[53] (с. 159). Тут речь идет уже не об алгебре Ли, а о группе Ли и о действии ее на себя левыми сдвигами.

[54] (с. 159). Т. е. имеет нетривиальное ядро.

[55] (с. 164). Пространство $\mathfrak{r}$ рассматривается как модуль относительно подалгебры, натянутой на E_α, $E_{-\alpha}$, H_α. Подпространство в $\mathfrak{r}$ с базисом $e_0, e_1, \ldots, e_g$ является его подмодулем, а $\mathfrak{r}'$ — фактор-модулем $\mathfrak{r}$ по этому подмодулю.

[56] (с. 166). См. формулу (3).

[57] (с. 168). Т. е. соответствующее корневое подпространство одномерно.

[58] (с. 170). В 1955 г. Шевалле (*Chevalley C.*— Tohoku Math. J., 1955, vol. 2, N 7, p. 14—66) показал, что при соответствующем выборе векторов e_α числа $N_{\alpha\beta}$ и $n_{\beta\alpha}$ в $[h_\alpha, e_\beta] = n_{\beta\alpha}e_\beta$ могут быть сделаны целыми. В этом случае система элементов e_α, $\alpha \neq 0$, и h_β, где β пробегает базис системы корней, образует базис алгебры Ли r над $\mathbf{Z}$, называемый базисом Шевалле (в общем случае, когда условия целочисленности не обязательно выполнены, такой базис часто называют базисом Картана—Вейля). Существование указанного базиса послужило для Шевалле отправной точкой определения так называемых групп Шевалле и перенесения в теорию конечных абстрактных простых групп методов теории полупростых групп и алгебр Ли; в частности, на этом пути Шевалле открыл новые конечные простые группы (те из конечных простых групп, которые его конструкция связывает с классическими простыми группами Ли и с исключительной группой Ли типа G_2, были известны еще со времен работ Диксона, остальные же особые простые группы Ли привели к новым конечным простым группам).

[59] (с. 170). Ныне она называется группой Вейля.

[60] (с. 172). Г. Вейль имеет в виду условие кристаллографичности (т. е. существования инвариантной решетки). Классификацию неприводимых конечных кристаллографических групп, порожденных отражениями, получил в 1927 г. Э. Картан (*Cartan E.*— Ann. di Math. (4), 1927, vol. 4, p. 209—256).

[61] (с. 186). См. по этому поводу дополнение на с. 195 (замечание 1955 г. в издании [I, 16]).

[62] (с. 193). Т. е. это число равно кратности вхождения в $\mathfrak{a}$ тривиального одномерного представления.

[63] (с. 196). Более простое доказательство дал Е. Штифель (Kristallographische Bestimmung der Charaktere der geschlossenen Lieschen Gruppen.— Comment. math. helv., 1944/45, vol. 17, теорема 4), установив, что подстановки из S, оставляющие инвариантным некоторый вектор $(l_1, \ldots, l_n)$, образуют порождаемую «отражениями» S_α подгруппу $(S)_l$ (замечание 1955 г. в издании [I, 16]).

В. Л. Попов

Электрон и гравитация

Значение этой работы Вейля в полной мере выявилось лишь недавно в связи с созданием калибровочных теорий элементарных частиц и их взаимодействий. Одна из первых попыток объединения электромагнитных и гравитационных взаимодействий была предпринята самим Вейлем в 1918 г. [II, 31; III, 17]. В его теории параллельный перенос касательного вектора к пространству-времени M приводил к изменению не только его направления, как в теории Эйнштейна, но и длины. В современной терминологии это означает переход от римановой связности на расслоении ортонормированных реперов над M к связности на главном расслое-

нии с конформной структурной группой $\simeq O(3,1) \times R^*_+$. Соответствующая форма связности имеет дополнительные компоненты, которые дают дифференциальную форму ω степени 1 на M. Вейль отождествил ее коэффициенты с потенциалами электромагнитного поля, а коэффициенты формы кривизны $F = d\omega$ с напряженностями. Вся теория инвариантна при этом, помимо обычных преобразований координат на M, также и относительно масштабных преобразований касательного расслоения $T(M)$, названных Вейлем впоследствии [II, 34] калибровочными преобразованиями. При параллельном переносе вектора e вдоль замкнутого пути γ его длина $l(e)$ меняется следующим образом:

$$l(e') = l(e)\exp\left(-\mathrm{const}\cdot\int_\gamma \omega\right). \qquad (1)$$

Используя вариационный принцип, с помощью которого Гильберт вывел уравнения общей теории относительности, Вейль получил уравнения поля, которые в случае «чистой» электродинамики имели вид

$$dF = 0, \qquad d(*F) = *J, \qquad (2)$$

где $*\colon \Lambda^2T \to \Lambda^2T$ — оператор Ходжа, связанный с метрикой Минковского на $T = T(M)$, и J — вектор тока. При этом F можно рассматривать как форму кривизны связности на главном R^*_+-расслоении, ассоциированном с Λ^4T. Связь закона сохранения электрического заряда $d(*J) = 0$ в стиле теоремы Нётер с калибровочной инвариантностью теории неоднократно обсуждалась впоследствии (см.: *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971, с. 16—18; *Окунь Л. Б.* Лептоны и кварки. М.: Наука, 1981, с. 167—168). Соотношение (1) приводит к зависимости длины линеек и хода часов от их предыстории, что дало основания для критики теории Эйнштейном (см. его полемику с Вейлем в приложении к [II, 31; III, 17, с. 525—527] и обсуждение в кн.: *Паули В.* Теория относительности. М.: Наука, 1983, с. 267—281, 303—304). После появления квантовой механики Вейль критически оценил свою теорию ([в [II, 93] и примечании 1955 г. к работе [II, 31] в издании [I, 16]). В свою очередь Эйнштейн, несмотря на отрицательное отношение к работам Вейля (и Гильберта), перешел затем к попыткам чисто геометрического построения единой теории поля, но вне всякой связи с квантовой механикой.

Первым, кто обнаружил связь теории Вейля с квантовыми представлениями, был Э. Шредингер. В 1922 г. он на ряде конкретных примеров показал (Ztschr. Phys., 1922, Bd. 12, S. 13—23; пер. в кн.: *Шредингер Э.* Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976, с. 161—171), что правила квантования Бора выделяют те орбиты γ, на которых длина вектора умножается согласно (1) на целую степень универсальной константы $\exp(\hbar c/e^2)$. В конце работы Шредингер обсуждает возможность ввести в показатель (1) мнимую единицу i. Как отметил Ф. Лондон (Ztschr. Phys., 1927, Bd. 42, S. 375—389), получаемое при этом выражение аналогично фазе соответствующей волны Де Бройля, а условие Шредингера совпадает с резонансным условием Де Бройля. Роль этого открытия Шредингера оживленно обсуждалась в последнее время историками науки в связи с истоками его работ 1926 г. по волновому варианту квантовой механики (*Raman V. V., Forman P.*— Hist. Stud. Phys. Sci., 1969, vol. 1, p. 291—314; *Э. Шредингер.* Избранные труды..., с. 371, 372, 409; *Hanle P.*— Isis, 1977, vol. 68, p. 606—609; *Wessels L.*— Stud. Hist. Philos. Sci., 1977, vol. 10, p. 311—340). В обзоре [II, 93; I, 17, т. 3, с. 344] 1931 г. Вейль писал: «Уже в то время, когда я выдвинул свою старую теорию, у меня было чувство, что калибровочный множитель должен иметь форму $e^{i\lambda}$. Естественно, однако, что я тогда не смог найти для этого никакого геометрического обоснования. Работы Шредингера и Лондона поддержали эту идею на пути все более

отчетливого осознания связи проблемы с квантовой теорией» (перевод В. П. Визгина) (см. также примечание в работе Шредингера на с. 162 русского перевода). Общение Шредингера с Вейлем в Цюрихе в середине 20-х годов сыграло свою роль в создании волновой механики (см.: *Шредингер Э.* Избранные труды..., с. 11, 127, 345, 371; *Wessels L.*— Ibid., p. 311; *Raman V.*, *Forman P.*— Ibid., p. 305).

Подлинную природу калибровочной (или, как раньше еще говорили, градиентной) инвариантности стало возможным понять лишь после появления в 1928 г. уравнения Дирака для электрона. В работе Вейля «Электрон и гравитация» роль метрического поля играет спинорная волновая функция $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ (наст. изд., с. 201), а вместо группы R_+^* появляется $U(1)$. Уже в [I, 8, с. 88] Вейль выдвигает требование локальной калибровочной инвариантности, т. е. инвариантности функции ψ относительно унитарных преобразований, «фаза» которых зависит от точки. Это с необходимостью приводит к введению векторного электромагнитного поля (наст. изд., с. 214), подчиняющегося уравнениям Максвелла и закону сохранения заряда (в той же форме, что и (2), но исходя из спинорной структуры на комплексификации касательного расслоения к M). Стараясь решить трудности с отрицательной энергией в теории Дирака, Вейль рассматривает уравнение Дирака для двухкомпонентных спиноров ψ в искривленном пространстве-времени M, считая, что масса электрона должна появляться как чисто гравитационный эффект (с. 217). Вейль заметил, что такое ограничение приводит к отказу от инвариантности теории относительно зеркальных отражений (с. 199). По этой причине уравнение Вейля рассматривалось как неприемлемое вплоть до 1957 г., когда было открыто несохранение четности в слабых взаимодействиях (см.: *Паули В.* Труды по квантовой теории. М.: Наука, 1975, с. 545). Теперь их использование для описания фермионов общепринято (масса может вводиться с помощью механизма спонтанного нарушения симметрии, см.: *Окунь Л. Б.* Указ. соч., с. 171—173). Возможность описания системы электрон—протон четырехкомпонентным спинором (с. 199), а также отбрасывание массового члена были критически проанализированы В. А. Фоком (Ztschr. Phys., 1929, Bd. 57, S. 261; пер. в кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 430—432), выдвинувшим независимо от Вейля принцип калибровочной инвариантности (в рамках пятимерной теории поля; Ztschr. Phys., 1926, Bd. 39, S. 226—232). Обсуждаемый Вейлем (с. 212, 213) вопрос об энергии гравитационного поля вызвал в дальнейшем многочисленные дискуссии и исследования (см.: *Фадеев Л. Д.* — Успехи физ. наук, 1982, т. 136, с. 435).

Для развития идеи калибровочной инвариантности важное значение имели работы Дирака (Proc. Roy. Soc. London A, 1931, vol. 133, p. 60; Phys. Rev., 1948, vol. 74 p. 817; пер. в кн.: Монополь Дирака. М.: Мир, 1970, с. 40—91), рассмотревшего вопрос о существовании одиночных магнитных полюсов P — монополей. Фаза волновой функции электрона, находящегося в поле такого заряда, становится из-за сингулярности потенциала неоднозначной функцией, что приводит к квантованности электрического e (и магнитного g) заряда ($eg = nhc/2$, $n = 0, \pm 1, \ldots$). Лишь в 70-х годах было осознано, что обнаруженная Дираком ситуация означает нетривиальность $U(1)$-расслоения, сечением которого является волновая функция (а целое число n совпадает с первым классом Чженя этого расслоения на двумерной сфере $S^2 \cong \boldsymbol{P}_1(C)$, окружающей P) (см.: *Wu T. T.*, *Yang C. N.*— Phys. Rev. D., 1975, vol. 12, p. 3845—3857). В то же время было понято, что потенциал электромагнитного поля является связностью на главном $U(1)$-расслоении (см.: Словарь соответствий физических и математических терминов на с. 3851 работы Ву и Янга). Другим источником этих представлений была статья Ааронова и Бома (*Aharonov Y.*, *Bohm R.*— Phys. Rev., 1959, vol. 115, p. 485), предложивших эксперимент, который наглядно показывал реальный физический смысл

и геометрическое значение векторного потенциала в квантовой механике (см. обсуждение этого вопроса Р. Фейнманом в: Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1966, вып. 6, а также: *Бернстейн Г.*, *Филиппс Э.*— Успехи физ. наук, 1982, т. 136, с. 665—692). Здесь нужно отметить, что само понятие связности в произвольном главном G-расслоении было введено Эресманом в 1950 г. (*Ehresmann C.* Colloque de topologie. Bruxelles, 1950, p. 29) после длительного периода изучения различных видов связностей в дифференциальной геометрии. Основное значение здесь имели работы Э. Картана и Г. Вейля (см. [II, 30, 43, 82, 161]).

Если вернуться к чисто физической линии развития, то наиболее существенный шаг в развитии идей Вейля был сделан Янгом и Миллсом в 1954 г. Они предложили модель сильных взаимодействий нуклонов, в которой введенная Гейзенбергом в 1932 г. изотопическая инвариантность обобщается на локальные калибровочные преобразования (*Yang C. N.*, *Mills R. L.*— Phys. Rev., 1954, vol. 96, p. 191; пер. в кн.: Элементарные частицы и компенсирующие поля. М.: Мир, 1964). На современном языке они рассмотрели вместо U (1)-расслоения векторное расслоение E над M со структурной группой $SU(2)$ (группой вращений в пространстве изотопического спина). Требование калибровочной инвариантности приводит, как и в работе Вейля, к введению «компенсирующего» векторного поля — переносчика сильного взаимодействия. Работа Янга и Миллса долгое время не принималась во внимание, поскольку из калибровочной инвариантности вытекает равенство нулю масс частиц, переносящих взаимодействие (неабелевых фотонов), что противоречит конечности радиуса сильных взаимодействий. Положение изменилось после 1964 г., когда был открыт механизм спонтанного нарушения симметрии, позволивший ввести в теорию непротиворечивым образом конечную массу частиц-переносчиков. Это удается сделать, если допустить калибровочную неинвариантность основного, вакуумного состояния, т. е. его вырожденность (ранее в теории поля рассматривались модели с единственным вакуумом). Первым эту идею, пришедшую из физики твердого тела, применил к описанию элементарных частиц В. Гейзенберг (см. его книгу: Введение в единую полевую теорию элементарных частиц: М.: Мир, 1968, гл. 7, 8). Дальнейшее развитие состояло в нахождении методов квантования классических теорий типа Янга—Миллса (с произвольной компактной группой Ли G) и доказательстве их перенормируемости (см. кн.: Квантовая теория калибровочных полей. М.: Мир, 1977; *Славнов А. А.*, *Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978). На основе этих общих методов были созданы единые теории электромагнитных и слабых взаимодействий ($G = SU(2) \times U(1)$, С. Вейнберг, А. Салам, Ш. Глэшоу, см. их Нобелевские лекции в: Успехи физ. наук, 1980, т. 132, вып. 2), а также сильных взаимодействий — квантовая хромодинамика ($G = SU(3)$). В 1983 г. были открыты промежуточные векторные бозоны — кванты поля Янга—Миллса, переносящего электрослабое взаимодействие (Успехи физ. наук, 1983, т. 141, с. 499—516). Более полно история вопроса изложена в: *Славнов А. А.*, *Фаддеев Л. Д.* Указ. соч., с. 231—235; *Mayer E.*— Bull. Amer. Math. Soc., 1983, vol. 9, p. 83—91; *Визгин В. П.*— История и методология естественных наук. Физика. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 163—183.

Теперь под (классической) теорией Янга—Миллса понимают следующее. Пусть G — компактная полупростая группа Ли, L — ее алгебра Ли и $P \to M$ — главное G-расслоение. Связность в P задается формой связности $\omega \in T^*(P) \otimes L$, а форма кривизны Ω равна $d\omega + {}^1/_2\,[\omega, \omega]$. Если $E = P \times_G L$ — присоединенное векторное расслоение, то форме Ω отвечает на M 2-форма R со значениями в E. Риманова метрика на M и структура алгебры Ли в L определяют скалярное произведение $\int_M \mathrm{tr}\,(\alpha \wedge \times \beta)$ для форм $\alpha, \beta \in \Lambda^{\cdot}(T^*) \otimes L$,

$*$ — оператор Ходжа. В этих терминах функция действия для калибровочного поля равна $\int\limits_M \operatorname{tr}(R \wedge * R)$, а уравнения Эйлера (обобщающие (2)) имеют вид $D(*R) = 0$, где D — внешняя ковариантная (длинная) производная. Выбор системы локальных тривиализаций расслоения P дает интерпретацию формы ω в виде калибровочных потенциалов, а формы R — калибровочных полей. Калибровочные преобразования в этой ситуации — это G-автоморфизмы расслоения P над M. Они образуют группу $\mathcal{G}$, и принцип калибровочной инвариантности означает, что физический смысл имеют лишь классы решений (связностей) уравнения поля относительно $\mathcal{G}$. Второй класс Чженя $c_2(P) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_M \operatorname{tr}(R \wedge R)$ (топологический заряд) играет в теории ту же роль, что и целое число n в теории монополя Дирака. Нетривиальные решения классических уравнений Янга—Миллса с $c_2(P) = \pm 1$ (инстантоны) были построены в случае, когда M — евклидова сфера S^4, а $G = SU(2)$ — А. А. Белавиным, А. М. Поляковым, А. С. Шварцем и Ю. С. Тюпкиным (Phys. Letts B, 1975, vol. 59, p. 85—87). В дальнейшем было найдено полное описание решений для любых c_2 (*Atiyah M. F.*, *Hitchin N. J.*, *Drinfield V. G.*, *Manin Yu. I.*— Phys. Letts A, 1978, vol. 65, p. 185—187). В его основе лежит редукция задачи к классификации двумерных векторных расслоений над $P_3(C)$, т. е. к задаче алгебраической геометрии (см.: *Atiyah M. F.* Geometry of Yang—Mills fields. Pisa, 1979). Надежды на применение этих результатов в квантовой теории основаны на известной в квантовой механике связи между решениями классических уравнений движения в мнимом времени и квазиклассическим приближением для вероятности туннельного перехода (сфера S^4 получается после перехода к мнимому времени в пространстве Минковского и его последующей компактификации, см.: *Вайнштейн А. И.* и др.— Успехи физ. наук, 1982, т. 136, с. 553—592; *Шварц А. С.*— В кн.: Современные проблемы математики, 1981, т. 17, с. 113—174).

Упомянутая связь между S^4 и M изучалась в теории твисторов Р. Пенроуза (см.: Твисторы и калибровочные поля. М.: Мир, 1983). Теория калибровочных полей и ее суперсимметричные обобщения считаются в настоящее время наиболее подходящим средством для единого описания всех фундаментальных взаимодействий в физике, включая гравитационное (см.: Введение в супергравитацию. М.: Мир, 1984; *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984). Эта программа является своеобразным возрождением единых теорий поля 20—30-х годов. Техника полей Янга—Миллса нашла также применения и в самой математике — описание когомологий пространства модулей векторных расслоений на алгебраических кривых (*Atiyah M. F.*, *Bott R.*— Proc. Roy. Soc. London A, 1982, vol. 308, p. 523—615) и классификация гладких односвязных многообразий размерности 4 с положительной формой пересечения (*Donaldson S.*— J. Different. Geom., 1983, vol. 18, p. 279—315).

А. Н. Паршин

Базис бинарных векторных инвариантов, применяемый в теории валентности

С математической точки зрения основной результат работы состоит в указании некоторого базиса в векторном пространстве инвариантов системы n векторов двумерного пространства, имеющих наперед заданные степени однородности по каждому из этих векторов. В совокупности все эти базисы дают базис (как векторного пространства) алгебры инвариан-

тов системы n векторов двумерного пространства. Эта алгебра имеет геометрическое происхождение: она является проективным координатным кольцом грассманова многообразия $G_{2,n}$ двумерных подпространств n-мерного линейного пространства относительно естественного проективного вложения $G_{2,n}$ с помощью плюккеровых координат; построенный же в статье базис состоит из мономов специального вида от плюккеровых координат. Тем самым, хотя авторы и строят указанный базис лишь с чисто прикладной целью (в теоретической физике) и не делают из его существования почти никаких математических выводов, их работа явилась одной из первых в области, получившей впоследствии интенсивное развитие: наличие специальных базисов в координатных кольцах ряда классических многообразий (грассмановых, шубертовых, детерминантальных и др.) оказалось тесно связанным с алгебраическими свойствами этих колец, геометрией этих многообразий и комбинаторикой групп Коксстера. Это развитие показало, что связь конструкций таких базисов с комбинаторикой (в той или иной форме), проявившаяся уже в настоящей статье, не является случайной и лежит в существе дела. Остановимся на этом подробнее.

Проективное координатное кольцо $A_{k,n}$ грассманова многообразия $G_{k,n}$ k-мерных подпространств n-мерного линейного пространства V (относительно вложения с помощью плюккеровых координат) отождествляется с кольцом, порожденным над основным полем K минорами максимального порядка $k \times n$-матрицы x_{ij}, где x_{ij} — переменные. Плюккерова координата $[i_1, \ldots, i_k]$ — это определитель $k \times k$-матрицы, находящейся в (x_{ij}) в столбцах с номерами $i_1 < \ldots < i_k$. Множество плюккеровых координат частично упорядочено: $[i_1, \ldots, i_k] \leqslant [j_1, \ldots, j_k]$, если $i_1 \leqslant j_1, \ldots, i_k \leqslant j_k$. Моном $p_1 \ldots p_s$ от плюккеровых координат $p_1, \ldots, p_s$ называется стандартным, если $p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_s$. В 1943 г. Ходж доказал (*Hodge W.*— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1943, vol. 39, p. 22—30), что стандартные мономы образуют базис линейного пространства $A_{k,n}$. Одна из идей, лежащих в основе доказательства этого факта,— по существу та же, что используют авторы настоящей работы в доказательстве первой части своей основной теоремы (хотя построенные ими мономы и не являются, вообще говоря, стандартными): пользуясь природой квадратичных соотношений между плюккеровыми координатами, для любой пары p и q этих координат, не удовлетворяющих соотношению $p \leqslant q$, можно выписать явно соотношение

$$pq = \sum_i a_i p_i q_i, \qquad \text{где } p_i < p, \quad a_i \in \mathbf{Z}; \tag{*}$$

с помощью индукции из (*) легко получается выражение любого монома через стандартные.

Доказательство линейной независимости стандартных мономов получается на основе непосредственных комбинаторно-алгебраических рассуждений (а не косвенным путем, как в настоящей работе). Этот подход позволил Игузе в 1954 г. дать характеристически свободное (т. е. без ограничений на характеристику основного поля K) доказательство первой основной теоремы теории инвариантов для системы k векторов n-мерного пространства (*Igusa J.*— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, vol. 40, p. 309—313); см. конец настоящей статьи, где говорится о такой возможности.

Формула (*) известна как «формула выпрямления для плюккеровых координат». Она была обобщена в 1974 г. Дюбиле, Ротой и Штейном на случай мономов от миноров матрицы (x_{ij}), имеющих не обязательно максимальный (и не обязательно одинаковый) порядок (*Doubillet P.*, *Rota G.-C.*, *Stein J.*— Stud. Appl. Math., 1974, vol. 53, p. 185—216). Последовательности номеров строк и столбцов миноров, входящих в такой моном, расположенные по убыванию длин строк, образуют две таблицы одинаковой формы, или, иначе, одну битаблицу — так называемую битаблицу Юнга (в случае мономов от плюккеровых координат обе таблицы

являются прямоугольными). Битаблица (и соответствующий ей моном) называется стандартной, если в каждой из составляющих ее двух таблиц строки (столбцы) являются возрастающими (соответственно неубывающими) последовательностями. Дюбиле, Рота и Штейн нашли формулу выпрямления, выражающую любой моном в виде явной $\mathbf{Z}$-линейной комбинации стандартных, и доказали, что стандартные мономы образуют базис (как линейного пространства) алгебры R полиномов от всех переменных x_{ij} с коэффициентами в K. Целочисленность коэффициентов в формуле выпрямления позволяет установить этот факт в характеристически свободной форме. Это в свою очередь позволило в 1976 г. Де Кончини и Прочези (*De Concini C.*, *Procesi C.*— Adv. Math., 1976, vol. 21, p. 330—354) получить основные факты классической теории инвариантов в характеристически свободной форме. Отметим, что идея стандартных таблиц возникла еще в работах Юнга в связи с описанием базисов для представлений симметрической и полной линейной группы.

Частичная упорядоченность плюккеровых координат имеет важную геометрическую интерпретацию: если сопоставить плюккеровой координате $[i_1, \ldots, i_k]$ клетку Шуберта $S_{i_1,\ldots,i_k}$, определенную набором $i_1, \ldots, i_k$ (т. е. множество тех k-мерных подпространств X в V, для которых последовательность чисел $\dim (X \cap V_i)$, где $0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V$ — фиксированный флаг в V, имеет скачки в точности в точках $i_1, \ldots, i_k$), то $[j_1, \ldots, j_k] \leqslant [i_1, \ldots \ldots, i_k]$ эквивалентно тому, что $S_{j_1,\ldots,j_k}$ лежит в замыкании $S_{i_1,\ldots,i_k}$. Таким образом, частично упорядоченное множество плюккеровых координат изоморфно частично упорядоченному по включению множеству многообразий Шуберта (т. е. замыканий клеток Шуберта) в $G_{k,n}$. В 1978 г. Шешадри показал (*Seshadri C. S.*— In: Ramanujan volume. Tata Inst., 1978, p. 207—239), что этот факт не является случайным, найдя естественное распространение теории стандартных мономов (и теоремы Ходжа) на более широкий, чем грассманианы, класс обобщенных флаговых многообразий вида G/P_α, где G — связная полупростая группа, а P_α — ее максимальная параболическая подгруппа, определенная таким простым корнем α, для которого соответствующий фундаментальный вес ω_α является минимальным (minuscule). Его основной результат таков: Пусть L_{ω_α} — одномерное векторное расслоение над G/P_α, определенное ω_α, и f — старший весовой вектор G-модуля $H^0 (G/P_\alpha, L_{\omega_\alpha})$. Пусть W^α — множество имеющих минимальную длину представителей левых смежных классов группы Вейля группы G по подгруппе, являющейся группой Вейля группы P_α. Это множество частично упорядочено относительно порядка Брюа (последний может быть определен разными способами, в том числе и геометрически: $w_1 \leqslant w_2$, если клетка Брюа в разложении Брюа G/P_α, определенная w_1, лежит в замыкании клетки Брюа, определенной w_2). Тогда для любого m стандартные мономы $(w_1 f) \ldots (w_m f)$, где $w_1 \leqslant \ldots \leqslant w_m$, образуют базис в $H^0 (G/P_\alpha, L_{\omega_\alpha}^{\otimes m})$. В 1979 г. Лакшмибаи, Музили и Шешадри распространили этот результат и на классические веса ω_α (*Lakshmibai V.*, *Musili C.*, *Seshadri C. S.*— Proc. Indian Acad. Sci., 1978/79).

Одним из мотивов исследований Ходжа было получение постулационной формулы для грассмановых многообразий. Его результаты показали, что полином Гильберта дает размерность проективного координатного кольца во всех степенях. Позже это привело к предположению о справедливости для грассмановых и шубертовых многообразий теорем об обращении в нуль соответствующих когомологий, а точнее, к гипотезе об арифметической коэн-маколеевости этих многообразий. В 1972—1973 гг. это свойство было доказано Хохстером, Лаксовом и Музили (*Hochster M.*— J. Algebra, 1973, vol. 25, p. 40—57; *Laksov D.*— Acta math., 1972, vol. 1291, p. 1—9; *Musili C.*— J. Indian Math. Soc., 1972, vol. 36, p. 143—171). Как

было вскоре осознано, истинный механизм их доказательств имел комбинаторную природу и основывался на двух ключевых фактах: 1) существовании базисов из стандартных мономов и 2) следующем специальном свойстве частично упорядоченного множества плюккеровых координат: геометрическая реализация определенного ими симполициального комплекса (вершины — координаты, симплексы — вполне упорядоченные множества) является клеткой. В 1976 г., положив оба эти факта в основу соответствующей аксиоматики, Рейснер нашел общую конструкцию, в абстрактной форме описывающую механизм связи упомянутых комбинаторно-геометрических и алгебраических свойств (*Reisner G.*— Adv. Math., 1976, vol. 21, p. 30—49): пусть Δ — конечный симплициальный комплекс, H — множество его вершин, а R — коммутативное кольцо с единицей; пусть $R[\Delta]$ — фактор кольца полиномов над R от переменных $\{x_h\}_{h\in H}$ по идеалу, порожденному мономами $x_{h_1}\ldots x_{h_s}$, где $\{h_1,\ldots,h_s\}$ — не симплекс; пусть X_Δ — геометрическая реализация Δ. Тогда, если R — кольцо Коэна—Мэколея, то $R[\Delta]$ — кольцо Коэна—Мэколея в точности тогда, когда $H_i(X_\Delta, X_\Delta - x, R) = 0$ для любого $i = 0, \ldots, \dim \Delta - 1$ и любой точки $x \in X_\Delta$. В 1980 г. Де Кончини, Эйзенбуд и Прочези, развивая аксиоматическую точку зрения на применение техники стандартных мономов в алгебре, определили еще более общий, чем $R[\Delta]$, класс колец, связанных с симплициальными комплексами,— так называемые алгебры Ходжа (*De Concini, C., Procesi C.*— Astérisque, 1981, N 87—88, p. 79—83). С каждой такой алгеброй A связана алгебра Рейснера $R[\Delta]$, являющаяся ее плоской деформацией, и если $R[\Delta]$ — алгебра Коэна—Мэколея, то и A тоже. К настоящему времени описанный арсенал средств позволил — по существу в едином контексте теории стандартных мономов — установить коэн-мэколеевость детерминантальных многообразий, пфаффианов, обобщенных флаговых многообразий и их шубертовых подмногообразий и других классических многообразий. Эти результаты тесно связаны с замечательными комбинаторно-геометрическими свойствами геометрических реализаций соответствующих частично упорядоченных множеств.

[1] (с. 219). Равенство (2) есть простейший случай формулы выпрямления для плюккеровых координат. Оно получается, если рассмотреть разложение Лапласа по первым двум строкам (нулевого) определителя 4 × 4-матрицы $\begin{pmatrix} x & y & z & l \\ x & y & z & l \end{pmatrix}$ (тут x, y, z, l рассматриваются как столбцы).

[2] (с. 221). Если одночлены без пересечений заменить на стандартные мономы, то это согласно формуле выпрямления также верно и служит основой характеристически свободного подхода к доказательству первой основной теоремы.

[3] (с. 221). Речь идет о тензорном произведении представлений.

В. Л. Попов

Спиноры размерности n

Статья посвящена явному построению спинорного представления ортогональной группы и изучению ряда его свойств. Само существование этого представления было открыто в 1913 г. Э. Картаном (*Cartan E.*— Bull. Soc. math. France, 1913, vol. 41, p. 53) в контексте общей теории конечномерных представлений полупростых алгебр Ли; он же получил его инфинитезимальное описание (т. е. описание преобразований спиноров под действием элементов ортогональной алгебры Ли; см. § 4 гл. II работы Г. Вейля «Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований», включенной в настоящее издание). Интерес к явному построению этого представления с глобальной точки зрения,

т. е. как (двузначного) представления ортогональной группы, не в последнюю очередь объясняется его особым положением в теории представлений этой группы: конструкция спинорных представлений вместе с представлениями во внешних степенях простейшего (тождественного) представления доставляет явно описанный набор фундаментальных представлений специальной ортогональной группы (из которых все голоморфные неприводимые конечномерные представления получаются с помощью взятия тензорных произведений и выделения старших — картановских — компонент).

Построение спинорного представления, осуществленное в настоящей работе, является обобщением конструкции представления ортогональной группы 4-мерного пространства, предложенной в 1927 г. П. Дираком (*Dirac P. A. M.*— Proc. Roy. Soc. London A, 1927, vol. 117, p. 610; 1928, vol. 118, p. 351) в его работе об электроне; в этой работе векторы пространства представления описывали вращение — спин (spin) — электрона в квантовой теории. Отсюда и происхождение названия в общем случае: как самого представления, так и векторов пространства представления (спиноров). Основой конструкции спинорного представления в общем случае является алгебра П (см. с. 226), известная в настоящее время как алгебра Клиффорда. Она была открыта еще в 1876 г. Клиффордом (*Clifford W. K.* Mathematical Papers. L., 1882), который в свою очередь получил и исследовал ее, обобщая конструкцию кватернионов, найденную в 1853 г. Гамильтоном (последний пришел к кватернионам, изучая ортогональную группу трехмерного пространства). На построения Клиффорда оказала также явное влияние конструкция алгебр Грассмана. В действительности идея подхода к конструкции спинорного представления прослеживается уже у Р. Липшица, который независимо открыл алгебры П четырьмя годами позже Клиффорда (*Lipschitz R.* Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Bonn, 1886) и показал, что ортогональные преобразования n-мерного пространства V представляются преобразованиями $x \mapsto \alpha x \alpha^{-1}$, $x \in V$, в этих алгебрах (α — соответствующий обратимый элемент алгебры П). Эти представления есть, в современной терминологии, векторные представления спинорной группы; для перехода к спинорным представлениям следует заменить условие $x \in V$ на $x \in \Pi_e$, где Π_e — подалгебра «четных величин» в П (см. с. 232). Более того, по свидетельству Э. Картана и Шевалле (в их лекциях о спинорах, см. ниже), Липшицем же было получено и само понятие спинора (но не его название).

После появления настоящей работы тема спиноров (и связанных с ними конструкций) быстро и прочно вошла в математический обиход и стала предметом отдельных исследований. Специально этой теме посвящены лекции Э. Картана (*Cartan E.* Leçons sur la théorie des spineurs. P., 1938). В 1937 г. Витт (*Witt H.*— J. reine und angew. Math., 1937, Bd. 176, S. 31) акцентирует внимание на чисто алгебраической природе конструкций, связанных с алгеброй Клиффорда, и применяет их к изучению квадратичных форм над произвольными полями. Это главное направление теории алгебр Клиффорда — алгебраическая теория спиноров — получило свое дальнейшее развитие в 1954 г. в лекциях Шевалле (*Chevalley C.* The algebraic theory of spinors. N. Y.: Columbia Univ. Press, 1954). Как выяснилось в процессе этого развития, помимо рассмотренной в настоящей статье конструкции спинорных представлений, алгебры Клиффорда (а точнее, группы их обратимых элементов) доставляют явную конструкцию еще одного важнейшего объекта, связанного с ортогональной группой,— ее универсальной накрывающей, т. е. спинорной группы. Предложенная в настоящей статье конструкция спинорного представления определяет настоящее (а не двузначное) представление именно этой, а не ортогональной, группы. Собственно, с точки зрения требований на основное поле, само это представление оказалось удобнее определять не с помощью явной матричной реализации $\Delta : o \mapsto S(o)$, как в настоящей статье (см. формулу (13)), а прямо

в духе Липшица, через действие группы обратимых элементов П на самой алгебре П. Следует отметить, что идея описания самой ортогональной группы с помощью алгебры Клиффорда также прослеживается у Липшица, который применил эти алгебры для задания параметрического представления ортогонального преобразования n переменных с помощью кватернионов (его результаты обобщали результаты, полученные Кэли для $n = 3$ в 1845 г. и для $n = 4$ в 1855 г.). В настоящее время детально разработанная теория алгебр Клиффорда со всеми относящимися сюда конструкциями и понятиями — группы Клиффорда, спинорной нормы, спинорной группы, векторного, спинорного и полуспинорного представлений, спиноров, экспоненциалов, чистых спиноров и их параметрических представлений, спинорных инвариантов и т. п.— обрела свое естественное место в общей теории квадратичных форм над произвольными полями.

Дальнейшее развитие теории спиноров — вплоть до последнего времени — осуществлялось в направлении их классификации, т. е.: 1) описания разложения пространства X спиноров (полуспиноров, если n четно) на орбиты спинорной группы Spin (n) (с помощью явного указания представителей этих орбит) и 2) описания стабилизаторов точек этих орбит относительно Spin (n). Э. Картан и Шевалле по существу тщательно исследовали лишь одну орбиту (в частности, описали ее стабилизатор) — орбиту «чистых спиноров». В 1970 г. Игуза (*Igusa J.*— Amer. J. Math., 1970, vol. 92, N 4, p. 997—1028) описал (при любом n) стабилизаторы ряда других орбит специального вида и, используя эти результаты, получил классификацию спиноров для всех $n \leqslant 12$. В 1978 г. такая классификация была получена для $n = 13$ Гатти и Винибержи (*Gatti V.*, *Viniberghi E.*— Adv. Math., 1978, vol. 30, N 2, p. 137—155) и для $n = 14$ В. Л. Поповым (Тр. Моск. мат. о-ва, 1978, т. 37, с. 173—217), а в 1982 г.— для $n = 16$ Л. В. Антоняном и А. Г. Элашвили (Тр. Тбил. мат. ин-та, 1982, т. 52, с. 5—22). Согласно этим результатам при $n = 4$, 5, 6 и 10 в $X - \{0\}$ имеется соответственно 1, 1, 1 и 2 орбиты. При $n = 7, 8, 9, 11, 12$ и 14 алгебра Spin (n)-инвариантных полиномов на X имеет одну однородную образующую f соответственно степени 2, 2, 2, 4, 4 и 8, причем все гиперповерхности $f^{-1}(a)$, $a \neq 0$, являются орбитами, изоморфными между собой, а $f^{-1}(0)$ (это так называемое множество нильпотентных спиноров, характеризующихся тем, что в замыкании их орбиты лежит 0) состоит, помимо 0, соответственно еще из 1, 1, 2, 4, 3 и 8 орбит. При $n = 13$ алгебра инвариантов порождена двумя однородными полиномами степеней 4 и 8, с помощью многообразий уровня которых естественно выделяются семейства изоморфных орбит: одно 2-параметрическое, состоящее из замкнутых орбит, четыре 1-параметрических из незамкнутых орбит и два 1-параметрических — из замкнутых. Нильпотентные ненулевые спиноры разбиваются на 13 орбит. Наиболее сложен случай $n = 16$: алгебра инвариантов имеет 8 однородных образующих степеней 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24 и 30; число семейств, в которые естественно объединяются орбиты, весьма велико, и их взаиморасположение весьма сложно; например, имеется ровно 115 орбит ненулевых нильпотентных спиноров. Почти все указанные случаи классификации спиноров находятся в тесной связи с рядом конструкций, использующих особые простые алгебры Ли: при $n \leqslant 12$ Игуза отмечает связь с алгеброй E_7 посредством теории йордановых алгебр, при $n = 14$ и 16 имеется связь с алгеброй E_8 посредством теории так называемых θ-групп (см.: *Винберг Э. Б.*— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, т. 40, с. 488—526). Ни при каком $n \geqslant 17$ классификация спиноров до сих пор (1983 г.) не известна: поскольку при $n \geqslant 17$ имеются семейства орбит нильпотентных спиноров, зависящие от непрерывных параметров, такая классификация, если и возможна, то принципиально более сложна, чем при $n \leqslant 16$.

[1] (с. 225). Тензорное произведение.

[2] (с. 225). Говоря строго, это означает, что речь идет о представлении универсальной накрывающей группы $\mathfrak{d}_n$. Однако авторы нигде не используют этого понятия (которым, впрочем, Г. Вейль владел с 1913 г., со времени обработки его курса по римановым поверхностям) и не дают конструкции спинорной группы. Смысл, который вкладывается в это понятие двузначности, объяснен в § 4: образ $S(o)$ элемента o при представлении Δ определен с точностью до знака.

[3] (с. 226). Т. е. $\sigma(o) = \det o$.

[4] (с. 226). Т. е. коммутирует с преобразованиями из $\mathfrak{d}_n^+$.

[5] (с. 228). $1'$, P и Q — так называемые матрицы Паули. Алгебра, порожденная над R матрицами 1, $i1'$, iP, iQ, изоморфна алгебре кватернионов.

[6] (с. 228). Речь идет о кронекеровском произведении матриц.

[7] (с. 229). В самом деле, поскольку ортогональная группа сохраняет форму $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, то, сделав в (4) замену с помощью ортогональной матрицы o, получим $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* x_i\right)^2$, где $p_i^* = \sum_{k=1}^{n} o(ki)\, p_k$. Поэтому для p_i^* выполнены те же соотношения (5), что и для p_i, т. е. $p_i^2 = 1$ и $p_k^* p_i^* = -p_i^* p_k^*$ при $k \neq i$. Утверждение теперь следует из того, что: 1) формулы (9) определяют представление алгебры П и 2) при этом представлении p_i^* отображается в P_i^* ввиду (12).

[8] (с. 229). Это отображение $x \mapsto x^*$ является автоморфизмом алгебры П (поскольку умножение в П «ортогонально инвариантно», т. е. коммутирует с ортогональными преобразованиями, см. конец § 2).

[9] (с. 230). Это следует из того, что $x \mapsto x^*$, будучи автоморфизмом алгебры П, определяет с помощью изоморфизма $x \mapsto X$ автоморфизм полной матричной алгебры. Последний же является внутренним (см. дополнение в § 11).

[10] (с. 232). Т. е. после факторизации П по идеалу, порожденному $1 - u$.

[11] (с. 239). Это следствие общего факта. А именно, для любой $n \times n$-матрицы C и любых двух наборов чисел $i_1 < \ldots < i_k$ и $j_1 < \ldots < j_k$, взятых из $1, \ldots, n$, обозначим через $C[i_1, \ldots, i_k \mid j_1, \ldots, j_k]$ (соответственно $C(i_1, \ldots, i_k \mid j_1, \ldots, j_k)$) подматрицу в C, стоящую на пересечении строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$ (соответственно строк с номерами, отличными от $i_1, \ldots, i_k$, и столбцов с номерами, отличными от $j_1, \ldots, j_k$). Пусть A — любая невырожденная $n \times n$-матрица, а B — матрица из алгебраических дополнений ее элементов, т. е. $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i \mid j)$ (отметим, что $A^{-1} = (\det A)^{-1} B^{\mathrm{T}}$). Тогда для любых наборов индексов $i_1 < \ldots < i_k$ и $j_1 < \ldots < j_k$, взятых из $1, \ldots, n$, имеет место следующее равенство:

$$(\det A)^{k-1} \det A(i_1, \ldots, i_k \mid j_1, \ldots, j_k) = (-1)^{(i_1+j_1)+\ldots+(i_k+j_k)} \det B[i_1, \ldots, i_k \mid j_1, \ldots, j_k]. \qquad (*)$$

Пусть теперь $A = (o(ik))$ лежит в группе Лоренца $\mathfrak{d}_n$, сохраняющей форму (33), т. е. $A^{\mathrm{T}} J A = J$, где $J = \begin{pmatrix} -1_t & 0 \\ 0 & 1_{n-t} \end{pmatrix}$, 1_s — единичная $s \times s$-матрица. Тогда $(\det A)^{-1} B^{\mathrm{T}} = A^{-1} = J A^{\mathrm{T}} J$, т. е. $B = (\det A)\, JAJ$. Если записать A в блочном виде: $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$,

$A_1 \in GL_t$, то отсюда следует, что $B = (\det A)\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ -A_3 & A_4 \end{pmatrix}$. Равенство (*) при $k = t$ и $i_s = j_s = s$ $\forall s = 1, \ldots, t$, сводится поэтому в рассматриваемом случае к такому: $\det A_4 = \det A \det A_1$. Это и есть нужное соотношение (ибо $\det A_1 = \Omega$ — временной, а $\det A_4$ — пространственный миноры матрицы A).

[12] (с. 239). Ибо $AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} (v_1'v_1') & \ldots & (v_1'v_t') \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (v_t'v_1') & \ldots & (v_t'v_t') \end{pmatrix}$ и $\det A = \Omega$ для $A = \begin{pmatrix} o(11) & \ldots & o(1t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ o(t1) & \ldots & o(tt) \end{pmatrix}$.

[13] (с. 241). Имеется в виду, что указанные миноры как функции на группе линейно независимы. То, что отсюда вытекает неприводимость Γ_f, устанавливается следующим образом. Считая $x_1, \ldots, x_n$ базисом основного пространства, получаем, что всевозможные векторы $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_f}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_f \leqslant n$, являются базисом Γ_f. Под действием ортогонального преобразования o вектор $x = \sum_{i_1 < \ldots < i_f} \xi_{i_1 \ldots i_f} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_f} \in \Gamma_f$ переходит (в обозначениях примеч. 11) в $o(x) = \sum_{i_1 < \ldots < i_f} \sum_{j_1 < \ldots < j_f} \xi_{j_1 \ldots j_f} \det o\,[j_1, \ldots, j_f \mid i_1, \ldots, i_f]\, x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_f}$. Допустим, что Γ_f неприводимо и L — собственное инвариантное подпространство в Γ_f. Пусть l — ненулевая линейная форма, обращающаяся в 0 на L. Тогда для любого $x \in L$ и любого преобразования o имеет место ввиду $o(x) \in L$ тождество

$$o = \sum_{i_1 < \ldots < i_f} \sum_{j_1 < \ldots < j_f} l(x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_f})\, \xi_{j_1 \ldots j_f} \det o\,[j_1, \ldots, j_f \mid i_1, \ldots, i_f].$$

Так как $l \neq 0$ и $L \neq 0$, то можно выбрать x так, что для некоторых наборов $i_1 < \ldots < i_f$ и $j_1 < \ldots < j_f$ будет $l(x_{i_1} \wedge \ldots x_{i_f})\, \xi_{j_1 \ldots j_f} \neq 0$. Зафиксировав этот x, получаем из указанного тождества нетривиальную линейную комбинацию миноров $\det o\,[j_1, \ldots, j_f \mid i_1, \ldots, i_f]$.

[14] (с. 242). Поскольку A ортогональна, то в обозначениях примеч. 11 $B = (\det A)\, A$. Поэтому указанное соотношение есть частный случай равенства (*) из примеч. 11, получающийся при $k = \nu$ и $i_s = j_s = s$ $\forall s = 1, \ldots, \nu$ (надо учесть, что $\det A = 1$ ввиду $A \in \delta_n^+$).

[15] (с. 244). Доказательство состоит в следующем. Ясно, что кратность вхождения Γ_0 в $\Gamma \otimes \check{\Gamma}_1$ (т. е. размерность пространства неподвижных векторов) та же, что и в контрагредиентное к $\Gamma \otimes \check{\Gamma}_1$ представление $(\Gamma \otimes \check{\Gamma})^{\vee}$. Неподвижные векторы в $(\Gamma \otimes \check{\Gamma}_1)^{\vee}$ — это инвариантные линейные формы на $\Gamma \otimes \check{\Gamma}_1$. Ввиду универсального свойства тензорных произведений имеется естественный изоморфизм векторного пространства таких форм с векторным пространством B инвариантных билинейных форм на $\Gamma \oplus \check{\Gamma}_1$. Всякая $b \in B$, $b \neq 0$ осуществляет невырожденное спаривание Γ и $\check{\Gamma}_1$, ибо пространства $\{u \in \check{\Gamma}_1 \mid b(v, u) = 0 \ \forall v \in \Gamma\}$ и $\{v \in \Gamma \mid b(v, u) = 0 \ \forall u \in \check{\Gamma}_1\}$, будучи инвариантными, являются ненулевыми ввиду неприводимости Γ и $\check{\Gamma}_1$. Таким образом, если $B \neq 0$, то Γ и $\check{\Gamma}_1$ взаимно контрагредиентны, т. е. Γ и $\Gamma_1 = (\check{\Gamma}_1)^{\vee}$ изоморфны. Очевидно, верно и обратное. Наконец, если b_1 и $b_2 \in B$ — непропорциональные ненулевые элементы, то при надлежащем выборе константы λ форма $b_1 + \lambda b_2 \in B$ будет ненулевой и вырожденной, что, по доказанному, невозможно. Значит, $\dim B \leqslant 1$.

В. Л. Попов

Об объеме труб

Работа Г. Вейля об объеме труб оказала влияние на несколько отделов математики: с фактически содержащейся в ней[1] многомерной формулы Гаусса—Бонне начинается бурное развитие дифференциально-геометрических аспектов теории характеристических классов, на ее основе получены фундаментальные результаты в теории «многомерных вариаций» А. Г. Витушкина и в интегральной геометрии; комплексные аналоги теорем Вейля об объемах труб непосредственно приводят к классам Чженя и в последнее время эффективно используются при исследовании особенностей аналитических многообразий (Гриффитс).

А. Связь теории объема труб с формулой Гаусса—Бонне состоит в следующем. Коэффициент при старшей степени радиуса в формуле для объема трубы — топологический инвариант. Его вычисление приводит к формуле Гаусса—Бонне, выражающей интеграл гауссовой кривизны риманова компактного многообразия через его эйлерову характеристику. Таким образом, формула, связывающая две внутренние, не зависящие от вложения характеристики риманова многообразия, была получена именно из анализа вложения в евклидово пространство — поучительный пример того, насколько выход за рамки аксиоматической теории и привлечение внешних по отношению к рассматриваемой задаче структур может облегчать ее решение.

Ход вычислений следующий:

1) Для гиперповерхности в евклидовом пространстве формула Гаусса—Бонне доказывается легко (Х. Хопф). Действительно, интеграл полной (гауссовой) кривизны равен произведению объема единичной сферы на степень гауссова отображения гиперповерхности в эту сферу как интеграл от якобиана гауссова отображения. Степень же гауссова отображения равна половине эйлеровой характеристики гиперповерхности. Последнее сразу следует из теории Морса. [Ограничим на гиперповерхность линейную функцию общего положения. Точки ее максимума и минимума на единичной сфере назовем северным и южным полюсами. Степень гауссова отображения равна числу прообразов северного (или южного) полюса, сосчитанному с учетом ориентаций. Вклад прообраза южного полюса равен $(-1)^i$, где i — индекс Морса критической точки функции на гиперповерхности. Для каждого прообраза северного полюса вклад такой же, если размерность гиперповерхности четна, и противоположный в противном случае. Сумма индексов всех критических точек равна эйлеровой характеристике гиперповерхности (по формуле Эйлера—Пуанкаре). Поэтому степень гауссова отображения равна половине эйлеровой характеристики как для четномерной гиперповерхности, так и для нечетномерной (в последнем случае эйлерова характеристика нулевая).]

2) Формула объема труб позволяет перенести формулу Гаусса—Бонне с гиперповерхностей на подмногообразия любой коразмерности в евклидовом пространстве. Для дальнейшего удобно считать коразмерность нечетной (этого можно добиться, умножив, если нужно, объемлющее пространство на прямую).

Край трубчатой окрестности достаточно малого радиуса — гладкая гиперповерхность. Коэффициенты при старших степенях радиуса трубы в разложении объема трубчатой окрестности исходного многообразия и гиперповерхности различаются лишь множителем 2

[1] Эта статья «содержит уже в основном формулу Гаусса—Бонне для подмногообразий евклидова пространства» [IV, 4]. Подробный вывод многомерной формулы Гаусса—Бонне, основанный на работе Г. Вейля об объеме труб, см. в статье: *Allendoerfer G. B.*, *Weil A.* The Gauss—Bonnet theorem for Rismannian polyedr.— Trans. Amer. Math. Soc., 1943, vol. 53, N 1, p. 101—129.

(здесь использована нечетность коразмерности). По формуле Вейля указанный коэффициент для исходного подмногообразия равен, с точностью до постоянного множителя, интегралу от гауссовой кривизны подмногообразия. Следовательно, интеграл от гауссовой кривизны подмногообразия евклидова пространства пропорционален эйлеровой характеристике края трубчатой окрестности, а значит, и эйлеровой характеристике самого подмногообразия: χ (края) $= 2\,\chi$ (подмногообразия), так как коразмерность m подмногообразия нечетна, и, значит, $\chi\,(S^{m-1}) = 2$.

3) Чтобы доказать теперь формулу Гаусса—Бонне для любого компактного риманова многообразия, достаточно изометрически вложить подмногообразие в евклидово пространство достаточно высокой размерности, что всегда возможно по теореме Нэша. Можно обойтись и без ссылки на теорему Нэша: для этого достаточно проверить, что интеграл от гауссовой кривизны является, как говорят физики, топологическим зарядом, т. е. не меняется при малых вариациях метрики. Последнее достигается применением формулы Стокса к надлежащим образом записанной производной от интеграла по параметру.

Б. Связь теории объема труб с вариациями и интегральной геометрией ясна уже из классической теоремы Бюффона—Крофтона, в которой появляются коэффициенты формулы Вейля. В простейшем случае выпуклого тела теорема такова: коэффициент размерности (длина)^p в формуле для объема окрестности равен объему ортогональной проекции тела на p-мерное пространство, усредненному по многообразию Грассмана всех p-мерных подпространств линейного пространства (с точностью до множителя, зависящего лишь от размерностей).

Есть два обобщения этой теоремы на невыпуклый случай. Первое построено А. Г. Витушкиным в его теории многомерных вариаций [2]. При определении вариации размерности p объем проекции усредняется с учетом кратностей без учета ориентаций. Полученные характеристики подмногообразий Витушкин искусно применил к 13-й проблеме Гильберта для доказательства непредставимости функций суперпозициями. Связь вариаций с коэффициентами формулы объема трубы заключается в оценках вариаций сверху через интегралы от модулей кривизн (см.: *Леонтович А. М., Мельников М. С.* Об ограниченности вариаций многообразия.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1965, т. 14, с. 306—337). В последнее время вариации многообразий, связанных с критическими точками гладких функций и отображений, используются в теории особенностей (см.: *Ландис Е. Е.* Оценки вариаций множеств меньших значений гладкой функции в окрестности точки минимума.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1980, № 3, 24—28; *Арнольд В. И.* Некоторые нерешенные задачи теории особенностей.— Тр. семинара С. Л. Соболева (Новосибирск), 1976, № 1, с. 5—15).

В интегральной геометрии вместо интеграла от кратности пересечения усредняется интеграл от эйлеровой характеристики прообраза точки при проектировании. Иными словами, рассматривается интеграл от эйлеровой характеристики пересечения многообразия со всеми аффинными плоскостями фиксированной размерности в евклидовом пространстве (по естественной мере на многообразии всех таких плоскостей).

Этот интеграл оказывается пропорциональным коэффициенту формулы Вейля, имеющему такую же размерность, уже независимо от выпуклости. Множитель пропорциональности, как всегда, зависит лишь от размерностей.

В. Связь теории объемов труб с классами Чженя состоит в выражении коэффициентов многочлена, равного объему трубчатой окрестности комплексного аналитического много-

---

[2] *Витушкин А. Г.* О многомерных вариациях. М.: Гостехтеориздат, 1955.

образия, через форму Чженя кэлеровой связности подмногообразия и подходящую степень кэлеровой симплектической структуры. Точнее, обозначим через $\tau_r(M)$ объединение шаров малого радиуса r в нормальных плоскостях многообразия M, лежащего в комплексном пространстве C^N, снабженном обычной эрмитовой метрикой (если r не мало, нужно брать точки трубчатой окрестности с кратностями). Для комплексного многообразия размерности m и коразмерности n формула объема труб имеет вид

$$\operatorname{Vol}\tau_r(M)=\sum_{k=0}^{m} c_{k,\,m,\,n}\, r^{2(n+k)}\,\mu_k(M),$$

где

$$\mu_k(M)=\int_M c_k(\Omega_M)\wedge\varphi^{m-k}.$$

Здесь φ — стандартная кэлерова 2-форма, Ω_M — форма кривизны кэлеровой связности, c_k — формы Чженя, определяемые разложением

$$\det\left(\lambda E+\frac{i}{2\pi}\Omega\right)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^{m-k}c_k(\Omega).$$

Аналогичная формула имеет место и в проективном пространстве. Для компактного неособого (следовательно, алгебраического) подмногообразия комплексного проективного пространства все коэффициенты имеют топологическую природу и выражаются через классы Чженя $c_k(M)\in H^{2k}(M)$ и класс гиперплоского сечения $\varphi\in H^2(M)$. В частности, топологическую природу имеет объем комплексного алгебраического многообразия (по известной теореме Виртингера этот объем равен степени подмногообразия с точностью до множителя, зависящего от размерностей, т. е. от выбора единицы длины в проективном пространстве). Таким образом, в этом случае формула объема труб доставляет обобщение теоремы Виртингера.

При исследовании аффинных многообразий и их особенностей формулы объемов труб применяются обычно к части многообразия, попавшей в шар в C^N большого (при изучении некомпактных многообразий) или малого (при изучении особенностей) радиуса. Подробное изложение возникающих здесь асимптотических по радиусу формул см. в статье[3]: *Griffiths P. A.* Complex differential and integral geometry and curvature integrals associated to singularities of complex analytic varieties.— Duke Math. J., 1978, vol. 45, N 3, p. 427—512, и в докладе Гриффитса на конгрессе в Хельсинки: *Griffiths P. A.* Some problems in complex analytic geometry with growth conditions.— Proc. Intern. Congr. Math. (Helsinki, 1978), Helsinki, 1980, vol. 2, p. 645—651.

Г. Основным результатом статьи Вейля об объеме труб является независимость коэффициентов разложения объема от вложения подмногообразия в евклидово пространство и явные выражения этих коэффициентов через внутреннюю геометрию подмногообразия, а именно через компоненты тензора кривизны. Эти выражения станут, быть может, понятнее, если их записать в бескоординатном, безындексном виде.

Тензор римановой кривизны можно рассматривать как симметрический линейный оператор из внешней второй степени касательного пространства в себя. Это позволяет оп-

[3] Первая глава которой называется «Hermann Weyl's formula for the volume of tubes and the Gauss—Bonnet theorem».

ределить внешние степени указанного оператора, которые будут действовать из четных внешних степеней касательного пространства в себя. Следы этих операторов и являются подынтегральными выражениями в формулах Вейля для коэффициентов разложения объемов труб, т. е. симметрическими функциями главных внешних кривизн.

В. И. Арнольд

Призрак модальности

В настоящее время исследование модальных теорий превратилось в большую область математической логики. Призрак обрел отчетливую математическую плоть. Точными методами теории доказательств изучено огромное количество модальных систем, детально разработана теория моделей для многих видов систем. Особое внимание привлекают вопросы разрешимости различных модальных логик высказываний, а также вопрос о том, когда истинность формул модальной логики высказываний можно проверять на конечных таблицах истинности. Детально прослежена тонкая связь, существующая между расширениями интуиционистской логики высказываний и расширениями модальной логики Льюиса. На многие модальные логики обобщены важные теоремы классической теории моделей типа теоремы Крейга об интерполяции или теоремы Бета об определимости. Имеются интересные приложения модальных логик в теоретическом программировании и при построении вычислительных комплексов управления сложными системами. Это прежде всего относится к временным логикам и к так называемым логикам программирования. Последние можно трактовать как модальные логики со многими модальностями специальной структуры.

Статья Вейля тем не менее и по сей день остается непревзойденной по ясности постановки фундаментальных концептуальных проблем в модальной логике, изложенные в ней идеи и сейчас вдохновляют большинство специалистов-исследователей. Мы дадим некоторые библиографические указания к разделам этой статьи.

Довольно полное представление о современном состоянии исследований по модальным и неклассическим логикам можно получить из книги: *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука, 1974, и сборников: Семантика модальных и интенсиональных логик. М.: Прогресс, 1981; Логический вывод. М.: Наука, 1979; Неклассические логики и их применения. М., 1982; Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М., 1983. Теория импликации, в которой имеется связь по содержанию между посылками и заключением, изучается в системах релевантной импликации. Эта теория подробно изложена в монографии: *Routley R.*, *Meyer R.* The semantics of entailment «Truth, syntax & modality» / Ed. by H. Leblanc. Amsterdam; London, 1973. См. также статью Р. Мейера в сборнике «Семантика модальных и интенсиональных логик» (М.: Прогресс, 1981) и статью Е. К. Войшвилло в сборнике «Логический вывод» (М.: Наука, 1979). Вероятностная и индуктивная логика обсуждается в книге Г. Кайберга «Вероятность и индуктивная логика» (М.: Прогресс, 1978). Топологические модели неклассических логик и прежде всего интуиционистской логики получили широкое распространение. В особенности это относится к частному случаю топологических моделей, так называемым моделям Крипке, удачно формализующим идею Лейбница о возможности как о существовании в возможном мире. Без сомнения, модели Крипке — наиболее используемый в настоящее время инструмент для изучения неклассических логик. Читатель может убедиться в этом, просмотрев указанные выше сборники. Литература по интуиционистской математике и относительно программы Гильберта обоснования математики указана в комментарии к статьям «Порочный круг в современном обосновании анализа» и «Математика и логика».

А. Г. Драгалин

[1] (с. 256). *Russel B.*, *Whitehead A.* Principia mathematica. Cambridge, 1910—1913. Vol. 1—3.

[2] (с. 257). Имеется рус. пер.: *Гильберт Д.*, *Бернайс П.* Основания математики, т. 1, 2. М.: Наука, 1982.

[3] (с. 263). Эти, кажущиеся на первый взгляд тривиальными, замечания находят неожиданное и глубокое подтверждение в связи с недавними исследованиями психопатологии человека. В этих исследованиях (см.: *Брагина Н. Н.*, *Доброхотова Т. А.* Функциональные асимметрии человека. М.: Медицина, 1981) были выделены проявляющиеся при различных поражениях головного мозга состояния, которые кратко и условно можно охарактеризовать, как жизнь «только в будущем» или «только в прошлом». Здесь телеологические представления, столь старательно изгоняемые из науки, вновь проявляются в весьма резкой форме. Интересна связь, совсем в духе пифагорейской традиции, этих состояний с тем, какая сторона мозга, левая или правая, поражена. Эти открытия придают новое звучание глубокому историко-философскому анализу проблемы левого и правого, данному Вейлем в его «Симметрии» [I, 15] (см. [III, 12, с. 48—67]).

[4] (с. 266). Стоит сравнить это замечание Вейля с идеей, неоднократно высказывавшейся его принстонским коллегой Дж. фон Нейманом. Подлинная логика, пригодная для описания человеческого мышления, должна быть гораздо более непрерывной, более близкой к анализу, чем дискретные, комбинаторные конструкции современных формальных систем (см.: *Нейман Дж.* Общая и логическая теория автоматов.— В кн.: *Тьюринг А.* Может ли машина мыслить. М., 1960, с. 79—82).

[5] (с. 266). *Аристотель.* Физика. Кн. 8, гл. 8, 263а25.

[6] (с. 268). Здесь имеются в виду дальнейшие рассуждения в основном тексте статьи.

[7] (с. 268). В оригинале: Digging deeper for the mole.

[8] (с. 270). Квантовая логика, возникшая в работе Г. Биркгофа и Дж. фон Неймана, стала теперь самостоятельной дисциплиной, находящейся на границе между математической логикой и теорией структур из общей алгебры (представление о ее современном состоянии можно получить из сборников: Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces. B.: Springer, 1974; Current issues in quantum logic. N. Y.: Plenum, 1981). Наиболее известными физическими приложениями квантовой логики являются доказательства теоремы о скрытых параметрах (см.: *Ахиезер А. И.*, *Половин Р. В.* Почему невозможно ввести в квантовую механику скрытые параметры.— Успехи физ. наук, 1972, т. 107, № 3). Главы по квантовой логике обычно входят в те книги по квантовой механике, в которых основное внимание уделяется основаниям и философской проблематике (*Jauch J. M.* Foundations of quantum mechanics: Reading, 1968; *Varadarajan V. S.* Geometry of quantum theory, vol. 1, 2. N. Y.; B.: Springer, 1968—1970; *Piron C.* Foundations of quantum theory. N. Y., 1976). Отношение физиков к квантовой логике всегда было неоднозначным. В то время как П. Иордан, К. Ф. фон Вейцзеккер внесли в нее значительный вклад, Н. Бор, В. Паули (Физические очерки. М.: Наука, 1975, с. 54), М. Борн относились к ней скорее отрицательно (см. прекрасный анализ у Гейзенберга: Физика и философия. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с. 153—158; анализируя представление о реальности в атомной физике, Гейзенберг приходит к выводам, перекликающимся с рассуждениями Вейля,— «они (атомы) образуют скорее мир тенденций или возможностей, чем мир вещей или фактов» (с. 158)). Отметим еще навеянную идеями квантовой логики попытку Дж. Уилера построить пространственно-временной континуум в физике, исходя из логического аппарата исчисления высказываний (*Мизнер Ч.*, *Торн К.*, *Уилер Дж.* Гравитация. М.: Мир, 1977, т. 3, с. 477—481).

[9] (с. 271). Имеется в виду тензорное или кронекеровское произведение векторных пространств.

[10] (с. 272). Проводимая здесь параллель между математикой и квантовой механикой уточняется в [I, 7]: «Непотревоженный наблюдением „физический процесс“ представляется формально математически без интуитивной (anschauliche) интерпретации; только конкретный эксперимент, наблюдение с помощью решетки, может быть описано интуитивно. Это противоречие между физическим процессом и наблюдением аналогично противоречию между формализмом и содержательным мышлением в гильбертовой системе математики. Так же как возможно формализовать интуитивное математическое рассуждение, так же верно, что измерение с помощью решетки можно интерпретировать как физический процесс» [III, 9, с. 335]. Приводимые здесь Вейлем параллели находят свое выражение в теореме Геделя в математической логике и в теореме фон Неймана о скрытых параметрах в квантовой теории измерений. Сходной была и историческая судьба этих теорем — они скорее игнорировались или отвергались, чем подвергались дальнейшему осмыслению.

[11] (с. 272). В оригинале «ultimately the mind'seeing eye must come in».

[12] (с. 274). Термин «метафизическое» здесь и в других местах Вейль использует как синоним «философского». Достаточно вспомнить «Метафизику» Аристотеля.

[13] (с. 274). [II, 67; I, 17, т. 2, с. 533].

[14] (с. 274). Именно этот слой языка был выделен и изучен под названием перформативных высказываний уже после войны в работах Дж.-Л. Остина и других представителей так называемой аналитической философии (см.: *Бенвенист Э.* Общая лингвистика. М.: Прогресс, 1974, гл. 24). Примером перформативного высказывания является выражение: «я клянусь». То, о чем оно говорит, тождественно самому акту речи. Значение перформативных высказываний подкрепляется тем обстоятельством, что к ним близки выражения типа «парадокса лжеца», играющие важную роль в доказательстве теоремы Геделя (детальный разбор этой роли дан Вейлем в [I, 7], см. также [III, 15, с. 230]). Таким образом, в этой концепции «было снято резкое противопоставление «слов» и «дел». Если обычно право считать слова своими делами считалось привилегией писателей и поэтов, то теперь оно было признано за всеми людьми» (*Арутюнова Н. Д.* Предложение и его смысл. М.: Наука, 1976, с. 46). Впрочем, тождественность «слов» и «дел» является с незапамятных времен характерной чертой сознания первобытных народов (см.: *Иванов С. В.* Древние представления некоторых народов Сибири о слове, мысли и образе.— В кн.: Страны и народы Востока. М., 1975, вып. 17).

А. Н. Паршин

Метод ортогональной проекции в теории потенциала

Один из основных результатов статьи Г. Вейля, относящийся к ортогональному разложению вектора $v \in \boldsymbol{H} = L^2(G)$, $G \subset R^3$, стал в настоящее время стандартной теоремой векторного анализа. Теорема эта записывается обычно в форме равенства

$$\boldsymbol{H} = \dot{\mathfrak{R}}(\mathrm{grad}) \oplus \dot{\mathfrak{R}}(\mathrm{rot}) \oplus Q \qquad (*)$$

и формулируется как утверждение: «Произвольный вектор $v \in H$ представим в виде ортогональной суммы трех векторов — потенциального, соленоидального и гармонического». В записи (*) символ $\mathfrak{R}(A)$ обозначает область значений оператора A, а точка над $\mathfrak{R}$ отмечает тот факт, что элементы из области определения операторов grad, rot подчинены нулевым граничным условиям. Связь разложения (*) с граничными задачами для оператора

Лапласа устанавливается так же, как в статье. Распространение результатов Г. Вейля на общие самосопряженные эллиптические уравнения второго порядка было проведено М. И. Вишиком (см.: Мат. сб., 1949, т. 25, с. 189—234).

Различные варианты разложений равенства (*) в ограниченных и неограниченных областях широко используются при изучении задач гидродинамического происхождения. Уравнения вида

$$dv/dt + Av + \operatorname{grad} p = 0,$$
$$\operatorname{div} v = 0$$

(где A — подходящий линейный оператор) после проектирования в соответствующее подпространство приводятся к простому эволюционному уравнению

$$d\tilde{v}/dt + A\tilde{v} = 0,$$

допускающему исчерпывающее изучение. Классическим примером соответствующих построений может служить работа С. Л. Соболева (Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 1).

Многомерный аналог разложения (*) для дифференциальных форм, так называемая теорема Кодаиры, является одним из чрезвычайно полезных и красивых результатов современного анализа. Он связан с использованием оператора внешнего дифференцирования d и метрически сопряженного с ним оператора δ (играющих роль grad и rot в (*)). Равенство (*) соответствует с этой точки зрения разложению 1-формы (вектора) на 3-мерном многообразии (см.: *Де Рам.* Дифференцируемые многообразия. М.: Изд-во иностр. лит., 1956; *Friedrichs K.* Communs Pure and Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 551—590).

Разложение (*) (и теорема Кодаиры) допускает комбинаторную трактовку, в которой дифференциальные операторы заменяются разностными (*Дезин А. А.*— Сиб. мат. журн., 1968, т. 9, № 5).

А. А. Дезин

Работам Г. Вейля и Кодаиры предшествовали исследования Ходжа в 30-х годах, подытоженные в его книге (*Hodge W. V. D.* The theory and applications of harmonic integrals. Cambridge, 1941). В ней содержались такие важные понятия и результаты, как разложение Ходжа для когомологий, теорема Ходжа об индексе, доказательство на языке дифференциальных форм сильной теоремы Лефшеца о гиперплоских сечениях проективного алгебраического многообразия (чисто топологическое доказательство, данное Лефшецом в 1924 г., содержало ошибку; нахождение такого доказательства остается нерешенной до сих пор задачей). Ключевую роль в теории Ходжа играла его теорема о существовании на компактном римановом многообразии гармонических форм с наперед заданными периодами. Ее доказательство, основанное на методе параметрикса, содержало, однако, ошибку, найденную Боненблустом (см. обсуждение в начале работы [II, 130] и в [II, 164]). В [II, 130] Вейль дал доказательство теоремы Ходжа, используя вариант того же метода. Независимо от него эта проблема была решена в 1942—1943 гг. К. Кодаирой (подробное изложение в: Ann. Math., 1949, vol. 50, p. 587—665), который рассмотрел также и некомпактный случай. Кодаира применил при этом метод ортогональной проекции, использованный Вейлем для евклидовых областей.

Если M — n-мерное ориентируемое риманово многообразие, то пространство l^p гладких дифференциальных форм степени p с компактным носителем снабжается скалярным произведением. Пусть $\mathfrak{L}^p$ — его пополнение. Теорема Кодаиры (иногда называемая также

теоремой Ходжа—Де Рама) состоит в наличии ортогонального разложения

$$\mathfrak{L}^p = \mathfrak{E}^p \oplus \mathfrak{H}^p \oplus {}^*\mathfrak{H}^p,$$

где $\mathfrak{H}^p$ — замыкание пространства $d\mathfrak{l}^{p-1}$, ${}^*\mathfrak{H}^p$ — замыкание пространства $\delta\mathfrak{l}^{p+1}$, δ: $\mathfrak{l}^{p+1} \to \mathfrak{l}^p$ — оператор, сопряженный внешнему дифференциалу d: $\mathfrak{l}^p \to \mathfrak{l}^{p+1}$, и формы $\alpha \in \mathfrak{E}^p$ являются гладкими и гармоническими, т. е. $\Delta\alpha = (\delta d + d\delta)\,\alpha = 0$. Кодаира доказывает также существование гармонических форм, имеющих предписанные особенности на гладких подмногообразиях в M — обобщение классических теорем о дифференциалах 2-го и 3-го рода на римановых поверхностях. В предисловии к своей работе Кодаира подчеркивает важную роль предшествующих исследований Вейля [II, 121, 130] и, в частности, его книги [I, 1], в которой содержались теоремы существования для гармонических форм на римановых поверхностях. Оценка работ Кодаиры была дана Вейлем в его речи при вручении Кодаире Филдсовской премии на математическом конгрессе 1954 г. в Амстердаме [II, 164] и в предисловии к третьему изданию книги [I, 1].

Дальнейшее развитие этого круга идей состояло в нахождении новых методов доказательства теорем Кодаиры (например, с использованием обобщенных функций в виде потоков на многообразиях или с помощью уравнения теплопроводности, см.: *Де Рам*, *Фридрихс*. Указ. соч.; *Гаффни* и др. [IV, 12, гл. 15 и 19]) и в обобщении их на произвольные эллиптические операторы и эллиптические комплексы (см.: *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976, гл. IV). С другой стороны, были получены многочисленные применения результатов Ходжа, Вейля и Кодаиры в алгебраической геометрии, прежде всего в работах самого Кодаиры, Д. Спенсера и др.: 1) критерий алгебраичности келеровых многообразий (условие Ходжа на келерову метрику); 2) теорема двойственности для когомологий пучков; 3) теорема Римана—Роха—Хирцебруха; 4) теорема об обращении в нуль когомологий; 5) теория деформаций комплексных структур. Впоследствии большинство этих результатов были перенесены усилиями французской школы (Ж. П. Серр, А. Гротендик и др.) в абстрактную алгебраическую геометрию. Аналитические методы возродились в последнее время в работах Ф. Гриффитса и его учеников, особенно в связи с проблемой классификации алгебраических многообразий (см. обзоры: *Гриффитс Ф.*— Успехи мат. наук, 1970, т. 25, с. 175—234; *Griffiths P.*, *Shmid W.*— In: Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli. Oxford, 1975; *Cornalba H.*, *Griffiths P.*— Proc. Symp. Pure Math., 1975, vol. 29; *Carleson J.*, *Green M.*, *Griffiths P.*, *Harris J.*— Comp. Math., 1983, vol. 50, p. 109—325). Гриффитсу принадлежит новый глобальный подход к теории деформаций Кодаиры—Спенсера. Важную роль в этих исследованиях играет обобщение разложения Ходжа для когомологий алгебраических многообразий, необязательно компактных и с особенностями (смешанные структуры Ходжа), данное П. Делинем (Actes Congr. Intern. math., 1970, vol. 1, p. 425—430; Publs math. IHES, 1971, vol. 40, p. 5—58; 1974, vol. 44, p. 5—78).

А. Н. Паршин

В связи с проблемой разрешимости неоднородных уравнений Коши—Римана и по аналогии с результатами К. Кодаиры (1949) об ортогональном разложении L_2-пространств дифференциальных форм на вещественных многообразиях Д. Спенсер в 1950 г. поставил проблему получить аналогичный теореме К. Кодаиры результат для форм на комплексных многообразиях ($\bar{\partial}$-проблема Неймана—Спенсера). Эта проблема оказалась достаточно трудной и была решена в течение 60-х годов усилиями Ч. Морри (Ann. Math., 1958, vol. 68, p. 159—201), Дж. Дж. Кона (Ann. Math., 1963, vol. 78, p. 112—148; 1964, vol. 79, p. 450—

472; *Folland G. B.*, *Kohn J. J.*— Ann. Math. Stud., 1972, N 75), Л. Хермандера (Acta Math., 1965, Bd. 113, p. 89—152) и А. Андреотти (*Andreotti A.*, *Vesentini E.*— Publs math. IHES, 1965, N 25, p. 81—152; *Andreotti A.*, *Hill C. D.*— Ann. Scuola Norm. Pisa, 1972, vol. 26, N 2, p. 325—363; 1972, vol. 26, N 4, p. 747—806).

Сформулируем здесь основной итог этих работ.

Пусть $\mathscr{D}$ — область на комплексном многообразии Ω вида $\mathscr{D} = \{z \in \Omega : \rho(z) < 0\}$, где $\rho \in C^2(\Omega)$, $\operatorname{grad} \rho \neq 0$ на $\partial\mathscr{D}_n$ и для любой точки $\zeta \in \partial\mathscr{D}$ квадратичная форма Е. Леви $L_\rho = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar z_k}(\zeta) w_i \bar w_k$ невырожденна на комплексном касательном пространстге $T_\zeta^c(\partial\mathscr{D}) = \left\{ w \in C^n : \sum_{\nu=1}^{r} \frac{\partial \rho}{\partial z_\nu}(\zeta) w_\nu = 0 \right\}$. Здесь $(z_1, \ldots, z_n)$ — локальные координаты точки z в окрестности точки ζ. Пусть на многообразии Ω фиксирована эрмитова метрика Через $L_2^{p,q}(\mathscr{D})$ обозначим гильбертово пространство форм φ типа (p, q) с квадратично интегрируемыми коэффициентами. В локальных коодинатах имеем $\varphi = \Sigma \varphi_{I,J} dz^I \wedge d\bar z^J$, где I, J — мультииндексы длины соответственно p и q.

Пусть $\mathscr{E}^{p,q}(\bar{\mathscr{D}})$ обозначает пространство форм типа (p, q) с гладкими на $\bar{\mathscr{D}}$ коэффициентами. Если рассматривать оператор Коши—Римана $\bar\partial$ как неограниченный оператор из $L_2^{p,q}(\mathscr{D})$ в $L_2^{p,q+2}(\mathscr{D})$, то через $\bar\partial^*$ обозначим (формально) сопряженный оператор. $\bar\partial$-лапласианом называют дифференциальный оператор $\square$: $L_2^{p,q}(\mathscr{D}) \to L_2^{p,q}(\mathscr{D})$ вида $\square = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$. Форма φ из $L_2^{p,q}(\mathscr{D})$ называется удовлетворяющей $\bar\partial$-условию Неймана, если φ и $\bar\partial\varphi$ принадлежат области определения оператора $\bar\partial^*$. Для гладких форм φ это условие означает, что на $\partial\mathscr{D}$ имеют место равенства: $\bar\partial\rho \lrcorner \varphi = 0$ и $\bar\partial\rho \lrcorner \bar\partial\varphi = 0$, где «$\lrcorner$» — знак внутреннего произведения.

Из результатов (Morrey C. B., Hormander L., Andreotti A., Vesentini E) вытекает, что пространство $L_2^{pq}(\mathscr{D})$ при любом q допускает ортогональное разложение $L_2^{p,q} = N_2^{p,q} \oplus R_2^{p,q}$, где $N_2^{p,q}$ — подпространство в $L_2^{p,q}$, состоящее из гармонических форм φ, т. е. форм, удовлетворяющих уравнению $\square\varphi = 0$; в частности, $N_2^{p,q}$ — пространство голоморфных p-форм на $\mathscr{D}$ с квадратично интегрируемыми коэффициентами, $R_2^{p,q}$ — подпространство в $L_2^{p,q}$, состоящее из форм φ, принадлежащих образу оператора $\square$, т. е. форм, имеющих вид $\varphi = \square\psi$. Таким образом, любая форма $f \in L_2^{p,q}$ представима в виде $f = Kf + \square Nf$, где $Kf \in N_2^{p,q}$, $Nf \in L_2^{p,q}$, и обе эти формы удовлетворяют $\bar\partial$-условию Неймана.

Из результатов Дж. Дж. Кона, а также Г. Б. Фолланда и Дж. Дж. Кона вытекает далее, что для гладких форм $f \in \mathscr{E}^{p,q}(\bar{\mathscr{D}})$ обе формы Kf и Nf также гладкие, т. е. принадлежат $\mathscr{E}^{p,q}(\bar{\mathscr{D}})$. Именно этот результат и принято в основном считать решением $\bar\partial$-проблемы Неймана—Спенсера.

Наконец, очень важным является вытекающий из упоминавшихся работ Ч. Морри, Л. Хёрмандера и Дж. Дж. Кона (1963, 1964, 1972) результат о том, что пространство гармонических форм $H_2^{p,q}$ является конечномерным при всех q, отличных от числа r отрицательных собственных значений формы Леви L_ρ. В случае $q = r$, как доказал А. Андреотти (*Andreotti A.*, *Vesentini E.*, *Andreotti A.*, *Hill C. D.*), пространство $H_2^{p,0}$ бесконечномерно Если, например, $r = 0$, то бесконечномерным является лишь пространство голоморфных p-форм $H_2^{p,0}$.

В семидесятые годы исследования по $\bar{\partial}$-проблеме Неймана—Спенсера развивались в направлении расширения класса областей, где справедливо ортогональное разложение пространства $L_2^{p,q}$ (см.: *Kohn J. J.*— Acta math., 1979, vol. 142, p. 79—122) и в направлении построения «параметриксов» для операторов K и N, решающих проблему Неймана—Спенсера (см.: *Ovrelid N.*— Lect. Notes Math., 1976, N 512).

$\bar{\partial}$-Задача Неймана — Спенсера дала основной импульс к появлению одного из наиболее ярких разделов уравнений с частными производными — теории субэллиптических краев задач (см.: *Hormander L.*— Ann. Math., 1966, vol. 83, N 1, p. 129—209).

Г. М. Хенкин

О геометрии чисел

Здесь дается новое доказательство «второй теоремы Минковского о выпуклом теле». Оригинальное доказательство (см.: *Minkowski H.* Geometrie der Zahlen. Leipzig, 1896, Cap. 5) было очень сложным, однако можно проследить идейную связь доказательств Минковского и Вейля. Варианты доказательства Вейля даны Эстерманом (J. London Math. Soc., 1946, vol. 21, p. 179—182), Касселсом (Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965) и в работе трех авторов (*Bambah R. P.*, *Woods A.*, *Zassenhaus H.*— J. Austral. Math. Soc., 1965, vol. 5, p. 453—462), где вообще дается идейный анализ различных доказательств. См. также автобиографию К. Малера (J. Number Theory, 1982, vol. 14, N 2).

Принципиально другое доказательство еще ранее было дано Г. Дэвенпортом (Quart. J. Math., 1939, vol. 10, p. 119—121). Некоторые его пробелы восполнялись в работе (*Danicic I.*— J. Austral. Math. Soc., 1969, vol. 10, p. 117—181) и цит. выше работе трех авторов. Разные обобщения неравенства Минковского дали Хлавка (J. reine und angew. Math., 1950, Bd. 187, S. 246) и Вудс (J. Austral. Math. Soc., 1966, vol. 6, p. 148—152).

Это неравенство связано с проблемой аномалии (см.: *Lekkerkerker C. G.* Geometry of numbers. Amsterdam, 1969, § 18) выпуклого симметрического относительно начала тела: если доказать, что она равна 1, то вторая теорема Минковского о выпуклом теле тривиально следует из первой. Но это пока доказано лишь для $n \leqslant 3$ (*Woods A. C.*— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, vol. 52, p. 406—423).

А. В. Малышев

Одним из наиболее известных применений теоремы Минковского является знаменитое неравенство Минковского для дискриминанта поля алгебраических чисел (см. изложение Вейля [III, 5, гл. 4]; *Боревич З. И.*, *Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1964, гл. 2; *Ленг С.* Алгебраические числа. М.: Мир, 1966, гл. 5), из которого, в частности, вытекают несуществование неразветвленных расширений поля Q и теорема Эрмита о конечности числа полей алгебраических чисел с заданными точками ветвления и степенью (в случае поля алгебраических функций на кривой B аналогом неравенства Минковского служит неравенство $c_1(B) \leqslant 2$, см.: *Вейль А.* Основы теории чисел. М.: Мир, 1972). Эти утверждения были обобщены И. Р. Шафаревичем на случай алгебраических многообразий, определенных над глобальными полями (Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1962). В частности, он предположил, что существует лишь конечное число алгебраических кривых X данного рода $g > 1$, определенных над данным глобальным полем K и имеющих фиксированное множество точек плохой редукции S (многомерный аналог точек ветвления). Эта гипотеза была доказана С. Ю. Аракеловым и А. Н. Паршиным для полей алгебраических функций (Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, т. 32, с. 1191—1219; 1971, т. 35, с. 1269—1293) и Г. Фал-

тингсом (Invent. math., 1983, vol. 73, p. 349—366) для полей алгебраических чисел. Отсюда, в частности, вытекает гипотеза Морделла о конечности числа рациональных точек на кривых рода >1. В фукциональном случае имеется вариант доказательства, основанный на обобщении неравенства Минковского на случай алгебраической поверхности V: $c_1(V)^2 \leqslant f(g, q, S)$, здесь V — минимальная модель кривой X, $c_i(V)$ — классы Чженя поверхности V, q — род поля K. Более точным является неравенство $c_1(V)^2 \leqslant 3c_2(V)$, полученное Ф. А. Богомоловым (Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, т. 42, с. 1227—1287) и уточненное Мияокой (Invent. math., 1977, vol. 42, p. 225—237) для поверхностей общего типа. Вопрос о доказательстве аналога неравенства Минковского для арифметической поверхности (а с ним и вопрос об эффективизации решения проблемы Морделла) остается открытым. Представляется, что методы геометрии чисел являются наиболее подходящими для этой цели.

А. Н. Паршин

Неравенства между двумя видами собственных чисел

Эта заметка Г. Вейля явилась началом большого направления в теории компактных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Наиболее существенный вклад после работы Г. Вейля внесли Фань-Цюй, Хорн, М. Г. Крейн и др. См. монографию И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна «Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (М.: Наука, гл. 11). Там же приведена литература. См. также работу М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка «Оценки сингулярных чисел интегральных операторов» (Успехи мат. наук, 1977, т. 32, № 1 (193), с. 17—84.)

Б. М. Левитан

Основные черты физического мира. Форма и эволюция

Эта работа является одним из приложений к английскому изданию основного философского труда Вейля [I, 7]. В своей автобиографии, написанной в конце жизни, Вейль подробно рассказал о своих философских поисках и увлечениях [II, 166] [1]. Философские построения были для него неотделимы от занятий собственно математикой или физикой. Будучи еще учеником последнего класса гимназии, он находит на чердаке родительского дома заплесневелый экземпляр краткого комментария к «Критике чистого разума» — «одним толчком я был разбужен от „догматической дремоты“, и мир был моим мальчишеским умом радикальнейшим образом поставлен под вопрос». Чтение, уже в университете, «Оснований геометрии» Гильберта полностью разрушило в глазах молодого Вейля здание кантовской философии. Затем последовал период «позитивистского спокойствия» и, наконец, знакомство в 1913 г. с феноменологией Э. Гуссерля (1859—1938), немецкого философа, работавшего в то время в Геттингене. «...Это способствовало моему окончательному разрыву с позитивизмом и принятию мною самого свободного мировоззрения в мире» [2]. Памяти Гуссерля посвящена работа «Призрак модальности» [II, 118; наст. изд., с. 256—275], анализирующая понятие «возможности» в окружающем нас мире — математическом, физическом, наконец, просто человеческом.

[1] Последующие цитаты даются по [III, 19]. Детальный разбор философских взглядов Вейля дан в статье Б. В. Бирюкова «Г. Вейль и методологические проблемы науки» в кн. [III, 12, с. 174—191].

[2] См. также статью К. Шевалле и А. Вейля (наст. изд., с. 414) и письмо Г. Вейля к О. Гёльдеру (наст. изд., с. 95).

Пытаясь понять идеи Гуссерля и захватившего его потом Фихте, Вейль широко использует геометрические образы и аналогии. Объекты познания, субъекты (или многие Я) и явление объекта субъекту он сравнивает соответственно с точками плоскости, системами проективных координат и координатами точки. Рассматривая системы координат как триплеты точек, мы видим, что объекты и субъекты принадлежат к одной сфере реальности, в то время как явления относятся к другой области, царству чисел, т. е. сообразно аналогии сфере сознания. Пользуясь этими сопоставлениями, Вейль анализирует различные философские доктрины. Так, «объективность требует равноправия всех субъектов», что на этом языке интерпретируется как инвариантность относительно проективных преобразований координат тех числовых соотношений (т. е. связей между явлениями), которыми мы интересуемся [3]. Верный математике, Вейль замечает: «Некоторые из гуссерлевских тезисов, интерпретированные в образах этой аналогии, оказываются очевидным образом ложными, что внушает мне серьезное подозрение к ним». Спустя четверть века в английском издании своей книги Вейль с радостью отметил, что его аналогия в точности совпадает с той схемой состояний и наблюдаемых, которая позднее появилась в квантовой механике [4].

От позднего Фихте Вейль переходит к средневековому философу Мейстеру Экхарту. Чтение его трудов было для Вейля одним из самых счастливых событий его духовной жизни. Далее, в своей автобиографии Вейль пишет: «Я так и не довел до конца те религиозно-метафизические спекуляции, на которые меня толкнули Фихте и Экхарт; здесь, впрочем, сказалась наверное и природа самого объекта. В последующие годы я, кроме всего прочего, занимался критическим переосмыслением методологии науки, исходя из моего собственного научного и философского опыта. Значительную роль сыграло в этом размежевание с Лейбницем. За метафизическим взлетом пришло отрезвление. То, что отстоялось в процессе изучения философов и собственных мудрствований, я опубликовал в 1926 г. в работе «Философия математики и естествознания». Я написал ее за несколько недель на каникулах, но перед этим на протяжении года усердно делал выписки из философских книг, подобно бабочке, которая, перелетая с цветка на цветок, пытается высосать из каждого немного нектара. Работа в области точных наук обостряет интеллектуальную совесть, и нашему брату нелегко набраться мужества для философских высказываний. Здесь нельзя обойтись вовсе без компромиссов. Позвольте мне умолчать об этом. ⟨...⟩

Когда передо мной встал вопрос об английском переиздании моей старой философской книги, я не нашел в себе достаточно сил, чтобы переписать ее с учетом тех изменений в научной и философской областях, которые произошли за протекшее время. Я ограничился тем, что выправил старый текст, переработал некоторые разделы и добавил ряд приложений, которые отняли у меня больше сил, чем вся книга. Как часто подумывал я о том, чтобы вовсе отказаться от работы, а когда рукопись приложений была готова — о том, чтобы бросить ее в огонь! Истоки этих мук и сомнений объясняют, может быть, строки из «Четырех квартетов». Т.-С. Элиота, которые я поставил эпиграфом к предисловию: «Дом — то, откуда выходят на дорогу. Мы старимся, и мир становится все незнакомее, усложняются ритмы жизни и умирания...».

Этот щемящий итог поразит каждого, кто прочтет книгу Вейля. Многообразие фактов, тонкость их интерпретации, острая прозорливость в оценках, пронизывающий все дух единства науки, и рядом — душа человека, «который после долгого рабочего дня, на протяже-

---

[3] Эта аналогия излагается также в [I, 7, разд. 17, с. 123].

[4] С одним, впрочем, существенным отличием: пространства квантовой механики являются *комплексными* [III, 9, с. 330].

нии которого он старался создать что-то свое в противоборстве идей и человеческих притязаний и, может быть, преуспел в этом, теперь, на закате дня и в преддверии всепримиряющей ночи, наигрывает на флейте тихую вечернюю песнь».

[1] (с. 345). Перевод эпиграфов заимствован из следующих источников: *Мелвилл Г.* Моби Дик, или Белый Кит. М., 1962 (пер. И. М. Бернштейн); *Шоу Бернард.* Назад к Мафусаилу.— Собр. соч. М.: Искусство, 1980, т. 5 (пер. Ю. Корнеева); *Кольридж Т.* Поэма о старом моряке. М.: Наука, 1974 (пер. Н. С. Гумилева); Ригведа (избранные гимны). М., 1972 (пер. Т. Я. Елизаренковой).

[2] (с. 346). Историю эволюционных идей см.: *Берг Л. С.* Теории эволюции.— В кн.: *Берг Л. С.* Труды по теории эволюции. М.: Наука, 1977, с. 43—94; *Филипченко Ю. А.* Эволюционная идея в биологии. М.: Наука, 1977.

[3] (с. 346). Ссылка на разделы 20—21 основного текста книги [I, 7], содержащие анализ образования научных понятий и теорий.

[4] (с. 347). *Платон.* Политик. 287 с. Вейль неоднократно возвращается к дихотомическому методу Платона: [I, 7, ч. 1, разд. 9 и 11 ([III, 1, с. 79, 87]); ч. 2, разд. 20; приложение A ([III, 15, с. 227])].

[5] (с. 347). $L = (i/h)\,H$, где H — оператор Гамильтона квантовомеханической системы. Более подробно см. приложение С [III, 9].

[6] (с. 347). Открытие короткоживущих резонансных частиц привело к уточнению этого утверждения: заряды всех наблюдаемых элементарных частиц являются целочисленными кратными элементарного заряда e. Кварки, входящие в состав сильновзаимодействующих частиц и имеющие дробные заряды, не должны по современным представлениям наблюдаться в свободном состоянии.

[7] (с. 347). Проблема тождественности обсуждается также в приложении В (см. [III, 8, с. 319, 320], ср. также [II, 88, наст. изд., с. 391]). Несмотря на существование в квантовой теории теоремы о связи спина со статистикой ответ на вопрос Вейля по существу остается неизвестным. Как писал Дж. Уилер, «до сих пор не дано приемлемого объяснения удивительной тождественности элементарных частиц одного сорта. Эту тождественность следует рассматривать не как тривиальный факт, а как главную тайну физики» (*Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация, т. 3, М.: Мир, 1977, с. 485). Ему же принадлежит и остроумная попытка решить этот вопрос, используя фейнмановское представление о позитронах как электронах, движущихся вспять во времени и объединяя мировые линии всех электронов и позитронов в единую мировую линию *одного* электрона. Иной взгляд на эту проблему высказывал Э. Ферми, который в 1933 г. писал: «Итак, мы можем констатировать тождественность двух электронов, быть может, не в абсолютном смысле, но по крайней мере с очень большой степенью точности». При этом он указывает, что «хотя бы малейшее различие» между электронами в конце концов «изменило бы решающим образом структуру и внешние свойства атома» (*Ферми Э.* Научные труды. М.: Наука, 1971, т. 1, с. 520). Различные аспекты проблемы тождественности обсуждаются в книгах Г. Рейхенбаха «Направление времени» (М.: Изд-во иностр. лит., 1962, § 5, 26, 29, 30) и Я. М. Гельфера, В. Л. Любошица, М. И. Подгорецкого «Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике» (М.: Наука, 1975).

[8] (с. 348). Эти слова и сейчас остаются справедливыми, несмотря на многочисленные попытки объяснить теоретически наблюдаемый «спектр масс» элементарных частиц. Наиболее известна нелинейная квантовая теория поля Гейзенберга, см. его книгу «Введение в единую полевую теорию элементарных частиц» (М.: Мир, 1968) и главу 19 «Единая теория

поля» его диалогов (*Heisenberg W.* Physics and beyond. N. Y., 1972; рус. пер.: Природа, 1976, № 6, с. 93—97). Имеющиеся в современной теории соотношения между массами элементарных частиц (типа массовых формул теории унитарной симметрии или объединенной теории электрослабых взаимодействий) всегда содержат свободные параметры, которые должны определяться экспериментально.

[9] (с. 349). Тайна постоянной тонкой структуры и так называемых больших чисел остается тайной. Обсуждаемые ныне значения этих величин (см. таблицу на с. 486 в цит. книге Ч. Мизнера и др.) почти не отличаются от приводимых у Вейля. Два высказываемых здесь замечания интересно сопоставить с рассуждениями Вейля. Говоря о модели пульсирующей Вселенной, Уилер указывает, что при воспроизводстве Вселенной в каждом новом цикле воспроизводятся также и физические константы (такие, как α, ε, спектры масс и «большие числа»). Таким образом, «они являются не частью законов физики, а частью начальных условий» (ср. рассуждения Вейля на с. 348 и ниже на с. 353, см. также примеч. 13). Дальнейшее замечание Уилера о так называемом биологическом отборе физических констант удивительно гармонирует с тем ощущением единства естествознания и прежде всего физики и биологии, которым пронизана вся книга Вейля. Небольшое изменение физических констант (α или ε) привело бы к невозможности жизни во Вселенной. Вселенная и «большие числа» так велики, «потому что только в такой Вселенной возможно существование человека» (цит. соч., с. 487). По поводу других точек зрения см.: *Зельдович Я. Б.*, *Новиков И. Д.* Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975; *Дирак П.* Космологические постоянные.— В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 538—539); *Гейзенберг В.* Влияние работ Зоммерфельда на современную физику.— В кн.: *Зоммерфельд А.* Путь познания в физике. М.: Наука, 1973, с. 296—300).

[10] (с. 350). Здесь имеются в виду те движения, которые оставляют какую-нибудь фиксированную точку на месте.

[11] (с. 351). В оригинале «nature» и «orientation». Эти понятия Вейль использует и в основном тексте [I, 7, с. 87]. Так, можно сказать, что все кубы в евклидовом пространстве данного размера имеют одинаковую «внутреннюю природу» и отличаются лишь своей «ориентацией».

[12] (с. 353). Этот вопрос остается, однако, одним из центральных. Измерения нейтринного потока от Солнца показали, что его уровень существенно ниже ожидавшегося согласно теории Бете. См. статью Е. Н. Паркера в сборнике «Солнечная система» (М.: Мир, 1978), а также А. Б. Северного «Солнце как звезда» (Природа, 1983, № 4); «Загадка солнечных нейтрино» (Природа, 1983, № 8).

[13] (с. 353). Мысль Вейля можно пояснить на примере строения Солнечной системы. В то время как законы Кеплера были объяснены ньютоновской механикой, закономерности в расположении планетных орбит (закон Тициуса—Боде) остаются все еще эмпирическим фактом, обусловленным, быть может, лишь начальным состоянием в развитии Солнечной системы (см. также примеч. 9). Этот пример и весь вопрос об относительной роли законов природы (например, дифференциальных уравнений механики) и начальных данных детально обсуждался, с близких Вейлю позиций, Е. Вигнером (Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971, с. 45—49).

[14] (с. 354). Все последующее развитие астрофизики и физики элементарных частиц подтверждает это мнение Вейля. Космологические модели типа построенной Лемэтром (и ранее А. А. Фридманом) теперь стали общепринятыми. См.: *Мизнер Ч.* и др. Указ. соч., т. 2, ч. 6; *Вайнберг С.* Первые три минуты. М., 1981; Общая теория относительности. М.: Мир, 1983.

[15] (с. 354). Вейль имеет в виду крайне поверхностное усвоение идей эволюционной теории в конце XIX в. В это время идеи дарвинизма стали модой, ходячей фразой, даже идеологическими принципами буржуазно-либерального сознания, пытавшегося построить на их базе даже литературоведение (Ф. Брюнетьер) и социологию (социальный дарвинизм Г. Гумиловича, Р. Вормса и др.). Критикуя плоскоэволюционистскую трактовку прогресса, Ф. Энгельс писал в «Диалектике природы»: «...каждый прогресс в органическом развитии является вместе с тем и регрессом, ибо он закрепляет *одностороннее* развитие и исключает возможность развития во многих других направлениях» (*Маркс К., Энгельс Ф.*— Соч., т. 20, с. 621) (примеч. А. П. Огурцова).

[16] (с. 354). Теперь к этому можно добавить и единство жизни на молекулярном уровне. Как пишут биохимики Д. Грин и Р. Гольдбергер, «мы имеем полное право сказать, что определенные элементы, отобранные Природой, входят в состав решительно всех форм жизни. Из безграничного множества органических молекул, которые можно себе представить, для живых систем отобрано весьма небольшое число. Этот набор также повсеместно распространен» (Молекулярные аспекты жизни. М.: Мир, 1968, с. 360). Такая же универсальность характерна и для метаболических систем, генетического кода, механизма синтеза белка, строения мембран и многого другого.

[17] (с. 355). Вейль обращает внимание на недостаточную обоснованность биогенетического закона Геккеля эмпирическими данными и на те трудности, с которыми столкнулась теория эволюции в интерпретации внутренней структуры живого, в частности в истолковании данных, полученных в ходе развития таксономии, эмбриологии, генетики и др. Критику биогенетического закона с точки зрения современных достижений эмбриологии и систематики см.: *Beer J. R.* Embryology and evolution. Oxford, 1930; *Remane A.* Die Grundlagen des natürlichen Systems, der vergleichenden Anatomic und die Phylogenetik. Leipzig, 1956; *Любищев А. А.* Проблемы формы, систематики и эволюции организмов. М.: Наука, 1982, с. 180, 206—215 и др. (Примеч. А. П. Огурцова).

[18] (с. 356). Более подробно структура хромосом обсуждается в приложении В, см. [III, 8]. По поводу используемой Вейлем генетической терминологии см.: *Мюнтциг А.* Генетические исследования. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

[19] (с. 356). Открытия молекулярной генетики 50—70-х годов привели, казалось, к дальнейшему подтверждению и развитию обсуждаемой Вейлем схемы классической генетики 30—40-х годов. Однако исследования последнего времени вносят в общие концепции генетики ряд кардинальных изменений. К ним относятся: 1) перенос генов из одних клеток высших организмов в другие с помощью вирусов, 2) изменение генома в нормальном онтогенезе некоторых клеток, 3) «прыгающие» и «расчлененные» генетические элементы (см. сборник: Молекулы и клетки. М.: Мир, 1982, вып. 7). Пока неясно, к каким фундаментальным изменениям в биологии и, в частности, в теории эволюции приведут эти открытия.

[20] (с. 359). Осторожные сомнения, высказываемые здесь и выше по поводу современных интерпретаций эволюции и происхождения жизни разделялись многими физиками и математиками (см., например, описываемую Гейзенбергом беседу, в которой принимает участие Дж. фон Нейман: *Heisenberg W.* Physics and beyond. N. Y., 1972; рус. пер.: Природа, 1973, № 4, с. 76—83). В этой же книге Гейзенберга анализируется эволюционный процесс в сравнении с осознанным творчеством человека, о чем Вейль пишет ниже, с. 359. Среди биологов близкие взгляды высказывались, в частности, Л. С. Бергом и А. А. Любищевым (см. примеч. 2 и 17).

Особенно близки мыслям Вейля ряд высказываний А. А. Любищева: сравнение морфологической классификации с кристаллографией, анализ связей между сходством и родством

на примере «систематики» химических соединений и др. Более распространенное представление о природе эволюции см.: *Шмальгаузен И. И.* Пути и закономерности эволюционного процесса. М.: Наука, 1983; *Четвериков С. С.* Проблемы общей биологии и генетики. Новосибирск, 1983. Что касается вопроса происхождения жизни, то ему посвящена весьма обширная литература, см.: *Руттен М.* Происхождение жизни. М.: Мир, 1973. Одна из наиболее известных концепций развивается М. Эйгеном (Гиперцикл. М.: Мир, 1982), соединившим дарвиновский естественный отбор с последними достижениями химической кинетики. Совсем противоположная точка зрения принадлежит В. И. Вернадскому (Живое вещество. М.: Наука, 1978, с. 162).

[21] (с. 359). Перевод Ю. Корнеева, см. примеч. 1. Пьеса Шоу имеет подзаголовок «метабиологическая пенталогия» и снабжена огромным предисловием, где он излагает свои взгляды на эволюцию, следуя в ламаркистском духе за С. Батлером.

[22] (с. 360). Этому понятию Вейль придавал особенное значение. В приложении Е ([I, 7], см. также [II, 165]) он писал: «Ученые были бы неправы, игнорируя тот факт, что теоретические построения не являются единственным подходом к рассмотрению жизни; нам открыт и другой путь — понимание изнутри (интерпретация) ⟨. . .⟩ Я сам из моих ощущений, мысли, воли, чувств и поступков обладаю непосредственным знанием, совершенно отличным от теоретического знания, которое представляет в символах «параллельные» мозговые процессы. Это внутреннее осознание самого себя является основой моего понимания окружающих меня людей, которых я принимаю за существа моего вида и с которыми я иногда сообщаюсь настолько интимно, что могу делить с ними радость и горе. Если даже я не настолько проникаю в их сознание, чтобы ощущать его, как свое собственное, тем не менее мое «интерпретационное» понимание его обладает неоспоримой адекватностью. Его яркий свет направлен не только на людей, окружающих меня; он проникает, хотя все более тускло и неразличимо, глубоко и в мир животных. ⟨. . .⟩ Бесплодно отмахиваться от этого подхода к природе «изнутри» как антропоморфического и превозносить объективность теоретических построений. Оба пути ведут, как это бывает, в противоположные стороны: то, что является наиболее темным для теории, — человек, для понимания изнутри является наиболее ясным (luminous), а к элементарным неорганическим процессам, которые наиболее просты для теории, интерпретация не находит никакого подхода» [III, 11, с. 358, 359]. Далее Вейль обсуждает преимущества и недостатки обоих подходов и замечает: «Было бы соблазнительно распространить принцип дополнительности Бора на отношения между двумя противоположными подходами, которые мы обсуждаем». Близкие по духу, а иногда и по смыслу высказывания о возможной роли принципа дополнительности и вообще представлений квантовой механики в нашем понимании биологических и психических явлений делались А. Зоммерфельдом (Пути познания в физике. М.: Наука, 1973, с. 116, 124), В. Паули (Физические очерки. М.: Наука, 1975, с. 27, 63—65 и др.) и многими другими ее создателями. Наибольшую известность приобрели взгляды Н. Бора (их ясное изложение содержится в цитированных выше диалогах Гейзенберга). Недавние открытия историков науки показали, насколько глубоко были использованы Бором психологические параллели при создании концепции дополнительности, см.: *Jammer M.* The conceptual development of quantum mechanics. N. Y., 1966; *Холтон Дж.* Корни дополнительности.— В кн.: Тематический анализ науки. М.: Прогресс, 1981, с. 159—210; *Алексеев И. С.* Концепция дополнительности (историко-методологический анализ). М.: Наука, 1978.

А. Н. Паршин

Старые и новые аспекты теории собственных значений

1. Явление Гиббса. а) Утверждение на с. 361 о том, что разность 1_n^0-Si (nx) сходится равномерно к нулю, является следствием следующего утверждения: пусть $\mathscr{F}(x) \in \mathscr{L}(-\pi, \pi)$ — периодическая с периодом 2π, $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ — частная сумма ее ряда Фурье. Пусть (α, β), $-\pi < \alpha < \beta < \pi$,— произвольный интервал и

$$\mathscr{F}_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta f(\xi) \frac{\sin n(x-\xi)}{x-\xi} d\xi.$$

Тогда $s_n(x) - \mathscr{F}_n(x)$ на (α, β) стремится равномерно к нулю, т. е. имеет место равносходимость между разложением в ряд и интеграл Фурье. Аналогичные утверждения справедливы и для многих переменных, однако равносходимость следует заменить равносуммируемостью, см.: *Левитан Б. М.*— Мат. сб., 1954, т. 35 (77), с. 267—316; *Хёрмандер Л.*— Математика: Период. сб. пер. иностр. ст., 1968, т. 12 : 5, с. 114—137).

б) Теоремы о равномерном распределении связаны с уточнением классической теоремы Л. Кронекера о совместных решениях системы неравенств, см., например, книгу Б. М. Левитана «Почти периодические функции» (М., 1953).

По поводу проблемы Лагранжа о среднем движении см. комментарии к статье «О равномерном распределении чисел по модулю один».

2. Предельный круг и предельная точка. Доказательство теоремы о точке и круге Вейля со времени доказательства самого Вейля существенно не изменилось. Эта теорема имеет фундаментальное значение для всей теории операторов Штурма—Лиувилля с одним и двумя сингулярными концами. Она полностью заменяет для этих операторов теорию самосопряженных расширений и позволяет описать резольвенты всех расширений.

Ниже, имея в виду некоторые несущественные упрощения, мы будем предполагать, что оператор Штурма—Лиувилля задан в каноническом виде [1]

$$l(y) = -y'' + q(x)\, y \qquad (0 < x < \infty). \tag{1}$$

Рассмотрим случай одного сингулярного конца в бесконечности. В этом случае в точке $x = 0$ (которая предполагается регулярной) следует задать граничное условие. Пусть это условие имеет вид

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi. \tag{2}$$

Обозначим через $\varphi(x) = \varphi(x, \lambda)$, $\theta(x) = \theta(x, \lambda)$ решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0) = \sin\alpha, \qquad \varphi'(0) = -\cos\alpha, \qquad \theta(0) = \cos\alpha, \qquad \theta'(0) = \sin\alpha.$$

Очевидно, $\varphi(x)$ удовлетворяет граничному условию (2). Из доказательства теоремы о круге и точке следует такое утверждение: пусть $m(\lambda)$ (в обозначениях Г. Вейля $w(\lambda)$) предельная точка или любая точка предельной окружности. Тогда решение

$$\varphi(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m(\lambda)\, \varphi(x, \lambda) \tag{3}$$

уравнения (1) принадлежит пространству $\mathscr{L}^2(0, \infty)_n$, см. книги Титчмарша «Разложения по

[1] В последнее время оператор вида (1), заданный на всей прямой или на полупрямой, называют также одномерным оператором Шредингера, а функцию $q(x)$ — потенциалом. Мы будем иногда пользоваться этой терминологией.

собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка» (М.: Изд-во иностр. лит., 1960, т. 1), Б. М. Левитана и И. С. Саргсяна «Введение в спектральную теорию» (М.: Наука, 1970).

В случае предельной точки функция $m(\lambda)$ определяется однозначно и является аналитической функцией как в верхней, так и в нижней полуплоскости. В случае предельного круга существует бесчисленное множество аналитических функций $m(\lambda)$. Поэтому в случае предельной точки для каждого недействительного λ существует только одно решение уравнения (1) с интегрируемым квадратом, а в случае предельного круга — более одного, а значит, и все решения принадлежат пространству $\mathscr{L}^2(0, \infty)$.

Решения вида (3) (принадлежащие $\mathscr{L}^2(0, \infty)$) в настоящее время принято называть решениями Вейля, а функции $m(\lambda)$ — функциями Вейля—Титчмарша.

Резольвента самосопряженного расширения оператора (1)—(2) есть интегральный оператор с ядром

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \begin{cases} \psi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda), & y \leqslant x; \\ \varphi(x, \lambda)\psi(y, \lambda), & y > x. \end{cases}$$

Из этой формулы видно, что в случае предельной точки самосопряженное расширение оператора (1)—(2) единственно, а в случае предельного круга их бесконечно много и каждое самосопряженное расширение определяется выбором аналитической функции $m(\lambda)$.

Теорема о точке и круге обобщалась в разных направлениях. Некоторые из этих обобщений указаны в статье Вейля. Укажем некоторые другие обобщения: на матричную систему уравнений Штурма—Лиувилля — В. Б. Лидский (Докл. АН СССР, 1954, т. 95, с. 217—220), на несамосопряженное уравнение Штурма—Лиувилля — В. Б. Лидский (Тр. Моск. мат. о-ва, 1960, т. 9, с. 45—79), на системы Дирака — Е. Ч. Титчмарш (Proc. London Math. Soc., 1961, vol. 3, N 11, p. 159—168).

На обыкновенные дифференциальные операторы выше второго порядка теоремы о точке и круге не переносятся, однако функции, аналогичные функциям Вейля—Титчмарша, могут быть определены, см.: Кодаира (Amer. J. Math., 1950, vol. 72, N 3, p. 502—544), Эверитт (Quart. J. Math. Ser. 2, 1963, vol. 14, p. 170—180), К. А. Мирзоев (Докл. АН СССР, т. 251, № 3, с. 550—553).

Вопрос о том, к какому типу принадлежит оператор (1)—(2), очевидно, зависит от поведения потенциала $q(x)$ в окрестности сингулярного конца. Некоторые предварительные результаты в этом направлении были указаны самим Вейлем. В дальнейшем более сложные результаты были получены Сирсом (Canad. J. Math., 1950, vol. 2, p. 314—325), Р. С. Исмагиловым (Докл. АН СССР, 1962, т. 142, с. 1239—1242), В. Б. Лидским, Истхемом и др. В качестве примера приведем один из результатов Истхема: оператор (1)—(2) принадлежит к случаю предельной точки, если существуют такая последовательность непересекающихся интервалов (a_m, b_m) и последовательность положительных чисел v_m $(m = 1, 2, \ldots)$, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_m^{-1} = \infty, \quad (b_m - a_m)^2 v_m \geqslant k > 0, \qquad \int_{a_m}^{b_m} |q_-(x)|\, dx \leqslant k(b_m - a_m)^3 v_m^2,$$

где $q_-(x) = \min\{q(x), 0\}$.

Были получены также достаточные условия принадлежности оператора (1)—(2) к случаю предельного круга (см., например: *Титчмарш*, 1960, указ. соч.). Однако достаточно эффективных необходимых и достаточных условий на потенциал, обеспечивающих принадлежность оператора к случаю предельной точки или предельного круга, в настоящее время неизвестно.

3. Теорема о разложении для обыкновенного самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным концом. В отличие от теоремы о точке и круге доказательство теоремы разложения со временем претерпело значительные изменения в сторону упрощения. В настоящее время эту теорему можно считать вполне элементарной теоремой математического анализа.

Значительное упрощение в доказательство теоремы разложения внес Титчмарш (1960, указ. соч.). Все же его доказательство оставалось еще технически довольно сложным. Решающее упрощение внесли в 1950 г. независимо друг от друга три автора: К. Иосида (Nagoya Math. J., 1950, vol. 1, p. 49—58), Н. Левинсон (Duke Math. J., 1951, vol. 18, N 1, p. 57—71) и Б. М. Левитан (Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.: Гостехтеориздат, 1950).

Если отвлечься от некоторых несущественных деталей, то результат этих авторов заключался в том, что в формулах (8) и (9) на с. 368 статьи Вейля возможен корректный предельный переход. Как только это показано, доказательство формул (10), (11) и (12) на с. 368 статьи Вейля не представляет труда, см.: *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Указ. соч., гл. 2, § 3 и 5.

Метод предельного перехода дает также возможность во многих случаях исследовать характер спектра оператора Штурма—Лиувилля в зависимости от поведения на бесконечности потенциала, см.: *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Указ. соч., гл. 4.

Б. М. Левитан показал (Докл. АН СССР, 1950, т. 71, с. 605—608), что независимо от поведения потенциала $q(x)$ на бесконечности для спектральной функции $\rho(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ справедлива оценка

$$\rho(\lambda) < C\sqrt{\lambda},$$

где постоянная C зависит от поведения $q(x)$ в окрестности точки $x = 0$. После этого В. А. Марченко доказал (Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, т. 1, с. 327—420) асимптотическую формулу $(\lambda \to +\infty)$

$$\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}).$$

Наконец, В. А. Марченко (Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, т. 19, с. 381—422) и Б. М. Левитан (там же, с. 33—58) получили для спектральной функции $\rho(\lambda)$ задачи (1)—(2) асимптотическую формулу $(\lambda \to +\infty)$

$$\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + \operatorname{ctg}\alpha + \rho(-\infty) + o(1).$$

Для разложений по собственным функциям задачи (1)—(2) функций из класса $\mathcal{L}^2(0, \infty)$ Б. М. Левитан (указ. соч.) доказал теорему о равносходимости с разложением в интеграл Фурье по косинусам.

Б. М. Левитан обобщил метод предельного перехода в доказательстве спектрального разложения на уравнения Штурма—Лиувилля с двумя сингулярными концами и на обыкновенные симметрические операторы высших порядков (Докл. АН СССР, 1950, т. 73, с. 651—654).

Другие доказательства спектральной теоремы для операторов высших порядков см. в работах Кодаиры (Amer. J. Math., 1950, vol. 72, p. 502—544) и М. Г. Крейна (Тр. Ин-та математики АН УССР, 1948, т. 10, с. 83—106) [2].

Б. М. Левитан

---

[2] Комментарии по поводу асимптотики спектра оператора Лапласа (п. 4 и 5 статьи Вейля) см. на с. 442—449. Дальнейшие подробности содержатся в следующем ниже комментарии М. Водзицкого. — (*Примеч. ред.*)

Пусть A: $C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, E)$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор (ПДО) классического типа и порядка $m > 0$, действующий в сечениях векторного расслоения E на гладком замкнутом многообразии X (точные определения см.: *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: 1978, § 3—5). Предположим, что A самосопряжен и положительно определен относительно выбора положительной 1-й плотности $d\mu$ на X и эрмитовой метрики $\langle\cdot, \cdot\rangle$ в E. Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система собственных сечений расслоения E с собственными значениями λ_n и $\varphi_n^* \equiv \langle\varphi_n, \cdot\rangle$ — сечения двойственного расслоения E^*. Тогда ряд

$$\sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} \varphi_n(x) \otimes \varphi_n^*(y) \in E_x \otimes E_y^* \tag{1}$$

можно рассматривать как обобщение ряда (17) статьи Вейля (у Вейля E — одномерное тривиальное расслоение). При $\operatorname{Re} s > n/m$ ($n = \dim X$) ряд (1) с точностью до умножения на $d\mu(y)$ представляет собой ядро комплексной степени A^{-s} оператора A, определяемой в виде контурного интеграла

$$A^{-s} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-s} (A - \lambda)^{-1} d\lambda, \tag{2}$$

где контур Γ обходит в положительном направлении произвольный луч $\{\operatorname{Arg} \lambda = \theta\}$ с $\theta \neq 0$ (см.: *Шубин М. А.* Указ. соч., § 10). Задача аналитического продолжения по s ряда (1) сводится к задаче аналитического продолжения ядер $A^{-s}(x, y)$, решенной в работе Сили (*Seeley R.*— Proc. Sympos. Pure Math., 1967, vol. 10, p. 288—307). Приведем основные результаты:

($\zeta 1$) при $x \neq y$ $A^{-s}(x, y)$ аналитически продолжается до *целой* функции аргумента s, обозначаемой $\zeta(s; x, y; A)$;

($\zeta 2$) при $x \neq y$ $\zeta(0; x, y; A) = -H_0(x, y)$, где $H_0(x, y)$ — ядро проектора на нулевое корневое подпространство оператора A;

($\zeta 3$) $A^{-s}(x, x)$ аналитически продолжается до мероморфной во всей плоскости функции от s, обозначаемой $\zeta(s; x; A)$, единственными особенностями которой являются простые полюса в точках $s_j = (n - j)/m$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$);

($\zeta 4$) вычеты во всех точках заданы явными локальными формулами;

($\zeta 5$) вычет в точке $s = 0$ всегда исчезает и $\zeta(0; x; A) + H_0(x, x)$ задано явной локальной формулой.

Если A — дифференциальный оператор, то верно дополнительно, что:

($\zeta 2'$) при $x \neq y$ $\zeta(-k; x, y; A) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

($\zeta 5'$) вычеты $\zeta(s; x; A)$ в точках $s = -k$ ($k = 1, 2, \ldots$) исчезают и $\zeta(k; x; A)$ заданы явными локальными формулами.

$\zeta(s; x; A)$ является гладкой 1-плотностью на X со значениями в эндоморфизмах E. Формула $\operatorname{Tr} A^{-s} = \int_X \operatorname{tr} \zeta(s; x; A)$ $(\operatorname{Re} s > n/m)$ дает аналитическое продолжение «глобальной» дзета-функции

$$\zeta(s; A) = \operatorname{Tr} A^{-s} = \Sigma \lambda^{-s} \ (\lambda \in \operatorname{Spec} A, \ \lambda \neq 0).$$

Все утверждения выполняются при более слабом, чем самосопряженность, предположении, что коническая окрестность некоторого луча $\{\operatorname{Arg} \lambda = \theta\}$ не содержит точек спектра оператора A. В определении комплексных степеней (2) интеграл берется по контуру, обходящему луч $\{\operatorname{Arg} \lambda = \theta\}$.

Некоммутативный вычет. Пусть L — произвольный (необязательно эллиптический)

ПДО, $l(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} l_{m-j}(x, \xi)$ — его полный символ в какой-нибудь карте $X_0 \subset X$. Положим

$$\operatorname{res}(x; L) = \left\{ R \int_{|\xi|=R} l_{-n}(x, \xi)\, d\xi'_R \right\} dx \quad (x \in X_0), \tag{3}$$

где $d\xi'_R$ — умноженный на $(2\pi)^{-n}$ элемент объема сферы радиуса R в $\mathbf{R}^n_\xi$ и R — достаточно большое. В силу однородности компоненты $l_{-n}(x, \xi)$ выражение в фигурных скобках при достаточно больших R от R не зависит. В случае, когда $\operatorname{ord} L \notin \mathbf{Z}$ ($\operatorname{ord} = m$ — порядок L) либо $\operatorname{ord} L < -n$, положим тождественно $\operatorname{res}(x; L) = 0$. Величина (3) задает на всем X корректно определенную 1-плотность со значениями в эндоморфизмах расслоения E. *Некоммутативным вычетом* оператора L назовем число

$$\operatorname{res} L = \int_X \operatorname{tr} \operatorname{res}(x; L).$$

Перечислим замечательные свойства, которыми обладает вычет:

(R1) $\operatorname{res}(x; \alpha L + \beta M) = \alpha \operatorname{res}(x; L) + \beta \operatorname{res}(x; M)$;

(R2) $\operatorname{tr} \operatorname{res}(x; [P, Q])$ является полным дифференциалом, т. е. $\operatorname{res}([P, Q]) = 0$;

(R3) res индуцирует невырожденное спаривание $\langle P, Q \rangle = \operatorname{res} PQ$

$$CL^m/CL^{m-1} \times CL^{-m-n}/CL^{-m-n-1} \to \mathbf{C},$$

где $CL^k \equiv CL^k(X, E)$ означает множество всех ПДО порядка k, действующих в сечениях расслоения E (отметим, что CL^k/CL^{k-1} естественно отождествляется с пространством эндоморфизмов расслоения π^*E на $T^*X \setminus X$, положительно однородных по ξ степени k);

(R4) существует такой конечный набор $\{P_\nu\}$ дифференциальных операторов порядков 1 и 0, зависящих только от многообразия X и расслоения E, что любой ПДО L с нулевым вычетом имеет вид:

$$L = \sum_\nu [P_\nu, S_\nu] + T,$$

где S_ν — ПДО того же порядка, что и L, а T — оператор с гладким ядром.

Функционал res является многомерным аналогом одномерного некоммутативного вычета, который в последнее время интенсивно использовался в теории интегрируемых систем (см.: *Манин Ю. И.*— В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1978, т. 11, с. 5—152).

При правильном определении голоморфной функции со значениями в псевдодифференциальных операторах $z \mapsto \Phi_z$ ядро $\Phi_z(x, y)$ допускает аналитическое продолжение. Пусть $\operatorname{ord} \Phi_z = \alpha z + \beta$, где $\alpha \neq 0$. Тогда ядро операторов Φ_z для $\operatorname{Re}(\alpha z) < -n - \operatorname{Re}\beta$ непрерывно по (x, y) и имеют место следующие утверждения:

(Z1) при $x \neq y$ функция $z \mapsto \Phi_z(x, y)$ целая и обращается в нуль во всех точках $z = z'$, для которых $\Phi_{z'}$ — дифференциальный оператор;

(Z2) функция $z \mapsto \Phi_z(x, x)$ из полуплоскости $\operatorname{Re}(\alpha z) < -n - \operatorname{Re}\beta$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость до мероморфной функции $\Phi_{(z)}(x, x)$, единственными особенностями которой являются простые полюса в точках $z_j = (j - n - \beta)/\alpha$ ($j = 0, 1, \ldots$) с вычетами, равными

$$\gamma_j(x) = -\frac{1}{\alpha} \operatorname{res}(x: \Phi_{z_j});$$

(Z3) функция $\Phi_{(z)}(x, x)$ регулярна во всех точках $z = z'$, для которых $\Phi_{z'}$ — дифференциальный оператор.

Особенности у продолжения $\Phi_{(z)}(x, x)$ присутствуют только в тех точках z, для которых $\operatorname{ord} \Phi_z \in \mathbf{Z}_{\geqslant -n}$. Вычеты в этих точках зависят только от соответствующих значений операторнозначной функции Φ_z, но не от самой функции.

Часть сформулированных раньше результатов Сили ($\zeta 1$) — ($\zeta 5$) сводится таким образом к утверждению, что операторнозначная функция A^{-s} принимает значения в ПДО и голоморфна в указанном выше смысле. Другим примером такого рода функции является LA^{-s}, где L — произвольный ПДО. С ней связана обобщенная дзета-функция $\zeta(s; L \mid M) = \operatorname{Tr}(LA^{-s})$, возникшая в последнее время в ряде вопросов квантовой теории поля, а также в теории чисел и спектральной геометрии.

Спектральная асимметрия. Предположим, что эллиптический ПДО A порядка $m > 0$ допускает определение комплексных степеней по двум разным ветвям показательной функции $A_{\theta'}^{-s}$ и $A_{\theta''}^{-s}$ $(0 < \theta' < \theta'' \leqslant 2\pi)$. Возникает естественный вопрос о сравнении соответствующих «локальных» дзета-функций. Положим

$$\rho_A(s; x, y) = \zeta_{\theta'}(s; x, y; A) - \zeta_{\theta''}(s; x, y; A).$$

При $\operatorname{Re} s > n/m$ $\rho_A(s; x, y)$ совпадает с ядром оператора $A_{\theta'}^{-s} - A_{\theta''}^{-s}$. С другой стороны, имеем

$$A_{\theta'}^{-s} - A_{\theta''}^{-s} = (e^{-2\pi i s} - 1) PA_{\theta'}^{-s},$$

где P — проектор на собственные значения, лежащие в секторе $\theta' < \operatorname{Arg} \lambda < \theta''$. P является ПДО порядка 0. Применяя (Z1)—(Z3) к $\Phi_s = PA_{\theta'}^{-s}$, получим:

(A1) при $x \neq y$ $\rho_A(s; x, y)$ обращается в нуль во всех целых точках s;

(A2) $\rho_A(s, x, x)$ регулярна во всех целых точках и

$$\rho_A(k; x, x) = \frac{2\pi i}{m} \operatorname{res}(PA^{-k}) \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

В статье М. Водзицкого (*Wodzicki M.*— Invent. math., 1984, vol. 75, p. 143—177) доказан значительно более сильный результат:

(A3) $\operatorname{tr} \rho_A(0; x, x)$ всегда является полным дифференциалом.

В частности, значение в нуле дзета-функции $\zeta_\theta(s; A)$ не зависит от выбора разреза θ, зато значения в других целых точках могут зависеть от выбора разреза, даже когда A — дифференциальный оператор.

Ядро теплопроводности. Если спектр оператора A лежит в секторе $|\operatorname{Arg} \lambda| < \pi/2 - \varepsilon$, то применим другой метод, опирающийся на исследование фундаментального решения задачи Коши для «уравнения теплопроводности»:

$$(\partial/\partial t + A) u(t, x) = 0 \qquad (t > 0), \tag{4}$$
$$u(0, x) = \varphi(x), \text{ где } \varphi \in C^\infty(X, E).$$

Хронологически это был первый метод аналитического продления дзета-функции и исследования ее основных свойств. Именно этот подход избран в статье Вейля.

Решение задачи (4) дано в виде $e^{-tA}\varphi$, где e^{-tA} — оператор с гладким ядром, известным под названием «ядра теплопроводности». Этот оператор строится в виде контурного интеграла:

$$e^{-tA} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Delta e^{-t\lambda} (A - \lambda)^{-1} d\lambda,$$

где Δ — контур, обходящий спектр A и ведущий из $\infty e^{i(\pi/2-\varepsilon)}$ в $\infty e^{-i(\pi/2-\varepsilon)}$. Связь ядра

теплопроводности с дзета-функцией реализуется в виде следующей формулы преобразования Меллина:

$$\Gamma(s) A^{-s}(x, y) = \int_0^\infty t^{s-1} \{e^{-tA}(x, y) + H_0(x, y)\} dt,$$

обобщающей формулу (18) статьи Бейля.

Свойства аналитического продолжения дзета-функции по сути эквивалентны существованию асимптотики

$$e^{-tA}(x, x) \sim \sum \alpha_\varkappa(x) t^\varkappa + \sum_{l=1}^\infty \beta_l(x) t^l \log t \qquad (t \searrow 0), \tag{5}$$

где $\varkappa$ пробегает множество $\{-n/m, (-n+1)/m, \ldots\}$, а $\alpha_\varkappa(x)$, $\beta_l(x)$ — гладкие 1-плотности на X со значениями в эндоморфизмах расслоения E. При $x \neq y$ имеет место оценка

$$\| e^{-tA}(x, y) \| \leqslant e^{-\delta/t},$$

где константа $\delta > 0$ вообще зависит от расстояния точек x и y. Коэффициенты в разложении (5), известном под названием разложения Минакшисундарама (или высокотемпературного разложения), даны формулами:

$$\alpha_\varkappa(x) = \begin{cases} \Gamma(-\varkappa) \operatorname{Res}_{s=-\varkappa} \zeta(s; x; A), & \varkappa \neq 0, 1, \ldots, \\ \dfrac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} \{\zeta_{\text{reg}}(-\varkappa; x; A) + \left(1 + \cdots + \dfrac{1}{\varkappa} - \gamma\right) \operatorname{Res}_{s=-\varkappa} \zeta(s; x; A), & \varkappa = 0, 1, \ldots; \end{cases}$$

$$\beta_l(x) = \frac{(-1)^{l+1}}{l!} \operatorname{Res}_{s=-l} \zeta(s; x; A), \qquad l = 1, 2, \ldots,$$

где соответствующие дзета-функции определены по любому разрезу в полуплоскости $\operatorname{Re} s \leqslant 0$ и γ — константа Эйлера. Мы использовали обозначение

$$\zeta_{\text{reg}}(-\varkappa; x; A) = \lim_{s \to -\varkappa} \left\{\zeta(s; x, A) - \frac{1}{s+\varkappa} \operatorname{Res}_{s=-\varkappa} \zeta(s; x, A)\right\}.$$

Для дифференциальных операторов коэффициенты β при $t^l \log t$ равны нулю.

Краевые задачи. Аналогичная, хотя и не настолько общая теория комплексных степеней имеется для эллиптических краевых задач. Пусть

$$\begin{aligned} Au &= f \\ B_\nu u &= 0 \end{aligned} \qquad (\nu = 1, \ldots, md/2) \tag{6}$$

будет эллиптической краевой задачей] (определение см., например, в книге: *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965, гл. 10), где B_ν — дифференциальные операторы на крае ∂X, A — эллиптический дифференциальный оператор порядка m, действующий в сечениях расслоения E внутри X. Задача (6) определяет замкнутый оператор A_B в $L^2(X, E)$, его комплексные степени построены в серии из двух работ Р. Сили в 1969 г. (*Seeley R.*— Amer. J. Math., 1969, vol. 91, p. 889—920; 963—983). Там же решена задача аналитического продолжения ядер $A_B^{-s}(x, y)$ $(x, y \in \operatorname{Int} X)$ и задача продолжения «глобальной» дзета-функции $\zeta(s; A, B) = \operatorname{Tr} A_B^{-s}$, поставленная в статье Вейля. Получены формулы для вычетов и значений в неположительных целых точках. Формулы эти состоят из двух кусков: одного — зависящего только от самого оператора A, вто-

рого — зависящего от краевых условий. Асимптотика ядра теплопроводности для краевых задач исследована в недавней работе Л. Смита (*Smith L.*— Invent. math., 1981, vol. 63, p. 467—493, см. также: *Gilkey P. B.*, *Smith L.*— Communs Pure Appl. Math., 1983, vol. 36, p. 85—131).

М. Водзицкий

Феликс Клейн и современная математика

Короткая речь Вейля не только выражает его отношение к личности и трудам Ф. Клейна, но и прекрасно обрисовывает дух геттингенской математической школы, которой естествознание обязано столь многими из своих достижений.

Язык Вейля в этой речи представляет исключительные трудности для перевода. Поэтому в ряде мест пришлось пожертвовать стилистической точностью, сохранив лишь основную мысль автора.

[1] (с. 383). См.: *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л., 1937, с. 92.

[2] (с. 384). *Klein F.* Über die Theorie des Kreisels. Leipzig: Teubner, 1898—1910. Bd. 1—4.

[3] (с. 384). *Klein F.* Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig: Teubner, 1882. Физические аналогии до сих пор используются при изложении теории римановых поверхностей.

[4] (с. 384). В оригинале: Gott als ewig Vollendeter und Werdender. Это высказывание, избранное Вейлем для иллюстрации своей мысли, близко представлениям патристической философии о соотношении времени и вечности (см., например, у Николая Кузанского: «...в вечности твоего замысла всякая временная последовательность совпадает в одном и том же *теперь* вечности» (Сочинения. В 2-х томах. М.: Мысль, 1980, т. 2, с. 55)). Похожие образы встречаются у позднего Гёте («... и мнится нам покоем в боге вся мировая толчея» (см. раздел «Бог и мир» в кн.: Собрание сочинений. М., 1975, т. 1, с. 463). Взгляды обоих мыслителей на мир весьма интересовали Вейля. Представление о мире как созданном и одновременно непрерывно создаваемом очень характерно для многих философских и мифологических систем.

[5] (с. 384). Неоднократно использованный Вейлем пример платоновского определения понятий с помощью дихотомического процесса (см. [I, 7, конец раздела 20] и [III, 7, приложение A]) подсказывает следующую возможную интерпретацию этого места. Знание, скажем математическое, можно рассматривать как совокупность понятий и утверждений, занимающих определенные «места» в сети логических дедукций, бесконечно продолжаемых в обе стороны. Лишь аксиомы являются тем фундаментом, теми исходными точками, с которых начинается дедукция. Как показал К. Гёдель, «абсолютный фундамент» окончательной аксиоматики действительно «остается скорее всего лишь вымыслом».

[6] (с. 385). См. примеч. 12 к работе «Призрак модальности».

[7] (с. 385). *Spengler O.* Untergang des Abendlandes. München, 1920—1922, Bd. 1—2. (*Шпенглер О.* Закат Европы. М.; Пг., 1923, т. 1); *Cassirer E.* Philosophie der symbolischen Formen. B., 1923—1929, Bd. 1—3.

[8] (с. 385). *Frank E.* Plato und die sogenannten Pythagoräer. Halle (Saale), 1923; *Speiser A.* Klassische Stücke der Mathematik. Zürich, 1925; *Graeser W.* Bachs Kunst der Fuge. Bach-Jahrbuch, 1928. Здесь имеется в виду не восстановление текста, а выяснение внутренней структуры произведения, см.: *Швейцер А.* Иоганн Себастьян Бах. М.: Музыка, 1965.

[9] (с. 386). *Jordan C.* Traite des substitutions et des equations algebriques. P., 1870.

[10] (с. 386). *Klein F.* Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grades. Leipzig, 1884.

[11] (с. 386). Eichstadt в переводе с немецкого означает Дубград, Quercupolitans — перевод немецкого названия на латынь.

[12] (с. 387). В оригинале конец этой фразы выглядит так: den zwingenden Beweis für alle Behauptungen zu erbringen.

[13] (с. 388). Склонность прислушиваться к другим мнениям.

[14] (с. 389). Grenzkreistheorem — речь идет о существовании униформизации компактной римановой поверхности с помощью дискретной группы в единичном круге. См.: *Клейн Ф.* Указ. соч., с. 427—428.

[15] (с. 390). Т. е. преобразования вида $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma)$, где σ — автоморфизм основного поля.

[16] (с. 390). См.: *Дьедонне Ж.* Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974, гл. 3, § 1.

[17] (с. 391). См. примеч. 7 к работе «Основные черты физического мира. Форма и эволюция».

[18] (с. 391). В оригинале «absoluten Gebildes». Ясное изложение описываемых здесь идей Кэли и Клейна см. в дополнении Г. Поппа в кн.: *Спрингер Т.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1981.

[19] (с. 392). Согласно этому принципу, например, квадратичная форма от трех переменных представляется как определитель симметрической матрицы второго порядка, коэффициенты которой суть линейные формы. Историю вопроса см.: *Клейн Ф.* Указ. соч., с. 165, геометрическое описание и дальнейшие результаты см. в обзоре А. Н. Тюрина «О пересечении квадрик» (Успехи мат. наук, 1975, т. 30, № 6, с. 51—99).

[20] (с. 392). См. работу «Электрон и гравитация» (наст. изд., с. 198—218).

[21] (с. 392). В оригинале Übertragungslehre. Имеется в виду теория связностей.

[22] (с. 394). Теперь с этим вряд ли можно согласиться. Такие результаты, как общий закон взаимности И. Р. Шафаревича или недавнее доказательство гипотезы Морделла (см. комментарии к работе «О геометрии чисел»), существенно используют аналогию с функциональной ситуацией.

[23] (с. 394). По-видимому, здесь имеется в виду отсутствие неабелева обобщения теории полей классов. Несмотря на ряд интересных результатов и идей последнего времени (описание l-расширений, программа Р. Ленглендса), эта вершина в алгебре остается неприступной.

[24] (с. 394). Этим двум способам понимания в математике Вейль посвятил отдельную работу [II, 95]. Подобные взгляды высказывали и другие математики (см. предисловие А. Вейля к его книге: Основы теории чисел. М.: Мир, 1972).

А. Н. Паршин

Эмми Нётер

Эта траурная речь, произнесенная под непосредственным впечатлением внезапной кончины Э. Нётер, доносит до нас теплый образ человека, близкого Вейлю в личном и научном отношениях. Дополнительные сведения о жизни Э. Нётер и ее окружении можно почерпнуть из книги: *Рид К.* Гильберт. М.: Наука, 1977, воспоминаний П. С. Александрова: Памяти Эмми Нётер.— Успехи мат. наук, 1936, вып. 2, с. 255—265; Страницы автобиографии.— Успехи мат. наук, 1979, т. 34, вып. 6, с. 219—249; 1980, т. 35, вып. 3, с. 241—278, и Трудов симпозиума: Emmy Noether in Bryn Mawr. B.: Springer, 1983.

[1] (с. 395). Edna St. Vincent Millay «Dirge without music». В оригинале:

Down, down, down into the darkness of the grave
Gently they go, the beautifull, the tender, the kind
Quietly they go, the intelligent, the witty, the brave
I know. But I do not approve. And I am not resigned.

[2] (с. 396). Его приезд в Томск не покажется столь удивительным, если вспомнить, что в то время там еще работал известный алгебраист Ф. Э. Молин, исследования которого по конечномерным алгебрам были продолжены затем Э. Нётер (см. ниже, с. 409). Вместе с Ф. Нётером в Томск приехал также С. Бергман, известный своими работами по теории аналитических функций в ограниченных областях. Дальнейшие подробности см.: *Круликовский Н. Н.* История развития математики в Томске. Томск, 1967, гл. 2.

[3] (с. 397). Он был ходячим алгоритмом.

[4] (с. 398). По когтям узнают льва.

[5] (с. 398). Эта аналогия весьма занимала самого Вейля. Ей посвящены математическая работа [II, 97] (наст. изд., с. 219—223) и тонкие философские замечания в [I, 7, приложение D], см. также [III, 10, особенно, с. 347, 348].

[6] (с. 400). См. основополагающую работу Э. Нётер «Инвариантные вариационные задачи», переведенную в сборнике «Вариационные принципы механики» (М., 1959, с. 611—630).

[7–8] (с. 400). Присвоение ученого звания.

[9] (с. 401). Экстраординарный профессор (без должности).

[10] (с. 401). Право на чтение спецкурса.

[11] (с. 401). Леонард Нельсон (1882—1927) — немецкий философ и психолог. На страницах диалогов В. Гейзенберга «Часть и целое» Г. Германн появляется как участник дискуссии о взаимоотношении квантовой механики и квантовой философии (*Heisenberg W.* Physics and beyond. N. Y., 1972, Chap. 10, см. также перевод в сб.: Проблема объекта в современной науке. М., 1980, с. 97—108). Любопытно сравнить приведенное ниже Вейлем описание революционных настроений в области политики с весьма консервативным отношением к квантовой механике, описанным Гейзенбергом.

[12] (с. 401). В веймарской Германии в молодежной, особенно студенческой среде широко были распространены радикальные настроения, которые впоследствии нередко использовались реакционными элементами. (Примеч. Д. Е. Мельникова.)

[13] (с. 401). Имеется в виду Версальский мирный договор 1919 г.

[14] (с. 403). Символ норменного вычета $(a, b)_v$, $a, b \in K_v^*$ является билинейной формой на группе K_v^* локального поля K_v со значениями в группе корней из единицы. Он равен локальному инварианту циклической алгебры (a, b), чем и объясняется приведенное в тексте высказывание.

[15] (с. 403). См. цитированные выше воспоминания П. С. Александрова.

[16] (с. 404). Право читать лекции.

[17] (с. 404). Женский колледж в г. Брин Мор (Bryn Mawr) в штате Пенсильвания (США).

[18] (с. 405). Т. е. как знак, не имеющий заранее заданного значения. Вейль неоднократно пользовался этим понятием. Так, анализируя в [I, 7; III, 11, с. 359] процесс «понимания изнутри», он писал: «Пониманию изнутри по той самой причине, что оно *конкретно* и *полно*, недостает свободы „пустого символа"». Лингвистические исследования выявили, что в языке имеются близкие объекты — местоимения. «Язык разрешил эту задачу (общения между субъектами.— *А. П.*), создав серию пустых знаков, свободных от референтной соот-

несенности с „реальностью“, всегда готовых к новому употреблению и становящихся полными знаками, как только говорящий принимает их для себя, вводя в протекающий акт речи» (*Бенвенист Э.* Общая лингвистика. М.: Прогресс, 1974, с. 288).

[19] (с. 406). Обилие подобных параллелизмов, которые выглядят как своеобразная преадаптированность абстрактных областей математики к последующим приложениям (самый свежий пример — векторные расслоения и инстантонные решения в теории поля), занимало многих мыслителей. См.: *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках.— В кн.: Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971, с. 182—198.

[20] (с. 408). См. [II, 95]. Развитие математики за последние годы снова подтвердило точку зрения Вейля. Экспансия абстрактных методов гомологической алгебры ушла в прошлое. Самые интересные достижения 70—80-х годов носят ярко выраженный геометрический характер.

А. Н. Паршин

Герман Вейль

Публикуемая статья является одним из лучших изложений научной биографии Г. Вейля (см. также раздел IV библиографии и [II, 167]). Ее авторы— известные французские математики, научная деятельность которых тесно связана с темами творчества Вейля. К. Шевалле — один из создателей современной теории алгебраических групп (он написал раздел статьи, относящийся к теории представлений). А. Вейль внес большой вклад в современный синтез теории чисел и алгебраической геометрии. Его истоки можно усмотреть в идеях немецкой математической школы, прежде всего Кронекера и Гильберта, которые были близки и Г. Вейлю.

[1] (с. 413). И прежде всего по его автобиографии [II, 166] (см. также [III, 19]).

[2] (с. 416). Пусть сапожник судит не выше сапога (слова, приписываемые древнегреческому художнику Апеллесу).

[3] (с. 418). См. [II, 132] или [I, 17, т. 4, с. 135].

[4] (с. 420). См. комментарии к статье «О равномерном распределении чисел по модулю один».

[5] (с. 420). См. [II, 42].

[6] (с. 422). [II, 150], наст. изд., с. 361—382.

[7] (с. 422). Диссертация на получение права читать лекции в университете.

[8] (с. 423). [II, 103].

[9] (с. 423). [I, 1].

[10] (с. 424). В [II, 121], наст. изд., с. 275—307.

[11] (с. 425). [II, 25], см. также [III, 6].

[12] (с. 426). *Hilbert D.* Grundzüge einer Allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. B.: Teubner, 1922, гл. 6 (готовится рус. пер.).

[13] (с. 427). *Nirenberg L.* Rigidity of a class of closed surfaces.— In: Nonlinear problems. N. Y., 1963, p. 177—193.

[14] (с. 427). Это утверждение неверно. В работе: Die Grundlagen der Physik.— Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1915, H. 3 (рус. пер. в кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 133—145) Гильберт вывел вариационным методом (одновременно с Эйнштейном) уравнения общей теории относительности. История взаимоотношений Гильберта и Эйнштейна в период создания общей теории относительности изложена

в статье: *Earman J.*, *Glymour C.* Einstein and Hilbert: two months in the history of general relativity.— Arch. Hist. Exact. Sci., 1978, vol. 19, p. 291—308 (воспроизведено в книге В. П. Визгина: Релятивистская теория тяготения. М.: Наука, 1981, содержащей, в частности, анализ переписки Гильберта и Эйнштейна в ноябре 1915 г., с. 324—326).

[15] (с. 427). [I, 2], готовится русский перевод.

[16] (с. 428). [I, 5; II, 45, 49, 53, 54].

[17] (с. 428). *Study E.* Einleitung in die Theorie der Invarianten linearen Transformationen. Braunschweig, 1923.

[18] (с. 428). [II, 60; I, 17, т. 2, с. 433].

[19] (с. 428). [II, 68], наст. изд., с. 100—197.

[20] (с. 433). [I, 16].

[21] (с. 433). Этот список совпадает с приводимой ниже библиографией. Список, упомянутый выше, опущен.

А. Н. Паршин

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН *

Абель Н. (Abel N. H.) 387
Александров П. С. 403
Анаксагор 268
Аристотель 266, 267, 274, 345
Аронпгайн Н. (Aronszajn N.) 372, 382
Артин Э. (Artin E.) 394, 403, 411

Баргман В. (Bargmann V.) 379, 382
Бах И.-С. (Bach J. S.) 385
Беккер О. (Becker O.) 256, 264, 274
Бергсон А. (Bergson H.) 359, 360
Бернайс П. (Bernays P.) 257, 269, 273, 337, 340, 404
Бернал Дж. (Bernal J. D.) 360
Бернсайд В. (Burnside W.) 189
Бернулли (Bernoullis) 396
Бернштейн Б. (Bernstein B. A.) 260
Бернштейн Ф. (Bernstein F.) 363, 418
Бибербах Л. (Bieberbach L.) 91, 323
Биркгофф Г. (Birkhoff G.) 270, 387
Блихфельдт Г. (Blichfeldt H. F.) 326, 327
Бляшке В. (Blaschke W.) 426
Боджио Т. (Boggio T.) 9, 10
Боль П. (Bohl P.) 60, 61, 66, 67, 362, 418, 419
Бор Г. (Bohr H.) 61, 63, 379, 382, 420—422
Борн М. (Born M.) 404
Бохнер С. (Bochner S.) 377, 382
Брауэр Л. (Brouwer L. E.) 269, 273, 335, 336, 338, 340, 389, 423
Брауэр Р. (Brauer R.) 156, 224, 341, 389, 398, 403, 410, 418
Брилль А. В. (Brill A. W.) 397
Буссинеск (Boussinesq) 10, 17, 32
Бюффон Ж. (Buffon G. L.) 346

Вайнштейн А. (Weinstein A.) 124, 372, 380, 382
Ван дер Варден Б. (Van der Waerden B. L.) 394, 403
Вебер М. (Weber M.) 397
Веддербарн Дж. (Wedderburn J. H. M.) 394, 409, 411
Вейерштрасс К. (Weierstrass K. T. W.) 393, 394, 396
Вейль А. (Weil A.) 413
Вейль Гелла (Weyl Hella) 413, 414
Вейль Герман (Weyl Hermann) 57, 61, 94, 160, 208, 243, 252, 272, 296, 324, 381—383, 413—416, 418—433
Вигнер Э. (Wigner E.) 198
Виллис Дж. (Willis E. S.) 359, 360
Вильсон Г. (Wilson H.) 401
Виноградов И. М. 419
Винтнер А. (Wintner A.) 369, 382
Витт Э. (Witt E.) 403

Галилей Г. (Galilei G.) 96
Галуа Э. (Galois E.) 386, 390, 392, 398, 410, 414
Гаусс К. (Gauss C. F.) 248, 383, 384, 387
Гегель Г. (Hegel G. W. F.) 346
Гейтинг А. (Heyting A.) 268, 273
Геккель Э. (Heckel E.) 355
Гексли Дж. (Huxley J.) 359
Гельфанд И. М. 379, 382
Гензель К. (Hensel K.) 397
Генцен Г. (Gentzen G.) 339
Германн Г. (Hermann G.) 401, 403
Гёдель К. (Gödel K.) 273, 332, 337—340
Гёльдер О. (Hölder O.) 94
Гёте И. В. (Goethe J. W.) 346, 388
Гиббс Дж. (Gibbs J. W.) 361, 363, 418
Гильберт Д. (Hilbert D.) 11, 21, 193, 257, 261, 269, 270, 273, 296, 338—340, 382,

* Составлен А. П. Василевичем по основному тексту (с. 9—433).

393, 396, 398, 400, 401, 404, 406, 413—416, 418—420, 423—427
Гордан П. (Gordan P. A.) 221, 386, 396—400
Грассман Р. (Grassmann R.) 95
Грезер В. (Graeser W.) 385
Грель Г. (Grell H.) 403
Григгс Р. (Griggs R. F.) 358
Гурвиц А. (Hurwitz A.) 101, 115, 116, 193, 421, 429
Гуссерль Э. (Husserl E.) 95, 96, 256, 262, 413

Давенпорт Г. (Davenport H.) 309
Дарбу Г. (Darboux G.) 386
Дарвин Ч. (Darwin Ch.) 354—356
Д'Арси Томпсон В. (D' Arcy Thompson W.) 360
Дебай П. (Debye P.) 11
Дедекинд Р. (Dedekind J. W. R.) 328, 330—332, 334—336, 340, 394, 397, 406, 408—411
Дейринг М. (Deuring M.) 403
Декарт Р. (Descartes R.) 96, 345
Де Рам (De Rham) 306
Дженнингс Г. (Jennings H. S.) 360
Джинс Дж. (Jeans J.) 353, 360
Джоуд К. (Joad C. E. M.) 360
Диксон Л. (Dickson L. E.) 394, 409—411
Дирак П. (Dirac P. A. M.) 226
Дирихле Л. (Dirichlet G. P. L.) 396, 411, 418
Добжанский Т. (Dobzhanski Th.) 357, 360

Евдокс 331, 332
Евклид 409

Жордан К. (Jordan C.) 386

Зарисский О. (Zariski O.) 397
Зигель К. (Siegel C. L.) 313, 344, 404

Инге У. (Inge W. R.) 360
Иогансен В. (Johannsen W.) 356

Йордан П. (Jordan P.) 358

Казимир Г. (Casimir H. B. G.) 377, 382
Кант И. (Kant I.) 262, 345
Кантор Г. (Cantor G.) 328, 337, 340
Карамата И. (Karamata J.) 344
Карлеман Т. (Carlemann T.) 373, 382
Картан Э. (Cartan E.) 103, 105, 108, 112, 124, 140, 150—152, 158, 162, 167, 168, 170, 172, 174, 188, 191, 224, 225, 392, 428—431
Кассирер Э. (Cassirer E.) 385
Кениг (König) 65
Кеплер И. (Kepler J.) 389
Кёбе П. (Koebe P.) 90
Кёте Г. (Koethe G.) 403
Киллинг В. (Killing W. K. J.) 103, 158, 172
Клебш А. (Clebsch R. F. A.) 221, 386, 396, 397
Клейн Ф. (Klein F.) 64, 383—395, 398, 400, 404, 414, 424
Ковалевская С. В. 412
Кодаира К. (Kodaira K.) 369
Колмогоров А. Н. 272
Кольридж Т. (Coleridge T.) 345, 354
Корн А. (Korn A.) 9
Коши О. (Cauchy O.) 335, 406, 427
Кронекер Л. (Kronecker L.) 318, 394, 406
Круль В. (Krull W.) 403
Курант Р. (Courant R.) 278, 296, 371, 382, 401, 404, 413, 423
Кэли А. (Cayley A.) 391, 431

Лагранж Ж. (Lagrange J. L.) 66—68, 90, 418
Ламарк Ж. (Lamarck J. B.) 346, 356
Ландау Э. (Landau E.) 404, 420
Лангфорд К. (Langford C. H.) 260
Ландсберг (Landsberg) 397
Лаплас П. (Laplace P.) 353, 382
Ласкер Э. (Lasker E.) 408, 409
Лауричелла Дж. (Lauricella G.) 9
Лауэ М. (Laue M.) 350
Лебег А. (Lebesque H. L.) 275, 276
Леви Э. (Levi E. E.) 10, 21
Левицкий (Levitzki) 403
Лейбниц Г. (Leibniz G.) 274, 389
Леконт дю Ноуи (Lecompte du Noüy) 360
Леметр Ж. (Lemaître G.) 353, 360
Лефшец С. (Lefschetz S.) 397
Ли С. (Lie S.) 103, 386, 402

Литтлвуд Дж. (Littlewood J. E.) 69, 75, 76, 78, 86, 90, 419
Лиувиль Дж. (Liouville J.) 363
Лобачевский Н. И. 425
Лоренц Г. (Lorentz H. A.) 11, 369, 382
Лоуи А. (Lowey A.) 341
Лукасевич Я. (Lukasiewicz J.) 265
Лукреций 345
Льюис К. (Lewis C. I.) 260—262, 273

Мак-Колл Г. (Mac-Coll H.) 260
Малер К. (Mahler K.) 309
Марколонччо Р. (Marcolongo R.) 9
Мах Э. (Mach E.) 349, 385
Мебиус А. (Möbius A. F.) 100, 394
Мелвилл Г. (Melville H.) 345, 347
Мендель Г. (Mendel G.) 356
Ми Г. (Mie G.) 348
Миллэй Э. (Millay E.) 395
Минакшисундарам С. (Minakshisundaram S.) 373, 375—377, 382
Минковский Г. (Minkowski H.) 79, 308, 309, 314, 323, 324, 326, 418
Михельсон А. (Michelson A. A.) 361
Молин Т. (Molien Th.) 409
Морган Т. (Morgan T. H.) 355
Морделл Л. (Mordell L. J.) 309
Мур Э. (Moore E.) 406

Неванлинна Р. (Nevanlinna R.) 366, 367, 381
Нейгебауэр О. (Neugebauer O.) 404
Нейман Дж. фон (Neumann J. von) 257, 269, 270, 337, 344, 379, 382, 401
Нейман К. (Neumann C. G.) 16, 423
Нельсон Л. (Nelson L.) 401
Нётер М. (Noether M.) 396, 397, 399
Нётер Ф. (Noether F.) 396, 400
Нётер Э. (Noether E.) 394—404, 407—412, 418
Ниггли П. (Nigglie P.) 360
Никодим О. (Nikodym O.) 278, 295
Ниренберг (Nirenberg) 427
Ньютон И. (Newton I.) 346
Нэф А. (Naef A.) 360

Опарин А. И. 358, 360
Осборн Г. (Osborn H. F.) 358
Пеано Дж. (Peano G.) 406
Петер Ф. (Peter F.) 378, 382
Пик Г. (Pick G.) 366, 381
Платон 345, 346
Плейель А. (Pleijel Å.) 373, 382
Плюккер Ю. (Plücker J.) 384, 386
Понтрягин Л. С. 403
Портман А. (Portmann A.) 360
Поссел (de Possel) 278
Пуанкаре А. (Poincaré H.) 277, 293, 296, 339, 387, 423

Райков Д. А. 379, 382
Рассел Б. (Russel B.) 256, 258, 260, 32 331—333, 335, 336, 338—340
Рейхенбах Г. (Reichenbach H.) 266
Ремак Р. (Remak R.) 326
Риман Б. (Riemann B.) 82, 374—376, 386, 387, 390, 392, 393, 396, 398, 424, 425
Ринне Ф. (Rinne F.) 360
Ритц В. (Ritz W.) 382
Робертсон Г. (Robertson H. P.) 360
Рох Г. (Roch G.) 425
Румер Ю. Б. (Rumer G.) 219
Рэлей Дж. (Rayleigh J.) 382

Серпинский В. (Sierpinski W.) 60, 63, 419
Сигал И. (Segal I.) 379, 382
Сильвестр Дж. (Sylvester J. J.) 398, 431
Сократ 258
Сомилиана Т. (Somigliniana) 15
Стильтьес Т. (Stieltjes T. J.) 369
Стоун М. (Stone M. H.) 260, 268, 369, 382
Схоутен Дж. (Schouten J. A.) 103, 129, 141, 392

Тан Цао-Чен (Tang Tsao-Chen) 266
Тарский А. (Tarsky A.) 268
Таулер (Towler von) 90
Теллер Е. (Teller E.) 219
Тичмарш Э. (Titchmarsh E. C.) 369, 382
Тревиранус Г. (Treviranus G. R.) 346

Уайтхед А. (Whitehead A.) 256, 340
Умлауф А. (Umlauf A.) 162

Фиттинг (Fitting) 403
Фихте И. (Fichte J. G.) 95
Фишер Р. (Fischer R.) 360
Фишер Э. (Fischer E.) 400
Франк Д. (Franck D.) 404
Франк Э. (Frank E.) 385
Фреге Г. (Frege G.) 256, 328, 330, 334, 335, 339
Фредгольм И. (Fredholm I.) 9, 17
Френкель А. (Fraenkel A.) 337
Фридрихс К. (Friedrichs K.) 278
Фробениус Г. (Frobenius G.) 91, 102, 103, 126—129, 132, 192, 409, 421
Фубини Г. (Fubini G.) 278

Хайдеггер М. (Heidegger M.) 274
Хайош Г. (Hajós G.) 312
Харди Г. (Hardy G. H.) 69, 70, 75, 76, 78, 86, 90, 387, 419
Хартман П. (Hartman P.) 369, 382
Хассе Х. (Hasse H.) 403, 404, 410, 411
Хаусдорф Ф. (Hausdorff F.) 424
Хеллингер Э. (Hellinger E.) 366, 369, 381, 382
Хельзер (Hölzer) 403
Хилб Э. (Hilb E.) 369, 382
Ходж В. (Hodge W. V. D.) 278, 307
Хопкинс Дж. (Hopkins J.) 398
Хотелинг Г. (Hotelling H.) 246, 254

Цезарь 260, 261
Цермело Э. (Zermelo E.) 336—338, 340
Цзень (Tsen) 403
Цук А. (Szücs A.) 65

Чанг С. (Chang S. H.) 344
Черути (Cerruti) 17
Чёрч А. (Church A.) 340

Шварц Г. (Schwartz H. A.) 393
Швейцер А. (Schweitzer A.) 354
Шевалле К. (Chevalley C.) 278, 413
Шевалье (Chevalier) 386
Шелер М. (Scheler M.) 360
Шеллинг Ф. (Schelling F. W. J.) 345
Шеррингтон Ч. (Sherrington Ch.) 360
Шмайдлер В. (Schmeidler W.) 402
Шмидт Ф. (Schmidt F. K.) 403
Шмидт Э. (Schmidt E.) 378, 382, 400, 421
Шода (Schoda) 403
Шоу Б. (Shaw G. B.) 345, 359, 360
Шпейзер А. (Speiser A.) 385
Шпенглер О. (Spengler O.) 385
Шредингер Э. (Schrödinger E.) 210
Шрейер О. (Schreier O.) 430
Штейниц Э. (Steinitz E.) 394, 406, 411
Штуди Э. (Study E.) 255, 428, 431, 432
Штурм Ч. (Sturm Ch. E.) 363
Шур И. (Schur I.) 103, 115, 122, 124, 125, 129, 131—133, 148, 150, 155—157, 184, 194, 196, 323, 344, 403, 410, 411, 421

Эддингтон А. (Eddington A. S.) 347, 360
Эйнштейн А. (Einstein A.) 101, 198, 203, 211, 218, 392, 427
Экхарт Мейстер (Eckhart Meister) 414
Эмпедокл 345

Юм Д. (Hume D.) 262
Юнг (Young) 103, 128, 428, 429

Якоби К. (Jacobi C. G) 387

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции 7

Асимптотический закон распределения частот собственных колебаний упругих тел произвольной формы (1915). Перевод М. И. Зеликина 9

О равномерном распределении чисел по модулю один (1916). Перевод С. П. Демушкина 58

Порочный круг в современном обосновании анализа (1919). Перевод З. А. Кузичевой 94

Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований (1925). Перевод С. П. Демушкина 100

Электрон и гравитация (1929). Перевод С. П. Демушкина 198

Базис бинарных векторных инвариантов, применяемый в теории валентности (1932). Перевод С. П. Демушкина 219

Спиноры размерности n. (1935). Перевод Ф. А. Богомолова 224

Об объеме труб (1939). Перевод Ф. А. Богомолова 246

Призрак модальности (1940). Перевод З. А. Кузичевой 256

Метод ортогональной проекции в теории потенциала (1940). Перевод А. Г. Кушниренко 275

О геометрии чисел (1942). Перевод А. Н. Паршина 308

Математика и логика (1946). Перевод З. А. Кузичевой 328

Неравенства между двумя видами собственных чисел линейного преобразования (1949). Перевод А. Г. Кушниренко 341

Основные черты физического мира. Форма и эволюция (1949). Перевод А. П. Василевича 345

Старые и новые аспекты теории собственных значений (1950). Перевод А. Г. Кушниренко 361

ДОПОЛНЕНИЯ

Феликс Клейн и современная математика (1930). Перевод З. А. Кузичевой . 383

Эмми Нётер (1935). Перевод А. П. Василевича 395

ПРИЛОЖЕНИЯ

Шевалле К., Вейль А. Герман Вейль. Перевод Е. И. Коркиной, Д. Б. Фукса 413

Библиография. Составлена А. П. Василевичем 434

Комментарии и примечания 442

Указатель имен. Составлен А. П. Василевичем 507

Герман Вейль

МАТЕМАТИКА
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Утверждено к печати
Редакционной коллегией серии
«Классики науки»

Редактор издательства *В. П. Сироткина*
Художесгвенный редактор *Т. П. Поленова*
Технический редактор *Л. Н. Золотухина*
Корректоры *Н. Г. Васильева, В. Г. Петрова*

ИБ № 27670

Сдано в набор 09.04.84. Подписано к печати 17.12.84
Т-09187. Формат 70×90¹/₁₆. Бумага книжно-журнальная
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая
Усл. печ. л. 37.59. Уч.-изд. л. 38,9. Усл. кр. отт. 38,75
Тираж 5800 экз. Тип. зак. 212
Цена 3 р. 10 к.

Издательсıво «Наука»
117864, ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10


МАТЕМАТИКА · ФИЗИКА · Г. ВЕЙЛЬ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»